2. Несобственные интегралы

Задание 2.3. Вычислить несобственные интегралы от неограниченных функций.

2.3.1. $\int_2^4 \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$. **2.3.2.** $\int_0^2 \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}dx$.

2.3.3. $\int_0^1 \frac{\ln(2+x)}{\sqrt{x}}dx$. **2.3.4.** $\int_{-1}^0 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}dx$.

2.3.5. $\int_1^3 \frac{2xdx}{(x^2-1)^{2/3}}$. **2.3.6.** $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}\left(1+\sqrt{x}\right)dx}{\sqrt{x}}$.

2.3.7. $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$. **2.3.8.** $\int_{-3}^0 \frac{xdx}{\sqrt{9-x^2}}$.

2.3.9. $\int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\arcsin x}}$. **2.3.10.** $\int_1^3 \frac{xdx}{\sqrt{(x-1)(4-x)}}$.

2.3.11. $\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}dx$. **2.3.12.** $\int_0^2 \frac{xdx}{\sqrt{x+2-x^2}}$.

2.3.13. $\int_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx$. **2.3.14.** $\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

2.3.15. $\int_1^2 \frac{dx}{x\cdot\sqrt{x-1}}$. **2.3.16.** $\int_2^3 \frac{xdx}{\sqrt{6x-x^2-8}}$.

2.3.17. $\int_0^{\pi/4} \frac{\ln\sin x}{\cos^2 x}dx$. **2.3.18.** $\int_{-\pi/2}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-\cos x}}$.

2.3.19. $\int_{3\pi/4}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{1+\cos x}}$. **2.3.20.** $\int_0^1 \ln^2 x\,dx$.

2.3.21. $\int_0^1 \frac{\ln(3-x)}{\sqrt{1-x}}dx$. **2.3.22.** $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x}}dx$.

2.3.23. $\int_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{4x-x^2+5}}$. **2.3.24.** $\int_0^1 \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

2.3.25. $\int_1^5 \frac{dx}{(10-x)\cdot\sqrt{x-1}}$. **2.3.26.** $\int_0^{\pi/2} \ln\cos x\,dx$.

2.3.27. $\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}$. **2.3.28.** $\int_2^4 \sqrt{\frac{x+2}{x-2}}dx$.

2.3.29. $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x}}dx$. **2.3.30.** $\int_0^1 \ln^3 xdx$.

Задание 2.4. Исследовать на сходимость интегралы.

2.4.1. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}+x}$.

2.4.2. $\int\limits_1^{2} \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x^3-1}}$.

2.4.3. $\int\limits_0^{1} \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[5]{1-x^3}}dx$.

2.4.4. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{2+x}{1+x^2+x^3}dx$.

2.4.5. $\int\limits_2^{+\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^4+1}}dx$.

2.4.6. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{arctg}\,x}{1+x^2}dx$.

2.4.7. $\int\limits_1^{4} \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{16-x^2}}dx$.

2.4.8. $\int\limits_0^{1} \frac{e^x dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

2.4.9. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{3+\sin x}{\sqrt[4]{x}}dx$.

2.4.10. $\int\limits_1^{2} \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{4x-x^2-3}}$.

2.4.11. $\int\limits_0^{1} \frac{e^x dx}{1-x^3}$.

2.4.12. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt[3]{1+x^4}}dx$.

2.4.13. $\int\limits_0^{1} \frac{2+\sin x}{2x^2+\sqrt{x}}dx$.

2.4.14. $\int\limits_0^{1} \frac{\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

2.4.15. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}+\sin x}$.

2.4.16. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{2-\cos x}{x+\sqrt[3]{x}}dx$.

2.4.17. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{2x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^5+x^2+1}}dx$.

2.4.18. $\int\limits_1^{2} \frac{x+1}{\sqrt{16-x^4}}dx$.

2.4.19. $\int\limits_0^{1} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^3}}dx$.

2.4.20. $\int\limits_4^{6} \frac{x}{\sqrt[4]{x^2-6x+8}}dx$.

2.4.21. $\int\limits_2^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

2.4.22. $\int\limits_2^{+\infty} \frac{2+\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{x^3-1}}dx$.

2.4.23. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x}dx$.

2.4.24. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x\cos\frac{1}{x}}{x+2\sqrt{x^4+1}}dx$.

2.4.25. $\int\limits_0^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}\cos x}{x}dx$.

2.4.26. $\int\limits_3^{5} \frac{\arccos(4-x)}{\sqrt{x^3-27}}dx$.

2.4.27. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x+\cos x}{1+x^3}dx$.

2.4.28. $\int\limits_0^{1} \frac{e^x dx}{1-\sqrt{x}}$.

2.4.29. $\int\limits_3^{5} \frac{x-2}{\sqrt[3]{x^2-5x+6}}dx$.

2.4.30. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1+\cos x}{\sqrt[3]{x^4+3x-3}}dx$.

3. Приложения определённого интеграла

Задание 3.1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми, заданными в декартовой системе координат. **Построить кривые и отметить на рисунке вычисляемую площадь.**

При выполнении задания 3.1 можно использовать программы из Интернет или пакетов математических программ для:

1) построения графиков функций;

2) нахождения точек пересечения кривых.

В решении должно быть указано какие программы были использованы.

3.1.1. $y = e^x - 1$, $y = \sqrt{e^x + 1}$, $x = 0$.

3.1.2. $y = \operatorname{tg} x$, $y = \frac{2}{3}\cos x$, $x = 0$.

3.1.3. $y = 1 - \sqrt{x}$, $y = \frac{x}{\sqrt{x} + 1}$, $y = 0$.

3.1.4. $y = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^2 x$, $y = 2\sin\frac{x}{2}$, $0 \le x < \pi/2$.

3.1.5. $y = x\sqrt{1-x}$, $y = x - x^2$.

3.1.6. $y = \sqrt{4 - x^2}$, $y = \sqrt{3}\,x^2$.

3.1.7. $y = \ln x$, $y = \ln(3 - x)$, $y = 0$.

3.1.8. $y = \frac{5}{1 + 4x^2}$, $y = |x|$.

3.1.9. $y = \frac{1}{x\sqrt{1 + \ln x}}$, $y = \frac{2}{3x}$, $x = 1$.

3.1.10. $y = \frac{1}{1 + 4x^2}$, $y = \frac{x^2}{3}$.

3.1.11. $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^6 + 1}}$, $y = \frac{x^2}{3}$.

3.1.12. $y^2 = x^2 - x^4$, $y = x^2$ $(y \ge 0)$.

3.1.13. $y = x\,4^{-x}$, $y = 4^{-x-1}$, $x = 1$.

3.1.14. $y = \sqrt{2x + 1}$, $y = \sqrt{9 - x^2}$, $y = 0$ $(-1/2 \le x \le 3)$.

3.1.15. $y = \frac{x}{\sqrt{x^4 + 3}}$, $y = \frac{1}{1 + x}$, $x = 0$.

3.1.16. $y = \sqrt{4 - x^2}$, $y = x\sqrt{3}$, $y = 0$ $(x \ge 0)$.

3.1.17. $y = \frac{x}{\sqrt{2x + 1}}$, $y = 2$, $x = 0$.

3.1.18. $y = \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$, $y = \frac{\ln x}{x}$, $x = e^2$.

3.1.19. $y = x\sqrt{9 - x^2}$, $y = \sqrt{3}\,x^2$.

3.1.20. $y = \sqrt{9 - x}$, $y = \sqrt{3x + 2}$, $y = 0$.

3.1.21. $y = 2x^2 e^x$, $y = \frac{e^x}{2}$.

3.1.22. $y=\dfrac{\ln x}{4x}$, $y=x\ln x$.

3.1.23. $y=x^2\sqrt{4-x^3}$, $y=\dfrac{x^2}{2}$.

3.1.24. $y=\ln^2 x$, $y=\ln x$.

3.1.25. $y=e^x$, $y=\sqrt{4e^x+5}$, $x=0$.

3.1.26. $y=4^{-x}$, $y=\dfrac{5}{6}-9^{-x}$, $x=1$.

3.1.27. $y=\operatorname{arctg} x$, $y=-\operatorname{arctg}(x-4)$, $y=0$.

3.1.28. $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $y=2$.

3.1.29. $y=\arccos\dfrac{x}{2}$, $y=x\arccos\dfrac{x}{2}$.

3.1.30. $y=\sin^2 x$, $y=\sin x$, $0\le x\le\pi$.

Задание 3.2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми, заданными в полярной системе координат. **Привести таблицу полярных координат точек кривой, отметить их на плоскости и построить кривые. Отметить на рисунке вычисляемую площадь.**

3.2.1. $r=-3\cos 4\varphi$.

3.2.2. $r=2\cos\varphi$, $r=2$.

3.2.3. $r=1-2\cos\varphi$.

3.2.4. $r=4\cos 3\varphi$.

3.2.5. $r=3\sin\varphi$, $r=2\sin\varphi$.

3.2.6. $r=-3\sin 3\varphi$.

3.2.7. $r=3-2\sqrt{3}\sin\varphi$.

3.2.8. $r=-3\cos\varphi$, $r=-4\cos\varphi$.

3.2.9. $r=1-2\cos 2\varphi$.

3.2.10. $r=-3\sin\varphi$, $r=-4\sin\varphi$.

3.2.11. $r=3\sin 4\varphi$.

3.2.12. $r=-6+4\sqrt{3}\cos\varphi$.

3.2.13. $r=-2\cos 4\varphi$.

3.2.14. $r=1+2\sin\varphi$.

3.2.15. $r=2\cos 2\varphi$, $r=3\cos 2\varphi$.

3.2.16. $r=\dfrac{3}{2}-\sqrt{3}\cos 2\varphi$.

3.2.17. $r=-2\cos\varphi$, $r=-4\cos\varphi$.

3.2.18. $r=-3\cos 2\varphi$, $r=-4\cos 2\varphi$.

3.2.19. $r=-4\sin 3\varphi$.

3.2.20. $r=\sqrt{3}-2\sin\varphi$.

3.2.21. $r=2\sin\varphi$, $r=4\sin\varphi$.

3.2.22. $r=2\sqrt{3}-4\sqrt{3}\cos\varphi$.

3.2.23. $r=-2\sin 2\varphi$, $r=-4\sin 2\varphi$.

3.2.24. $r=-3\cos 3\varphi$.

3.2.25. $r=\sqrt{3}-2\cos 2\varphi$.

3.2.26. $r=-4\sin 4\varphi$.

3.2.27. $r=2\cos 2\varphi$, $r=4\cos 2\varphi$.

3.2.28. $r=-2\sin 2\varphi$, $r=-3\sin 2\varphi$.

3.2.29. $r=1-2\sin 2\varphi$.

3.2.30. $r=\sin 2\varphi$, $r=4\sin 2\varphi$.

Задание 3.7.

При выполнении задания 3.7 можно использовать программы из Интернет или пакетов математических программ для построения графиков функций.

В решении должно быть указано какие программы были использованы.

а) Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox заданной кривой. Сделать рисунок кривой в плоскости Oxy.

3.7.1. $|y-4|=x^2$, $0\le x\le 2$.

3.7.2. $y=-x^2+5x-6$, $y\ge 0$.

3.7.3. $x^2+(y-2)^2=4$.

3.7.4. $|y-5|=e^x,\ 0\le x\le\frac{1}{2}\ln 15$.

3.7.5. $y=x^2-6x+10,\ 1\le x\le 5$. **3.7.6.** $x^2+(y-4)^2=1$.

3.7.7. $y=\sqrt{\frac{x^2-x^4}{8}},\ 0\le x\le 1$. **3.7.8.** $y^2=3+3x^2,\ |x|\le 1$.

3.7.9. $|y-2|=e^{-x},\ 0\le x\le \ln 2$. **3.7.10.** $|y-2|=\sqrt{x},\ 0\le x\le 4$.

3.7.11. $y=\frac{2}{3}x\sqrt{x},\ 0\le x\le 4$. **3.7.12.** $y=-x^2+6x-8,\ y\ge 0$.

3.7.13. $(x-2)^2+(y-4)^2=4$. **3.7.14.** $|y-2|=2x^2,\ |x|\le 1$.

3.7.15. $|y-3|=3\sqrt{x},\ 0\le x\le 1$.

б) Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Oy заданной кривой. Сделать рисунок кривой в плоскости Oxy.

3.7.16. $y=4-2\sqrt{x-1},\ 1\le x\le 5$. **3.7.17.** $y=x^2-5x+6,\ y\le 0$.

3.7.18. $y=\frac{1}{3}\operatorname{ch}3x,\ 0\le x\le 1$. **3.7.19.** $y=\sqrt{x^2-1},\ 1\le x\le\sqrt{10}$.

3.7.20. $y=2x^3,\ 0\le x\le 1$. **3.7.21.** $y=1+2\sqrt{1+x},\ 0\le x\le 3$.

3.7.22. $y=\sqrt{1+x^2},\ 0\le x\le\sqrt{15}$. **3.7.23**. $y=x+\frac{1}{3}x^3,\ 0\le x\le 2$.

3.7.24. $y=2\ln x,\ 0<x\le 1$.

3.7.25. $y=\ln(x^2-1),\ \sqrt{2}\le x\le 4$.

3.7.26. $(x-4)^2+(y-1)^2=1$.

3.7.27. $y=\frac{1}{3}\left(1+x^2\right)^{3/2},\ 0\le x\le\sqrt{3}$.

3.7.28. $y=1+2\sqrt{x-3},\ 3\le x\le 7$. **3.7.29.** $(x-4)^2+y^2=9$.

3.7.30. $y=2+\sqrt{x^2-1},\ 1\le x\le\sqrt{5}$.

Задание 3.8. Решить физическую задачу.

Решение должно содержать:

1) физический смысл вводимых при решении задачи переменных и ИХ РАЗМЕРНОСТЬ; ограничения на область изменения переменных, обусловленных задачей;

2) рисунок, поясняющий рассуждения;

3) физические законы, формулы и/или определения физических величин, использованных в решении.

3.8.1. Аквариум имеет форму полушара радиусом 20 см и полностью заполнен водой. Найти силу давления воды (плотность $\gamma=1000$ кг/м^3) на стенку аквариума.

3.8.2. Найти кинетическую энергию однородной (плотность $\gamma=\text{const}$) дуги параболы $y=x^2,\ 0\le x\le 1$м, вращающейся вокруг оси Oy со скоростью 10 оборотов в секунду.

3.8.3. Резервуар для воды имеет форму конуса высотой 10 м и радиусом основания 2 м (конус расположен основанием вверх) и полностью заполнен водой. Какая работа потребуется, чтобы выкачать всю воду из резервуара?

3.8.4. Определить величину давления морской воды на вертикально расположенный круг радиусом $R = 0,2$ м , центр которого погружен в воду на глубину $H = 10$ м . Плотность морской воды $\gamma = 1020$ кг/м^3 .

3.8.5. В проводнике сопротивлением 40 Ом сила тока за 10 с возросла линейно с 5 до 25 А. Какое количество теплоты выделилось за это время?

3.8.6. Найти момент инерции однородной (плотность $\gamma = \text{const}$) кривой $r = 4\sin\varphi$ относительно полярной оси.

3.8.7. Найти статические моменты относительно осей Ox и Oy однородной (плотность $\gamma = \text{const}$) дуги астроиды $x = 2\cos^3 t,\ \ y = 2\sin^3 t$, расположенной в первой четверти.

3.8.8. Найти массу астроиды $x = 2\cos^3 t,\ \ y = 2\sin^3 t$, если линейная плотность в каждой её точке равна $\gamma = |x|$.

3.8.9. Найти силу давления воды на плотину, сечение которой имеет форму равнобочной трапеции. Размеры трапеции a = 7 м (низ), b = 12 м (верх), h = 5 м. Плотность воды 1000 кг/м^3. Верх плотины совпадает с урезом воды.

3.8.10. Вкопанный в землю резервуар для воды имеет форму правильной четырёхугольной усечённой пирамиды глубиной 3 м, сторонами оснований 8 и 2 м (резервуар расположен бóльшим основанием вверх). Резервуар полностью заполнен водой. Какая работа потребуется, чтобы выкачать всю воду?

3.8.11. Найти момент инерции тонкого однородного (плотность $\gamma = \text{const}$) стержня диаметром 1 см и длиной 1 м относительно оси, перпендикулярной ему и проходящей через конец стержня.

3.8.12. Резервуар имеет форму шара радиусом 2 м с малым отверстием вверху и полностью заполнен водой (плотность $\gamma = 1000$ кг/м^3). Найти величину работы, которую нужно затратить, чтобы выкачать воду из резервуара.

3.8.13. Найти момент инерции окружности (плотность $\gamma = \text{const}$) радиусом R относительно её диаметра.

3.8.14. Найти массу дуги параболы $y = x^2,\ \ 0 \le x \le 2$, если линейная плотность в каждой её точке $\gamma = x$.

3.8.15. В проводнике сопротивлением 50 Ом сила тока за 20 с возросла линейно с 3 до 13 А. Какое количество теплоты выделилось за это время?

3.8.16. Резервуар имеет форму куба со стороной 2 м с отверстием вверху и наполовину заполнен водой (плотность $\gamma = 1000$ кг/м^3). Найти работу, которую нужно затратить, чтобы выкачать воду из резервуара.

3.8.17. Колёса автомобиля имеют радиус 30 см. Стартуя, угловое ускорение вращения колеса изменяется по закону $\beta = 3t^2$ рад/с^2. Какой путь проедет автомобиль за 5 с?

3.8.18. Найти момент инерции тонкого однородного (плотность $\gamma = \text{const}$) стержня диаметром 0,5 см и длиной 2 м относительно оси, перпендикулярной ему и проходящей через конец стержня.

3.8.19. Найти статический момент однородной (плотность $\gamma = \text{const}$) кривой $r = 2\cos\varphi$ относительно прямой, перпендикулярной полярной оси, лежащей в одной плоскости с осью и касающейся кривой.

3.8.20. Найти центр тяжести четверти окружности $x^2 + y^2 = R^2$, расположенной в первом координатном углу, если в каждой её точке линейная плотность пропорциональна произведению координат точки.

3.8.21. Найти кинетическую энергию однородной (плотность $\gamma = \text{const}$) дуги параболы $y = \dfrac{x^2}{2},\ \ 0 \le x \le 1$ м, вращающейся вокруг оси Oy со скоростью 5 оборотов в секунду.

3.8.22. Найти силу давления воды (плотность $\gamma = 1000$ кг/м^3) на круглый иллюминатор диаметром d см (на вертикальном борту судна), наполовину погруженный в воду.

3.8.23. Найти массу дуги параболы $y = 2x^2,\ \ 0 \le x \le 1$, если линейная плотность в каждой её точке $\gamma = 2x$.

3.8.24. Найти силу давления воды на плотину, сечение которой имеет форму равнобочной трапеции. Размеры трапеции a = 6 м (низ), b = 14 м (верх), h = 4 м. Плотность воды 1000 кг/м^3. Верх плотины совпадает с урезом воды.

3.8.25. Найти координаты центра тяжести однородной дуги (плотность $\gamma = \text{const}$) окружности $x^2 + y^2 = R^2$, расположенной в первой четверти.

3.8.26. Найти работу, которую нужно совершить, чтобы переместить положительный точечный заряд q' в поле другого неподвижного положительного точечного заряда q с расстояния 2 мм до расстояния 0,5 мм.

3.8.27. Полый куб со стороной 20 см плавает в воде так, что он погружен в воду на 5 см. Какую работу надо совершить, чтобы погрузить куб в воду до половины?

3.8.28. Мяч радиусом 10 см плавает в воде так, что его центр на 6 см выше поверхности воды. Какую работу надо совершить, чтобы погрузить мяч в воду до диаметральной плоскости (ровно наполовину)?

3.8.29. Какую работу нужно совершить, чтобы поднять груз весом 100 кг с поверхности Земли на орбиту, находящуюся на высоте 200 км?

3.8.30. Груз массой 600 кг висит на 50-метровом тросе. Масса 1 м троса равна 0,5 кг. С помощью лебёдки груз поднимается вертикально вверх. Найти работу, которую необходимо совершить, чтобы поднять груз вверх на 30 м.