

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Общая задача линейного программирования

В данном разделе будут содержаться сведения и информация по курсу линейного программирования с тем, чтобы систематизировать знания о математических методах решения оптимизационных моделей и создать целостное представление о математическом обеспечении линейных оптимизационных моделей.

Линейные модели являются одним из наиболее активно используемых классов математических моделей.

Издавна линейная функция была важным математическим инструментом в физике, химии, астрономии, экономике и вообще везде, где человек хотел объяснить и упорядочить наблюдаемые явления. И это естественно — для всякого наблюдения линейная функция является самой удобной математической моделью, и ею охотно пользуются.

Конечно, сейчас поле математических приложений значительно расширилось. Но по-прежнему линейные модели привлекают огромное внимание. Они сравнительно просты, хорошо разработаны, допускают полное исследование и достаточно эффективны в целом ряде стандартных ситуаций.

Линейность — это свойство математических выражений и функций. Выражение вида $ax + by + c$, где x и y — переменные величины, а a , b и c — постоянные числа, называется *линейным относительно переменных x и y* .

В случае если переменных больше двух — x_1, x_2, \dots, x_n , линейное выражение относительно этих переменных имеет вид

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n,$$

где $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ — постоянные числа.

Заметим, что в линейное выражение все переменные входят в первой степени и никакие переменные не перемножаются.

Линейное программирование является наиболее известным и одним из наиболее широко используемых инструментов. Это математический метод решения задачи оптимального распределения имеющихся ресурсов (или денег, или материалов, или времени) для достижения определенной цели (наибольшего дохода или наименьших издержек).

Линейное программирование — это частный раздел оптимального программирования. В свою очередь *оптимальное (математическое) программирование* — раздел прикладной математики, изучающий задачи условной оптимизации. В экономике такие задачи возникают при практической реализации принципа оптимальности в планировании и управлении.

Математическая модель задачи – это отражение оригинала в виде функций, уравнений, неравенств, цифр и т.д. Модель задачи математического программирования включает: совокупность неизвестных величин x_1, x_2, \dots, x_n ; целевую функцию (показатель эффективности, критерий оптимальности, функцию цели и др.); условия (или систему ограничений), налагаемых на неизвестные величины, совокупность которых образует область допустимых решений (Ω). Таким образом, мы можем записать математическую модель в следующем виде

$$\begin{aligned} F &= f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max (\min) \\ g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) &\{\leq, =, \geq\} b_i \quad (i = \overline{1, n}) \\ x_j &\in \Omega, (j = \overline{1, n}) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Необходимым условием использования оптимального подхода к планированию и управлению (принципа оптимальности) является гибкость, альтернативность производственно-хозяйственных ситуаций, в условиях которых приходится принимать планово-управленческие решения. Именно такие ситуации, как правило, и составляют повседневную практику хозяйствующего субъекта (выбор производственной программы, прикрепление к поставщикам, маршрутизация, раскрой материалов, приготовление смесей и т.д.).

Рассмотрим основные примеры экономических задач, ставшие классическими:

Задача планирования производства (задача о наилучшем использовании имеющихся ресурсов)

Пусть некоторая производственная единица производит n видов продукции $P_j, (j = \overline{1, n})$, затрачивая при этом m типов ресурсов $R_i, (i = \overline{1, m})$.

Известны следующие параметры:

$c_j, (j = \overline{1, n})$ – цена единицы продукции j -го вида (вектор цен);

$b_i, (i = \overline{1, m})$ – запас i -го ресурса (вектор ресурсов);

$a_{ij}, (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$ – количество i -го ресурса, необходимое для производства единицы продукции j -го вида (технологическая матрица);

$x_j, (j = \overline{1, n})$ – планируемый объем производства j -го вида продукции (план производства), при котором обеспечивается максимум прибыли при имеющихся ресурсах.

Составим экономико-математическую модель данной задачи.

Так как c_j – цена единицы продукции j -го вида, тогда стоимость x_j единиц будет равна $c_j x_j$, а цена общего объема продукции:

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

Так как $a_{ij} x_j$ – расход i -го ресурса на производство x_j единиц j -го вида продукции, то просуммировав расход i -го ресурса на выпуск всех n видов продукции, получим общий расход этого ресурса на производство продукции, который не должен превышать b_i :

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, (i = \overline{1, m}).$$

Чтобы искомый план $\bar{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ был реален, наряду с ограничениями на ресурсы нужно наложить условие неотрицательности на объемы x_j выпуска продукции:

$$x_j \geq 0, (j = \overline{1, n}).$$

Таким образом, математическая модель задачи о планировании производства примет вид:

$$F = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max \quad (1.2)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, (i = \overline{1, m}), \quad (1.3)$$

$$x_j \geq 0, (j = \overline{1, n}). \quad (1.4)$$

Итак, (1.2) - (1.4) – модель поставленной задачи.

Транспортная задача.

Пусть имеется m производителей, у каждого из которых находится $a_i, (i = \overline{1, m})$ единиц однородного товара. Этот товар нужно доставить n потребителям, потребность в товаре которых соответственно равна $b_j, (j = \overline{1, n})$ единиц, чтобы общая величина транспортных издержек была минимальной.

$$\text{Причем: } \sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j.$$

Известны следующие параметры:

$c_{ij}, (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$ – стоимость перевозки единицы товара от i -го производителя j -му потребителю.

$x_{ij}, (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$ – количество товара, перевозимое от i -го производителя j -му потребителю.

Для удобства стоимость перевозки $c_{ij}, (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$ и количество перевозимого товара $x_{ij}, (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$ можно записать в виде матриц:

$C = [c_{ij}] (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$ – матрица тарифов.

$X = [x_{ij}] (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$ – матрица перевозок.

Математическая модель транспортной задачи примет вид:

$$F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (1.5)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, (i = \overline{1, m}), \quad (1.6)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, (j = \overline{1, n}), \quad (1.7)$$

$$x_{ij} \geq 0, (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}) \quad (1.8)$$

(1.5) – целевая функция, описывающая транспортные затраты;

(1.6) – весь продукт из пунктов производства должен быть вывезен;

(1.7) – спрос потребителей должен быть удовлетворен;

(1.8) – условия неотрицательности переменных исключают обратные перевозки.

Итак, эти задачи являются примерами задач линейного программирования и решаются при помощи математических методов оптимизации.

Суть принципа оптимальности состоит в стремлении выбрать такое планово-управленческое решение $\bar{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, где $x_j, (j = \overline{1, n})$ — его компоненты, которое наилучшим образом учитывало бы внутренние возможности и внешние условия производственной деятельности хозяйствующего субъекта.

Слова «наилучшим образом» здесь означают выбор некоторого критерия оптимальности, т.е. некоторого экономического показателя, позволяющего сравнивать эффективность тех или иных планово-управленческих решений. Традиционные критерии оптимальности: «максимум прибыли», «минимум затрат», «максимум рентабельности» и др.

Слова «учитывало бы внутренние возможности и внешние условия производственной деятельности» означают, что на выбор планово-управленческого решения (поведения) накладывается ряд условий, т.е. выбор \bar{X} осуществляется из некоторой области возможных (допустимых) решений. Эту область называют также *областью определения задачи*.

Таким образом, стандартная формулировка общей задачи линейного программирования выглядит так: требуется найти экстремальное значение показателя эффективности (целевой функции)

$$f(\overline{X}) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n \rightarrow \max(\min) \quad (1.9)$$

при линейных ограничительных условиях, накладываемых на элементы решения:

[illegible]

$$x_i \geq 0, (j = \overline{1, n}), \quad (1.11)$$

где a_{ij}, b_i, c_j — заданные числа.

Условие (1.11) необязательно, но его всегда при необходимости можно добиться. Обозначение $\{\leq, =, \geq\}$ говорит о том, что в конкретном ограничении возможен один из знаков: $\leq, =$ или \geq .

Общую постановку задачи линейного программирования можно записать в более компактной форме:

найти максимум или минимум функции.

$$f(\bar{X})=f(x_1, x_2, \dots, x_n)=\sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (1.12)$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} x_j \{ \leq, =, \geq \} b_i, (i = \overline{1, m}) \quad (1.13)$$

$$x_j \geq 0, (j = \overline{1, n}) \quad (1.14)$$

Задача (1.12) - (1.14) — общая задача линейного программирования, иначе — математическая модель задачи линейного программирования, в основе построения (разработки) которой лежат принципы оптимальности и системности.

Вектор $\bar{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ (набор управляющих переменных) называется *допустимым решением*, или *планом задачи*, или *вектором управления*, или *поведением* оптимального программирования, если он удовлетворяет системе ограничений (1.13) и (1.14). Неотрицательное базисное допустимое решение задачи называется *опорным планом*. А тот план $\bar{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ (опорное решение), который доставляет максимум или минимум целевой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (1.12), называется *оптимальным планом* (*оптимальным поведением*, или просто *решением*) задачи линейного программирования.

Таким образом, выбор оптимального управленческого поведения в конкретной производственной ситуации связан с проведением с позиций системности и оптимальности решения задачи линейного программирования. Оптимальное решение может быть не единственное. Возможны случаи, когда оно и не существует.

Рассмотрим числовой пример задачи линейного программирования.

Пример 1. Фирма выпускает два вида древесно-стружечных плит — обычные и улучшенные. При этом производятся две основные операции — прессование и отделка. Составить экономико-математическую модель задачи при помощи которой требуется указать, какое количество плит каждого типа можно изготовить в течение месяца так, чтобы обеспечить максимальный доход при ограничениях на ресурсы (материал, время, затраты) представленных в таблице 1, если за каждые 100 обычных плит фирма получает доход, равный 80 ден.ед., за каждые 100 плит улучшенного вида — 100 ден.ед.

Таблица 1

Затраты	Партия из 100 плит	Имеющиеся
---------	--------------------	-----------

	Обычных	улучшенных	ресурсы на месяц
Материал (кг)	5	10	1000
Время на прессование (ч)	4	6	900
Время на отделку (ч)	4	4	600
Средства (ден.ед.)	30	50	6000

Решение: Перейдем к построению математической модели поставленной задачи.

Введем следующие обозначения. Пусть x_1 — количество партий в 100 плит обычного вида, изготавливаемых в течение месяца, а x_2 — то же для плит улучшенного качества.

Тогда ожидаемый доход можно записать так:

$$f = 80x_1 + 100x_2 \rightarrow \max. \quad (1.15)$$

Для изготовления x_1 партий в 100 плит обычного вида и x_2 партий в 100 плит улучшенного вида требуется $5x_1 + 10x_2$ килограммов дерева. Ясно, что полученное число не может превосходить количество материала, имеющегося в наличии, т.е. 1000 кг. Тем самым, ограничение на материал имеет вид: $5x_1 + 10x_2 \leq 1000$.

Подобным же образом рассчитывается ограничения на время изготовления и затраты:

$$\text{прессование: } 4x_1 + 6x_2 \leq 900,$$

$$\text{отделка: } 4x_1 + 4x_2 \leq 600,$$

$$\text{затраты: } 30x_1 + 50x_2 \leq 6000.$$

Наряду с ограничениями на ресурсы нужно наложить условие неотрицательности на объемы выпуска плит:

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Итак подведем итог: требуется найти такие значения x_1 и x_2 , подчиненные условиям

$$\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 \leq 1000, \\ 4x_1 + 6x_2 \leq 900, \end{cases}$$

$$4x_1 + 4x_2 \leq 600, \quad (1.16)$$

$$30x_1 + 50x_2 \leq 6000,$$

$$x_1 \geq 0,$$

$$x_2 \geq 0,$$

для которых

$$f = 80x_1 + 100x_2 \rightarrow \max.$$

Итак, соотношения (1.15) – (1.16) и есть математическая модель задачи поставленной в данном примере. Эта задача будет решена позже, после того как будет рассмотрен графический метод решения задач линейного программирования. ■

Формы записи задач линейного программирования

Выше были рассмотрены задачи с линейными ограничениями и линейной функцией. В одних из задач ограничения имели вид неравенств, в других равенств. Для решения задач линейного программирования необходимо различать виды записи задач линейного программирования. Рассмотрим основные из них.

Общей формой записи задачи линейного программирования называют задачу максимизации или минимизации линейной функции

$$f = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max (\min) \quad (2.1.)$$

при линейных ограничениях

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \{ \leq, = \geq \} b_i, (i = \overline{1, m}) \quad (2.2.)$$

и при условиях

$$\begin{cases} x_j \geq 0, (j \in J_1), \\ x_j \in \mathbb{R}, (j \in J_2), \end{cases} \quad (2.3.)$$

где $J_1 \cup J_2 = (\overline{j=1, n})$ и a_{ij}, b_i, c_j — постоянные числа.

Симметричной формой записи задачи линейного программирования называют задачу максимизации линейной функции (2.1.), при линейных

ограничениях (2.2.), когда все ограничения имеют смысл неравенства вида « \leq » и все переменные неотрицательны, т.е.

$$f = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max \quad (2.4.)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, (i = \overline{1, m}) \quad (2.5.)$$

$$x_j \geq 0, (j = \overline{1, n}) \quad (2.6.)$$

Канонической формой записи задачи линейного программирования называют задачу максимизации линейной функции (2.1.), при линейных ограничениях (2.2.), когда все ограничения имеют смысл равенства и все переменные неотрицательны, т.е.

$$f = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max \quad (2.7.)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, (i = \overline{1, m}) \quad (2.8.)$$

$$x_j \geq 0, (j = \overline{1, n}) \quad (2.9.)$$

На практике часто приходится одну форму записи задачи линейного программирования преобразовывать в другую. При этом пользуются следующими соображениями:

- 1) При необходимости задачу максимизации можно заменить задачей минимизации и наоборот. Экстремум этих функций достигается в одной и той же точке, т.е. $\min f = - \max (-f)$. После решения задачи $\max (-f)$ необходимо изменить на противоположный знак оптимума функции.
- 2) Если на какую-либо переменную не наложено условие неотрицательности (например x_k), то её можно заменить разностью двух новых неотрицательных переменных (x_k' и x_k''), т.е. $x_k = x_k' - x_k''$.
- 3) Любое ограничение неравенство задачи линейной оптимизации вида “ \leq ”, можно преобразовать в равенство добавлением к его левой части дополнительной неотрицательной переменной, а неравенство, вида

“ \geq ” — вычитанием из его левой части дополнительной неотрицательной переменной.

В экономических задачах дополнительные переменные всегда имеют определенный, практический смысл. Рассмотрим пример.

Пример 2. Привести модель задачи к канонической форме.

$$f = 8x_1 + 6x_2 + 3x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 6x_3 \geq 9 \\ 5x_1 + 4x_3 \leq 11 \\ 2x_2 + 5x_3 = 4 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

Решение: Модель нашей задачи записана в общем виде. Так как на переменную x_2 не наложено условие неотрицательности, то её мы заменим разностью двух неотрицательных переменных x_2' и x_2'' ($x_2 = x_2' - x_2''$) и подставим полученное выражение вместо переменной x_2 в модель задачи. В результате мы получим модель:

$$f = 8x_1 + 6(x_2' - x_2'') + 3x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4(x_2' - x_2'') - 6x_3 \geq 9 \\ 5x_1 + 4x_3 \leq 11 \\ 2(x_2' - x_2'') + 5x_3 = 4 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_3 \geq 0, x_2' \geq 0, x_2'' \geq 0.$$

Ограничение неравенство $3x_1 + 4(x_2' - x_2'') - 6x_3 \geq 9$ преобразуем в равенство путем вычитания дополнительной переменной x_4

$$3x_1 + 4(x_2' - x_2'') - 6x_3 - x_4 = 9.$$

Ограничение неравенство $5x_1 + 4x_3 \leq 11$ преобразуем в равенство путем добавления к левой части дополнительной переменной x_5

$$5x_1 + 4x_3 + x_5 = 11.$$

Следует заметить, что в каждое ограничение необходимо вводить свою дополнительную переменную. И, наконец, преобразуем исходную задачу минимизации к задаче максимизации, применив соображения из пункта 1 $z = -f = -8x_1 - 6(x_2' - x_2'') - 3x_3 \rightarrow \max$.

Итак, мы получили следующую модель задачи, которая записана в каноническом виде:

$$\begin{aligned} z &= -8x_1 - 6x_2' + 6x_2'' - 3x_3 \rightarrow \max \\ \left\{ \begin{aligned} 3x_1 + 4x_2' - 4x_2'' - 6x_3 - x_4 &= 9 \\ 5x_1 &+ 4x_3 + x_5 = 11 \\ 2x_2' - 2x_2'' + 5x_3 &= 4 \end{aligned} \right. \\ x_1 \geq 0, x_3 \geq 0, x_2' \geq 0, x_2'' \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \blacksquare \end{aligned}$$

Геометрическая интерпретация и графический метод решения задачи линейного программирования

Задание точки посредством упорядоченного набора чисел позволяет описывать при помощи формул различные множества, это дает возможность добавить к геометрическим рассуждениям действенный аналитический аппарат и, наоборот, привлекать к исследованию разнообразных формул наглядные геометрические соображения.

Известно, что любой упорядоченный набор n чисел можно геометрически интерпретировать как точку или вектор n -мерного пространства. Поэтому и планы задачи линейной оптимизации $\bar{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ будем интерпретировать как точки или векторы.

В простейшем случае, когда число переменных равно двум, удобен простой и наглядный *графический метод*. Он не требует больших предварительных знаний и позволяет получать ответ без привлечения дополнительных средств и, что особенно важно, раскрыть суть идей, лежащих в основе других методов.

Рассмотрим модель вида (1.2) – (1.4) с двумя переменными

$$f = C_1 x_1 + C_2 x_2 \rightarrow \max \quad (3.1.)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m \end{array} \right. \quad (3.2.)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \quad (3.3.)$$

На координатной плоскости Ox_1x_2 линейное уравнение вида $a_{ij}x_j + a_{ij}x_j = b_i$ изображается прямой, а линейное неравенство $a_{ij}x_j + a_{ij}x_j \leq b_i$ или $a_{ij}x_j + a_{ij}x_j \geq b_i$ является полуплоскостью. Условия неотрицательности определяют полуплоскости соответственно с граничными прямыми $x_1=0$ и $x_2=0$. Если система ограничений совместна, то полуплоскости как выпуклые множества, пересекаясь, образуют общую часть, которая является выпуклым множеством и представляет собой совокупность точек, координаты каждой из которых составляют решение данной системы. Совокупность этих точек называют *многоугольником решений*. Это может быть точка, отрезок, луч, замкнутый многоугольник, неограниченная многоугольная область.

Пусть наша система неравенств (3.2.) и (3.3.) образует область допустимых решений в виде многоугольника решений (непустого множества) (рисунок 1).

Придадим целевой функции произвольное значение, например равное k . Получим $C_1x_1 + C_2x_2 = k$. А это уравнение прямой линии, в каждой точке которой целевая функция сохраняет одно и то же постоянное значение равное k . Если теперь k считать параметром, а не константой, то мы получим семейство параллельных прямых, называемых *линиями уровня целевой функции*.

Осталось найти направление возрастания и убывания целевой функции. Найдем частные производные целевой функции по переменным x_1

$$\text{и } x_2: \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} = C_1, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = C_2.$$

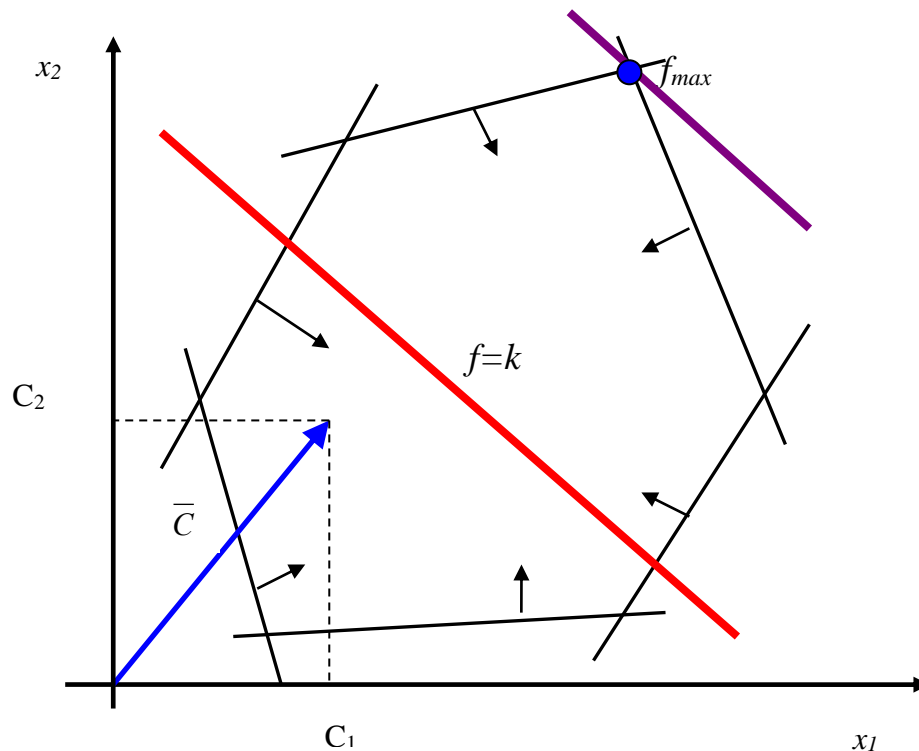


Рис 1.

Они показывают скорость возрастания целевой функции вдоль осей x_1 и x_2 соответственно. Вектор $\bar{C} = (C_1, C_2)$ показывает направление наискорейшего возрастания целевой функции и называется *вектором-градиентом* целевой функции. Вектор $(-\bar{C}) = (-C_1, -C_2)$ называют *антиградиентом* и он указывает направление наискорейшего убывания целевой функции. Вектор $\bar{C} = (C_1, C_2)$ перпендикулярен к прямым семейства $f = \text{const}$.

Таким образом, геометрически задача линейной оптимизации (3.1.)-(3.3.) представляет собой поиск такой точки многогранника решений, координаты которой доставляют линейной функции наибольшее (наименьшее) значение, причем допустимыми решениями являются все точки многогранника решений.

Если в задаче линейной оптимизации ограничения заданы в виде ограничений с двумя переменными, то она может быть решена графически. Графический метод решения состоит из следующих этапов.

Этап 1. Сначала на координатной плоскости Ox_1x_2 строится допустимая многоугольная область (область допустимых решений, область определения), соответствующая ограничениям. Далее строится вектор-градиент линейной функции. Начало вектора находится в точке с координатами $(0; 0)$, а вершина — в точке с координатами (C_1, C_2) . Следует заметить, что значения C_1 и C_2 и есть коэффициенты при переменных целевой функции задачи. Для удобства можно строить вектор, пропорциональный вектору \bar{c} . В какой-нибудь точке, принадлежащей допустимой области строится прямая семейства $f=const$, которая всегда будет проходить перпендикулярно вектору-градиенту.

Этап 2. Прямая $f=const$, перпендикулярная вектору-градиенту, перемещается в направлении этого вектора в случае максимизации функции (или в противоположном направлении задачи минимизации) до тех пор, пока не покинет пределов многоугольной области. Крайняя (предельная) точка (или точки) области при этом движении и является точкой максимума (минимума) целевой функции.

Этап 3. Для нахождения координат точки максимума (минимума) достаточно решить систему из двух уравнений прямых, получаемых из соответствующих ограничений и дающих в пересечении точку максимума (минимума). Например это значения a_1 и a_2 . Значение функции, найденное в получаемой точке, является максимальным (минимальным). И затем останется выписать ответ, который будет иметь вид: $\bar{X}^*=(a_1,a_2), f_{max}=f(a_1,a_2)$.

В случае минимизации целевой функции прямую $f=const$ надо перемещать в направлении, противоположном вектору-градиенту (по направлению вектора-антиградиента). Ясно, что если прямая при своем движении не покидает допустимой области, то соответствующий максимум или минимум целевой функции не существует (целевая функция неограниченна на множестве планов).

Пример 3. Решить графическим методом задачу примера 1:

$$f = 80x_1 + 100x_2 \rightarrow \max.$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 \leq 1000, \\ 4x_1 + 6x_2 \leq 900, \\ 4x_1 + 4x_2 \leq 600, \\ 30x_1 + 50x_2 \leq 6000, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Решение: Ограничения $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ означают, что область решений будет лежать в первой четверти декартовой системы координат. Отметим эту область на рис. 2 (первая четверть, указываем направление стрелочками).

Этап 1. Определим множество решений первого неравенства. Оно состоит из решения уравнения $5x_1 + 10x_2 = 1000$ и строгого неравенства $5x_1 + 10x_2 < 1000$. Решением уравнения служат точки прямой $5x_1 + 10x_2 = 1000$. Построим прямую по двум точкам $(0; 100)$ и $(200; 0)$, которые легко получить в результате последовательного обнуления одной из переменных: пусть $x_1 = 0$, тогда $x_2 = (1000 - 5 \cdot 0) / 10 = 100$, пусть $x_2 = 0$, тогда $x_1 = (1000 - 10 \cdot 0) / 5 = 200$.

На рисунке обозначим эту прямую цифрой I. Множество решений строгого неравенства — одна из полуплоскостей, на которую делит плоскость построенная прямая. Какая из них является искомой, можно выяснить при помощи одной контрольной точки. Если в произвольно взятой точке, не принадлежащей прямой, неравенство выполняется, то оно выполняется и во всех точках той полуплоскости, которой принадлежит контрольная точка, и не выполняется во всех точках другой полуплоскости. В качестве такой точки удобно брать начало координат. Подставим координаты $(0; 0)$ в неравенство, получим $5 \cdot 0 + 10 \cdot 0 = 0 < 1000$, т.е. оно выполняется. Следовательно, областью решения неравенства служит «нижняя» полуплоскость.

Аналогичным образом построим области решения трех других неравенств

➤ $4x_1 + 6x_2 \leq 900,$

(0; 150) и (225; 0) на рисунке прямая II и берется «нижняя» полуплоскость;

➤ $4x_1 + 4x_2 \leq 600,$

(0; 150) и (150; 0) на рисунке прямая III и берется «нижняя» полуплоскость;

➤ $30x_1 + 50x_2 \leq 6000,$

(0; 120) и (200; 0) на рисунке прямая IV и опять берется «нижняя» полуплоскость.

Заштрихуем общую область для всех неравенств, обозначим вершины многоугольника латинскими буквами $OABD$ (рисунок 2). Это и будет область допустимых решений рассматриваемой задачи в виде замкнутого четырехугольника.

Этап 2. Для определения направления движения к оптимуму построим вектор-градиент \bar{C} (на рисунке это grad), координаты которого (80; 100). Вектор-градиент $\bar{C}(80, 100)$ показывает направление наискорейшего возрастания целевой функции. Чтобы построить этот вектор, нужно соединить начало координат с точкой (80; 100). Для удобства можно строить вектор, пропорциональный вектору \bar{C} . Приравняем целевую функцию постоянной величине a : $80x_1 + 100x_2 = a$. Пусть $a=3200$, вычислим координаты двух точек, удовлетворяющих соответствующему уравнению $80x_1 + 100x_2 = 3200$. В качестве одной из этих точек удобно взять точку (40; 0), в качестве второй точки возьмем точку (0; 32). Через эти две точки проведем линию уровня (пунктирная прямая $f(x)$ на рис. 2), следует еще раз заметить, что данная линия перпендикулярна вектору-градиенту.

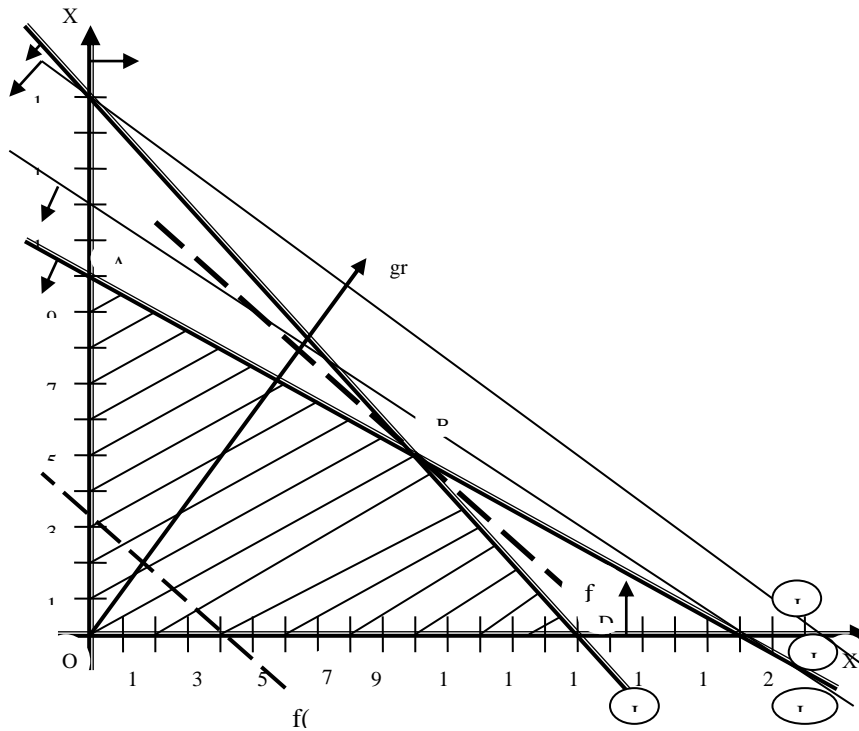


Рис 2.

Так как мы находим решение задачи максимизации, то перемещать нашу прямую линии уровня необходимо по вектору градиенту. В нашем случае движение линии уровня (пунктирная прямая $f(x)$) будем осуществлять до ее пересечения с точкой B ; далее она выходит из области допустимых решений. Следовательно, именно в этой точке достигается максимум целевой функции. Найдем координаты этой точки, решив систему уравнений прямых пересечения в данной точке (это первая и третья прямые).

$$\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 = 1000, \\ 4x_1 + 4x_2 = 600, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 100 \\ x_2 = 50 \end{cases}$$

Вычислим значение целевой функции в данной точке, подставив найденные значения в выражение $f = 80x_1 + 100x_2 = 80 \cdot 100 + 100 \cdot 50 = 13000$. Отсюда легко записать решение исходной задачи линейного программирования:

$$x_1^* = 100, x_2^* = 50, f_{\max} = 13000.$$

Ответ: $\bar{X}^* = (100; 50)$, $f_{\max} = 13000$. Итак, чтобы доход был максимальным и равен 13000 ден.ед. при ограничениях на ресурсы

(материал, время, затраты) в течение месяца необходимо выпускать 10000 плит (100 партий в 100 плит) обычного вида и 5000 плит (50 партий в 100 плит) улучшенного качества. ■

При решении некоторых ЗЛП графическим методом может встретиться случай, когда линия уровня параллельна одной из сторон выпуклого многоугольника допустимых решений, причем эта сторона расположена в направлении смещения линии уровня функции и стремлении целевой функции к своему оптимуму. В этом случае оптимальное значение целевой функции достигается не в одной, а в двух угловых точках (вершинах) многоугольника решений и, следовательно, во всех точках отрезка, соединяющего эти вершины, т. е. задача будет иметь бесчисленное множество решений (рисунок 3 (а)).

Если область допустимых решений является выпуклым незамкнутым многоугольником в направлении оптимизации целевой функции, то целевая функция будет неограниченной и задача не будет иметь решений; в этом случае условно можно записать, что, например, $\max f(X) = +\infty$ (рисунок 3 (б)).

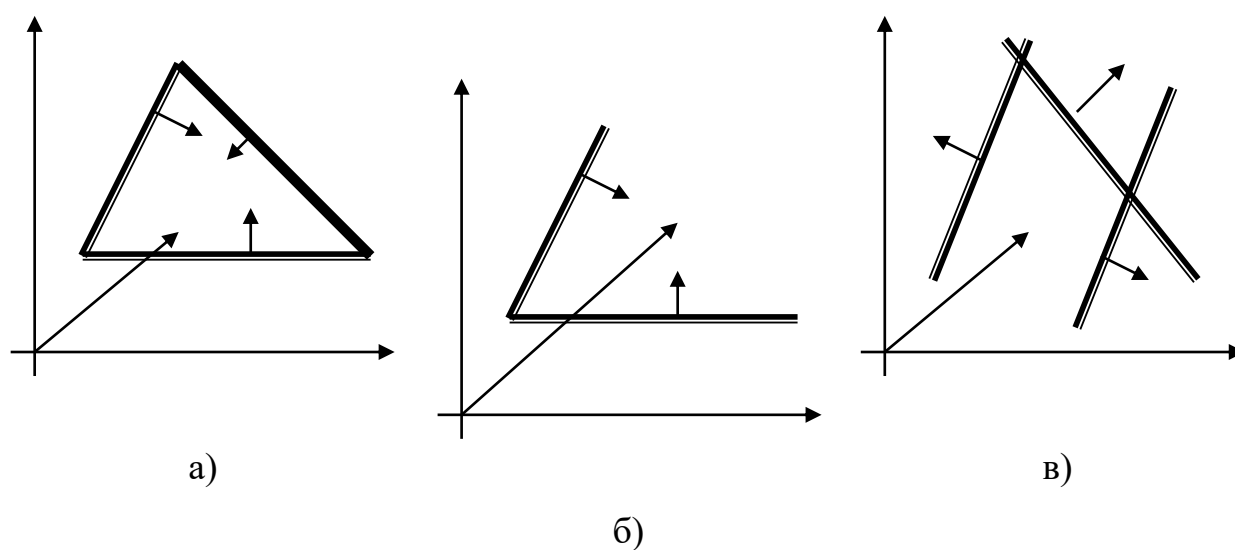


Рис. 3.

Очевидно также, что задача не будет иметь решений в случае, когда область допустимых решений есть пустое множество, т.е. - система ограничений задачи содержит противоречивые неравенства, и на координатной плоскости нет ни одной точки, удовлетворяющей этим ограничениям (рисунок 3 (в)).

Симплексный метод решения задачи линейного программирования

Трудность решения задачи линейного программирования заключается в том, что не все модели задач можно свести к равносильным моделям с двумя переменными, а с большим количеством — практически невозможно решить.

Наиболее распространенным методом решения задач линейного программирования является так называемый *симплекс-метод*. Из геометрической интерпретации задача линейной оптимизации видно, что экстремум функции достигается в крайней (угловой) точке выпуклого многогранника, т.е. в области допустимых решений. Поэтому в основу симплекс-метода положена идея рассмотрения только крайних точек (вершин) многогранника, а не все бесконечное множество его точек.

Симплексный метод это метод последовательного улучшения планов, который является универсальным методом решения задач линейного программирования. Суть этого метода заключается в том, что вначале получают допустимый план, удовлетворяющий всем ограничениям, но необязательно оптимальный (так называемое *начальное опорное решение*), оптимальность достигается последовательным улучшением исходного варианта за определенное число этапов (итераций).

Нахождение начального опорного решения и переход к следующему опорному решению проводятся на основе применения метода Жордана-Гаусса для системы линейных уравнений в канонической форме, в которой должна быть предварительно записана исходная задача. Результат каждой

итерации (включая данные задачи) удобно записывать в виде симплексной таблицы (вид которой представлен при решении задачи примера 4). Направление перехода от одного опорного решения к другому выбирается при этом на основе критерия оптимальности (целевой функции) исходной задачи. Симплекс-метод основан на следующих свойствах ЗЛП:

1. Множество всех планов задачи линейного программирования выпукло.
2. Не существует локального экстремума, отличного от глобального. Другими словами, если целевая функция принимает экстремальное значение, то данное значение будет единственным.
3. Целевая функция задачи линейного программирования достигает своего максимального (минимального) значения в крайней точке многогранника решений (в его вершине). Если целевая функция принимает свое оптимальное значение более чем в одной крайней точке, то она достигает того же значения в любой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией этих точек.
4. Каждой угловой точке многогранника решений отвечает опорный план задачи линейной оптимизации.

Предположим, что в симплексной таблице содержится некоторый опорный план (см. пример 4). Через конечное число шагов либо будет найден оптимальный план задачи, либо будет установлено неразрешимость задачи. Перебор опорных планов осуществляется в процессе перехода от одного базиса системы переменных к другому базису. При этом приходится определять переменные, участвующие в преобразовании базиса. Переменная, включаемая в базис в задаче максимизации определяется по отрицательному коэффициенту в строке целевой функции симплексной таблицы. Если таких коэффициентов несколько, то выбирают максимальный по модулю. Такую переменную называют разрешающей, а столбец коэффициентов при ней разрешающим. Для выбора переменной исключаемой из базиса составляют симплексные отношения: это отношение свободного коэффициента к элементу такого же знака разрешающего столбца. Наименьшее из них и

указывает уравнение (разрешающее), в котором содержится исключаемая переменная. После выбора разрешающего столбца и разрешающей строки определяется на их пересечении разрешающий элемент и осуществляется преобразование модели задачи к новому базису.

Симплексное преобразование после выбора разрешающего элемента при табличных записях выполняется по следующим правилам:

- 1) Разрешающий элемент (a_{rk}) заменяют обратной величиной (т.е. $1/a_{rk}$);
- 2) Остальные элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент ($a'_{rj} = \frac{a_{rj}}{a_{rk}}, j = \overline{1, n}$);
- 3) Остальные элементы разрешающего столбца делятся на разрешающий элемент и знак меняется на противоположный ($a'_{ik} = - \frac{a_{ik}}{a_{rk}}, i = \overline{1, m}$);
- 4) Остальные элементы таблицы преобразовываются по правилу прямоугольника: искомый элемент равен разности произведений элементов главной и побочной диагоналей, деленной на разрешающий элемент (по воображаемому прямоугольнику пересчета) ($a'_{ij} = \frac{a_{ij} \times a_{rk} - a_{rj} \times a_{ik}}{a_{rk}}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}, i \neq r, j \neq k$).

Таким образом, получаем новый опорный план задачи в следующей симплексной таблице. А для того, чтобы определить является ли новый опорный план оптимальным, необходимо знать следующие признаки:

Признак оптимальности задачи максимизации: Если все оценки индексной строки (строки целевой функции) не отрицательны, то соответствующий план является оптимальным в задаче максимизации.

Признак оптимальности задачи минимизации: Если все оценки индексной строки (строки целевой функции) не положительны, то соответствующий план является оптимальным в задаче минимизации.

В тех случаях когда затруднительно найти первоначальный опорный план канонической формы задачи линейного программирования применяется *метод искусственного базиса (М – метод)*.

Решим симплексным методом следующую задачу.

Пример 4. Предприятие выпускает четыре вида продукции Π_1, Π_2, Π_3 и Π_4 . Для производства продукции оно располагает тремя ресурсами, запасы которых ограничены величинами 35, 30 и 40 единиц. Удельные затраты на единицу продукции и цена единицы готовой продукции заданы в виде таблицы:

Таблица 2

Ресурсы	Расход ресурсов на единицу продукции			
	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4
P_1	4	2	2	3
P_2	1	1	2	3
P_3	3	1	2	1
Цена (ден.ед.)	14	10	14	11

Требуется определить производственную программу предприятия, обеспечивающую максимальный доход.

Решение:

Составим математическую модель задачи. Пусть x_1, x_2, x_3 и x_4 — искомые объемы производства продукции, а через f — доход предприятия от производства и реализации всей продукции, который с учетом введенных обозначений определяется следующей функцией:

$$f = 14x_1 + 10x_2 + 14x_3 + 11x_4 \rightarrow \max. \quad (4.1.)$$

Ограничения по используемым ресурсам примут вид:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 35, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 30, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 40. \end{cases} \quad (4.2.)$$

По смыслу задачи объемы производства продукции не могут быть отрицательными, поэтому

$$x_j \geq 0, (j=\overline{1,4}). \quad (4.3.)$$

Введем в рассмотрение возможные остатки ресурсов: x_5, x_6, x_7 , или приведем модель задачи к каноническому виду и получим:

$$f = 14x_1 + 10x_2 + 14x_3 + 11x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 35, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_6 = 30, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_7 = 40. \end{cases} \quad (4.4.)$$

$$x_j \geq 0, (j=\overline{1,7})$$

Нам необходимо выделить начальный базис системы, т.е. выделить базисные переменные. Базисных переменных должно быть столько, сколько ограничений системы линейных уравнений, т.е. в нашем случае их должно быть три. Наши дополнительные переменные x_5, x_6, x_7 и будут базисными, так как им соответствуют единичные векторы, которые образуют базис в трехмерном пространстве. Выразим эти переменные и получим:

$$\begin{cases} x_5 = 35 - (4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4), \\ x_6 = 30 - (x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4), \\ x_7 = 40 - (3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4). \end{cases} \quad (4.5.)$$

Итак у нас x_5, x_6, x_7 базисные переменные, а x_1, x_2, x_3 и x_4 будут свободными переменными. Приравнивая свободные переменные нулю мы получим $x_5 = 35, x_6 = 30, x_7 = 40$. Имеем некоторый допустимый план задачи $\overline{X^0} = (0; 0; 0; 0; 35; 30; 40)$. Этот план удовлетворяет одновременно всем ограничениям задачи и следовательно является опорным планом. Занесем условия задачи в симплексную таблицу (таблица 3). Первый столбец — столбец базисных переменных (БП — x_5, x_6, x_7); второй столбец — столбец свободных коэффициентов (1); далее идут столбцы свободных переменных (СП) — таких переменных в нашей задаче четыре (x_1, x_2, x_3 и x_4), они всегда записываются в (СП) со знаком "-". Чтобы правильно вписать коэффициенты в таблицу данного вида, надо придерживаться следующего правила: в

соответствующей строке записываем числа так, чтобы при умножении их на соответствующее значение в "шапочке" таблицы мы получили бы выражения вида (4.5.) и (4.1.)

Таблица 3

БП	1	СП			
		- x_1	- x_2	- x_3	- x_4
$x_5 =$	35	4	2	2	3
$x_6 =$	30	1	1	2	3
$x_7 =$	40	3	1	2	1
$f =$	0	-14	-10	-14	-11

При решении задачи максимизации в строке целевой функции в столбцах свободных переменных не должно быть отрицательных коэффициентов. Мы видим, что в нашем случае, в столбцах свободных переменных в индексной строке присутствуют отрицательные коэффициенты, поэтому данный опорный план не является оптимальным. Будем улучшать его, переходя от одного базиса системы к другому. Выберем разрешающий столбец, как столбец, соответствующий наибольшей по модулю отрицательной оценке, т.е.

$$\max \{ |-14|; |-10|; |-14|; |-11| \} = 14.$$

Из двух одинаковых оценок выберем одну, например, столбец соответствующий свободной переменной x_1 , он и будет разрешающим столбцом. Затем находим разрешающую строку по наименьшему симплексному отношению:

$$\min \left\{ \frac{35}{4}; \frac{30}{1}; \frac{40}{3} \right\} = \frac{35}{4}.$$

На пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки находим разрешающий элемент, выделяем его (мы выделили ячейку, в которой находится разрешающий элемент, равный 4). Строим следующую

симплексную таблицу, меняя две переменные x_1 и x_5 местами и пересчитываем элементы по правилам симплексных преобразований.

Таблица 4

БП	1	СП				min
		- x_5	- x_2	- x_3	- x_4	
x_1	35/4	1/4	2/4	2/4	$\frac{3}{4}$	$35 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 = 35/2$
x_6	85/4	-1/4	2/4	6/4	9/4	$85 \cdot \frac{1}{4} \cdot 6 = 85/6$
x_7	55/4	-3/4	-2/4	2/4	-5/4	$55 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 = 55/2$
f	490/4	14/4	-12/4	-28/4	-2/4	

Анализируя полученные результаты, мы видим, что пока ещё не получен оптимальный план, так как не все оценки строки целевой функции принимают неотрицательные значения. Повторим наши преобразования, выбрав разрешающий элемент, равный 6/4. В результате получим следующую таблицу.

Таблица 5

БП	1	СП				min
		- x_5	- x_2	- x_6	- x_4	
x_1	10/6	2/6	2/6	-2/6	0	$(10/6)/(2/6) = 10/2$
x_3	85/6	-1/6	2/6	4/6	9/6	$(85/6)/(2/6) = 85/2$
x_7	40/6	-4/6	-4/6	-2/6	-12/6	—
f	1330/6	14/6	-4/6	28/6	60/6	

Еще раз проводя преобразования с элементами данной таблицы, мы получим оптимальный план, который находится в таблице 6.

Итак, в индексной строке последней таблицы нет ни одного отрицательного элемента, следовательно, содержащийся в ней план является оптимальным. Выпишем его, зная, что значения базисных переменных находится в столбце свободных коэффициентов, а все свободные переменные

равны нулю: $x_2=5$; $x_3=12,5$; $x_7=10$; $x_5=0$; $x_1=0$; $x_6=0$; $x_4=0$ или план $\bar{X}=(0;5;12,5;0;0;0;10)$. Значение целевой функции равно 225.

Таблица 6

БП	1	СП			
		- x_5	- x_1	- x_6	- x_4
x_2	5	1	3	-1	0
x_3	12,5	-0,5	-1	1	1,5
x_7	10	0	2	-1	-2
f	225	3	2	4	10

Но наша задача с экономическим содержанием, поэтому проанализируем данные результаты. Предприятию по оптимальному плану следует производить 5 единиц продукции вида P_2 , 12,5 единиц продукции вида P_3 , продукции P_1 и P_4 выпускать не следует, при этом ресурсы P_1 и P_2 будут израсходованы полностью, а ресурс P_3 останется в количестве 10 единиц. Выручка предприятия при этом составит 225 ден.ед. ■

Теория двойственности в анализе оптимальных решений экономических задач линейного программирования

Не менее важным этапом, чем получение оптимального решения по модели задачи, является анализ модели и полученных результатов. В некоторых случаях анализ дает больше информации для принятия решения, чем само решение. Анализ позволяет ответить на вопросы, связанные с повышением рентабельности предприятия, с распределением ограниченных (дефицитных) ресурсов между звеньями производства, с увеличением выпуска продукции путем рациональной расшивки узких мест производства, определения цен на взаимозаменяемую новую технику и др. Анализ на чувствительность дает возможность определить поведение модели в окрестности экстремума, а также пределы изменения исходных параметров, не изменяющих положение экстремума. Это позволяет сформулировать требования к точности исходных данных, а также упростить и уточнить

модель, отрубив параметры, незначительно влияющие на конечный результат и уточнив параметры, находящиеся в области высокой чувствительности. И в этом нам поможет понятие двойственности.

Рассмотрим основные понятия и выводы специального раздела линейного программирования — теорию двойственности на примере задачи планирования производством. С каждой задачей линейного программирования тесно связана другая линейная задача, называемая *двойственной*.

Вспомним задачу об оптимальном планировании производства из *примера 4* темы 4. Модель задачи была построена ранее.

$$f = 14x_1 + 10x_2 + 14x_3 + 11x_4 \rightarrow \max. \quad (5.1.)$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 35, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 30, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 40. \end{cases} \quad (5.2.)$$

$$x_j \geq 0, (j=\overline{1,4}). \quad (5.3.)$$

Предположим, что некоторая организация может закупить все ресурсы, которыми располагает предприятие. Необходимо определить оптимальные оценки на эти ресурсы, исходя из естественного условия, что покупающая организация стремится минимизировать общую оценку ресурсов. Нужно, однако, учитывать и тот факт, что за ресурсы покупающая организация должна уплатить сумму, не меньшую той, которую может, выручить предприятие при организации собственного производства продукции. Итак, предположим, что оставаясь в рамках производства в задаче необходимо установить оценки используемых в производстве ресурсов с учетом их влияния на конечный результат производства.

Обозначим эти оценки за единицу каждого вида ресурса соответственно через y_1 ; y_2 и y_3 (P_1, P_2, P_3). Эти оценки для упрощения иногда называют *внутренними ценами* на ресурсы в условиях данного производства (*теневыми ценами*). Т.е. они представляют объективно необходимые затраты на производство продукции в данных условиях.

Понятно, что при их определении следует руководствоваться следующими соображениями:

1. Оценка ресурсов, затрачиваемых на выпуск единицы готовой продукции должна быть не меньше оценки единицы готовой продукции, т.е.

$$\begin{cases} \text{П}_1: & 4y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 14 \\ \text{П}_2: & 2y_1 + y_2 + y_3 \geq 10 \\ \text{П}_3: & 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 14 \\ \text{П}_4: & 3y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 11 \end{cases} \quad (5.4.)$$

2. Оценки по их смыслу должны выражаться не отрицательными числами, т.е.

$$y_i \geq 0, i = \overline{1,4} \quad (5.5.)$$

3. Для объективной оценки ресурсов необходимо требовать, чтобы общая стоимость всех ресурсов, находящихся в распоряжении предприятия, была возможно меньше, т.е.

$$\varphi = 35 y_1 + 30 y_2 + 40 y_3 \rightarrow \min \quad (5.6.)$$

Итак, получили модель задачи:

$$\begin{aligned} & \varphi = 35 y_1 + 30 y_2 + 40 y_3 \rightarrow \min \\ & \begin{cases} 4y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 14 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 \geq 10 \\ 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 14 \\ 3y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 11 \end{cases} \quad (5.7.) \\ & y_i \geq 0, i = \overline{1,4} \end{aligned}$$

Таким образом, проблема правильной оценки ресурсов находится в распоряжении предприятия и сводится к решению стандартной ЗЛП. Задача (5.7.) называется двойственной к задаче (5.1.) — (5.3). Эти две задачи представляют собой числовой пример пары симметричных двойственных задач.

С экономической точки зрения в прямой задаче шла речь о нахождении оптимального плана выпуска продукции при ограничениях ресурсов из условия максимизации выручки. В двойственной задаче речь идет о нахождении системы внутренних цен на используемые в производстве ресурсы, из условия минимизации стоимости всех запасов имеющихся на предприятии. Система двойственных оценок (y_i) тесно связана с конкретными условиями данного производства. С изменением этих условий меняется и система этих оценок.

В общем виде модели симметричных двойственных задач имеют следующий вид:

Прямая или исходная	Двойственная
$\left. \begin{aligned} f &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i, (i = \overline{1, m}) \\ x_j &\geq 0, (j = \overline{1, n}) \end{aligned} \right\} \quad (I)$	$\left. \begin{aligned} \varphi &= \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \min \\ \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i &\geq c_j, (j = \overline{1, n}) \\ y_i &\geq 0, (i = \overline{1, m}) \end{aligned} \right\} \quad (II)$

Пусть нам дана задача линейной оптимизации в общем виде, тогда двойственная к ней примет вид:

Прямая или исходная	Двойственная
$\left. \begin{aligned} f &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i, (i = \overline{1, m_1}), m_1 \leq m \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &= b_i, (i = \overline{m_1 + 1, m}) \\ x_j &\geq 0, (j = \overline{1, n_1}), n_1 \leq n \\ x_j &\in \mathfrak{R}, (j = \overline{n_1 + 1, n}) \end{aligned} \right\} \quad (I)$	$\left. \begin{aligned} \varphi &= \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \min \\ y_i &\geq 0, (i = \overline{1, m_1}), m_1 \leq m \\ y_i &\in \mathfrak{R}, (i = \overline{m_1 + 1, m}) \\ \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i &\geq c_j, (j = \overline{1, n_1}), n_1 \leq n \\ \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i &= c_j, (j = \overline{n_1 + 1, n}) \end{aligned} \right\} \quad (II)$

Свойство двойственности является взаимным, т.е. если к задачам (I) и (II) записать двойственные, то они совпадут с задачами (I) и (II)

соответственно. Любую задачу внутри двойственной пары можно назвать прямой или исходной, тогда другая будет двойственной к ней.

Анализируя модели задач двойственной пары, можно сделать следующие выводы о связях, существующих между элементами модели задач двойственной пары:

1. Коэффициентами целевой функции двойственной задачи, являются свободные члены ограничений прямой задачи, а свободными членами ограничений двойственной задачи - коэффициенты целевой функции прямой задачи. В двойственной задаче будет столько переменных, сколько ограничений в прямой и столько ограничений, сколько переменных в прямой задаче. Таким образом, каждому ограничению задачи отвечает соответствующая переменная двойственной задачи и наоборот.

2. Матрицы коэффициентов при переменных в двойственных задачах взаимно транспонированы.

3. Каждому ограничению — неравенству в двойственной задаче отвечает неотрицательная переменная, а каждому ограничению равенству — переменная произвольного знака и наоборот: каждой неотрицательной переменной — ограничение неравенство, а каждой переменной произвольного знака — ограничение равенство. При этом в задаче максимизации ограничения-неравенства имеют смысл « \leq », а в задаче минимизации — « \geq ».

4. Если в прямой задаче функция целевая максимизируется, то в двойственной минимизируется и наоборот.

Итак, согласно теории линейного программирования каждой оптимизационной задаче линейного программирования соответствует двойственная ей задача. Основные утверждения о взаимодвойственных задачах содержатся в следующих теоремах, называемых *теоремами двойственности*.

Теорема 1 (основная).

Если одна из двойственных задач имеет оптимальный план, то и

другая разрешима, т.е. имеет оптимальный план. При этом экстремальные значения целевых функций совпадают, т.е. $f_{\max} = \varphi_{\min}$. Если же в одной из задач целевая функция не ограничена на множестве планов, то в другой задаче система ограничений противоречива, т.е. задача не разрешима.

Рассмотрим экономическое приложение этой теоремы.

В действительности связь между двойственными задачами гораздо глубже, нежели об этом говорится в теореме.

Оказывается, подвергая симплексному преобразованию модель одной из задач, мы тем самым преобразуем и модель двойственной задачи, а поэтому решая одну из задач двойственной пары симплексным методом, мы одновременно решаем и двойственную задачу, так что получив оптимальный план решаемой задачи, мы вместе с этим находим и компоненты оптимального плана двойственной задачи.

Компоненты оптимального плана двойственной задачи находятся в строке целевой функции последней симплексной таблицы решенной задачи. Чтобы правильно выписать компоненты оптимального плана двойственной задачи необходимо учесть соответствие между переменными двойственных задач, устанавливаемое для канонических форм, в котором базисным переменным одной задачи отвечают свободные переменные другой и наоборот.

Рассмотрим наш пример.

$$\begin{aligned}
 f = 14x_1 + 10x_2 + 14x_3 + 11x_4 &\rightarrow \max \\
 \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 &= 35, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_6 &= 30, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_7 &= 40. \end{cases} \\
 x_j \geq 0, (j = \overline{1,7})
 \end{aligned}
 \qquad
 \begin{aligned}
 \varphi = 35y_1 + 30y_2 + 40y_3 &\rightarrow \min \\
 \begin{cases} 4y_1 + y_2 + 3y_3 - y_4 &= 14 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 - y_5 &= 10 \\ 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 - y_6 &= 14 \\ 3y_1 + 3y_2 + y_3 - y_7 &= 11 \end{cases} \\
 y_i \geq 0, i = \overline{1,7}
 \end{aligned}$$

Так как исходная задача разрешима, то и двойственная будет иметь оптимальный план, который находится в последней симплексной таблице решенной задачи. Запишем соответствие между переменными задач:

СП	БП
x_1 x_2 x_3 x_4 \updownarrow \updownarrow \updownarrow \updownarrow y_4 y_5 y_6 y_7	x_5 x_6 x_7 \updownarrow \updownarrow \updownarrow y_1 y_2 y_3
БП	СП

Используя данное соответствие из таблицы 6 находим значения двойственных переменных, которые находятся в строке целевой функции под свободными переменными (это $y_1 \sim x_5$, $y_4 \sim x_1$, $y_7 \sim x_4$, $y_2 \sim x_6$), а все остальные переменные двойственной задачи будут равны нулю:

$$\begin{aligned}
 y_1 \sim x_5 &\rightarrow y_1^* = 3; & y_2 \sim x_6 &\rightarrow y_2^* = 4; & y_3 \sim x_7 &\rightarrow y_3^* = 0; \\
 y_4 \sim x_1 &\rightarrow y_4^* = 2; & y_5 \sim x_2 &\rightarrow y_5^* = 0; & y_6 \sim x_3 &\rightarrow y_6^* = 0; \\
 y_7 \sim x_4 &\rightarrow y_7^* = 10.
 \end{aligned}$$

Таким образом можно записать оптимальный план двойственной задачи: $\bar{y} = (3; 4; 0; 2; 0; 0; 10)$, $\phi_{\min} = 225$.

С экономической точки зрения теорема 1 означает, что по оптимальному плану выпуска продукции все затраты внутри производства совпадают с оценкой готовой продукции, произведенной по этому плану, т.е. при оптимальном плане вся стоимость затрат внутри производства поглощается в стоимости готовой продукции. Т.е. затраты равны $35 \cdot 3 + 30 \cdot 4 + 40 \cdot 0 = 225$. Стоимость готовой продукции $14 \cdot 0 + 10 \cdot 5 + 14 \cdot 12,5 + 11 \cdot 0 = 225$.

Отсюда вытекает *первое свойство двойственных оценок*: двойственные оценки y_i ($i = \overline{1; m}$), — являются инструментом балансирования затрат и результатов.

Рассмотрим следствие, вытекающее из первой теоремы, которое представлено в виде второй теоремы двойственности.

Теорема 2 (о дополняющей нежесткости).

Для того, чтобы планы \bar{x}^* и \bar{y}^* пары двойственных задач были оптимальными, необходимо и достаточно выполнение условия:

$$x_j^* \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* - c_j \right) = 0, (j = \overline{1, n}) \quad (5.8.)$$

$$y_i^* \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* - b_i \right) = 0, (i = \overline{1, m}) \quad (5.9.)$$

Условия (5.8.) и (5.9.) называются условиями дополняющей нежесткости. Из них следует, что если какое-либо ограничение одной из задач ее оптимальным планом обращается в строгое неравенство, то соответствующая компонента оптимального плана двойственной задачи должна равняться нулю; если же какая-либо компонента оптимального плана одной из задач положительна, то соответствующее ограничение в двойственной задаче ее оптимальным планом должно обращаться в строгое равенство.

В условиях нашего экономического примера это означает, что если ресурс получил положительную оценку ($y_1 = 3$; $y_2 = 4$), то этот ресурс считается *дефицитным* и весь будет израсходован при реализации оптимального плана. Если же ресурс израсходован не полностью, то его называют *избыточным* и он получит нулевую оценку ($y_3 = 0$). Отсюда следует *вывод* или *второе свойство двойственных оценок*: двойственные оценки могут служить мерой дефицитности ресурсов. Дефицитный ресурс (полностью используемый по оптимальному плану производства) имеет положительную оценку, а ресурс избыточный (используемый не полностью) имеет нулевую оценку. Причем, чем больше положительное значение двойственной переменной, тем дефицитнее ресурс. В нашем примере наиболее дефицитным ресурсом является ресурс P_2 .

Еще можно рассмотреть и другой случай:

$$x_2^* = 5 > 0 \rightarrow 2y_1^* + y_2^* + y_3^* = 2 \cdot 3 + 4 + 1 \cdot 0 = 10 = 10$$

т.е. выпуск по этому виду продукции оправдан.

$$x_1^* = 0 \rightarrow 4y_1^* + y_2^* + 3y_3^* = 4 \cdot 3 + 4 + 3 \cdot 0 = 16 > 14$$

следовательно, затраты выше, чем стоимость готовой продукции и данный вид продукции не выгодно производить.

В условиях нашего экономического примера данные рассуждения интерпретируется так: в оптимальный план войдут только те виды продукции, затраты на которые внутри производства совпадут со стоимостью готовой продукции, и не войдут те виды, затраты на которые превышают стоимость готовой продукции. Таким образом, оценки позволяют оценить целесообразность выпуска тех или иных видов продукции, т.е. являются мерой убыточности при производстве не выгодных видов продукции (это *третье свойство двойственных оценок*).

Пример 5. Проверить целесообразность выпуска продукции P_5 , если удельные затраты ресурсов составляют соответственно 5; 4; 6 условных единиц. Стоимость единицы продукции составляет 25 ден.ед.

Решение. Найдем затраты на производство единицы продукции P_5
 $5y_1^* + 4y_2^* + 6y_3^* = 5 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 6 \cdot 0 = 31$ ден.ед. Сравним со стоимостью готовой продукции: $31 > 25$. Следовательно производство продукта P_5 по такой цене не целесообразно. ■

Теорема 3 (об оценках).

Компоненты оптимального плана двойственной задачи численно равны частным производным от экстремального значения целевой функции по свободным членам ограничения задачи:

$$y_i^* = \frac{\partial f_{\max}}{\partial b_i} \quad (i = \overline{1, m}) \quad (5.10.)$$

Оценки показывают как изменяется экстремальное значение функции в зависимости от изменения правых частей ограничений задачи.

На практике теорема чаще всего используется на языке конечных приращений:

$$y_i^* \approx \frac{\Delta f_{\max}}{\Delta b_i} \quad (i = \overline{1, m}) \quad (5.11.)$$

В такой записи применительно к нашей экономической задаче оценки показывают, на сколько изменится максимальная выручка предприятия, если

запас дефицитного ресурса изменится на единицу. Таким образом, оценки являются мерой влияния ограничений задачи на экстремальное значение целевой функции (*четвертое свойство двойственных оценок*).

Однако, как это свойство, так и все предыдущие остаются справедливыми до тех пор, пока, правые части ограничений задачи меняются в определенных пределах (пределах чувствительности).

В нашем примере видно, что перспективными ресурсами являются ресурсы P_1 и P_2 , т.к. вводя единицу ресурса P_1 в производство дополнительно, мы увеличиваем выручку на 4 денежные единицы.

Пример 6. Предположим, что из производства исключается 2 единицы дефицитного ресурса P_2 . Понятно, что выручка снизится. Какое количество взаимозаменяемого ресурса P_1 следует ввести в производство с тем, чтобы возместить уменьшение выручки.

Решение: Выручка (по третьей теореме двойственности) уменьшится на $2 \cdot y_2^* = 2 \cdot 4 = 8$ ден.ед. Эту же величину необходимо возместить за счет введения первого ресурса, т.е. $8 = \Delta b_1 \cdot y_1^*$. Отсюда легко находим значение Δb_1 . Получаем $\Delta b_1 = 8/3$. $8/3$ единиц первого ресурса заменят недостаток второго. ■

Транспортная задача по критерию стоимости

Ранее был приведен пример *транспортной задачи по критерию стоимости*, которая формулировалась следующим образом.

В m пунктах отправления A_1, A_2, \dots, A_m , которые называются поставщиками, сосредоточено определенное количество единиц некоторого однородного продукта, которое обозначим a_i , ($i = \overline{1, m}$). Данный продукт потребляется в n пунктах B_1, B_2, \dots, B_n , которые будем называть потребителями; объем потребления обозначим b_j , ($j = \overline{1, n}$). Известны расходы на перевозку единицы продукта из пункта A_i в пункт B_j , которые равны C_{ij} и

приведены в матрице транспортных расходов $C = (C_{ij})_{m \times n}$. Требуется составить такой план прикрепления потребителей к поставщикам, при котором весь продукт вывозится из пунктов A_i в пункты B_j в соответствии с потребностью и общая величина транспортных издержек будет минимальной.

Транспортная задача, для которой количество груза, находящегося у поставщиков равно количеству груза, требуемого потребителям, называется *закрытой транспортной задачей*. Т.е. когда выполняется условие $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$

Составим экономико-математическую модель задачи, при условии, что она является закрытой. Обозначим количество продукта, перевозимого из пункта A_i в пункт B_j через x_{ij} . Тогда целевая функция задачи будет иметь вид:

$$f = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (6.1.)$$

Ограничения задачи разобьются на две подсистемы:
от каждого поставщика весь груз должен быть вывезен полностью, т.е.

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, (i = \overline{1, m}) \quad (6.2.)$$

и каждый потребитель должен получить требуемое количество груза

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, (j = \overline{1, n}) \quad (6.3.)$$

по смыслу наших переменных они должны принимать неотрицательные значения, т.е.

$$x_{ij} \geq 0, (i = \overline{1, m}), (j = \overline{1, n}) \quad (6.4.)$$

Необходимым и достаточным условием разрешимости транспортной задачи является *условие баланса*:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \quad (6.5.)$$

Если необходимое и достаточное условие не выполняется, то ограничения (6.2.) или (6.3.) имеют вид неравенств типа «меньше или равно»; транспортная задача в таком случае называется *открытой*. Для решения

открытой транспортной задачи методом потенциалов ее сводят к закрытой задаче путем ввода фиктивного потребителя, если в неравенства превращаются условия (6.2.), или фиктивного поставщика — в случае превращения в неравенства ограничений (6.3.). Причем фиктивного поставщика или фиктивного потребителя вводят на недостающее количество груза для выполнения условия (6.5.).

Транспортная задача, в которой имеет место равенство (6.5.) может быть решена, как задача линейного программирования с помощью симплексного метода. Однако благодаря особенностям переменных задачи и системы ограничений разработаны специальные, менее громоздкие методы ее решения, основанные на операциях сложения и вычитания.

Наиболее применяемым методом решения таких задач является *метод потенциалов*. При котором каждой i -ой строке (i -му поставщику) соответствует потенциал u_i , который можно интерпретировать как оценку продукта в пункте поставщика. А каждому столбцу (j -му потребителю) соответствует потенциал v_j , который можно принять условно за оценку продукта в пункте потребителя. В простейшем случае транспортные расходы на доставку единицы груза равны оценке продукта в пункте потребителя плюс его оценку в пункте поставщика, т.е.

$$c_{ij} = u_i + v_j \quad (6.6.)$$

Алгоритм метода потенциалов для закрытой транспортной задачи детально описан в ряде учебных пособий по математическому программированию. Первым этапом этого алгоритма является составление начального распределения (начального плана перевозок). Реализация этого начального этапа имеет в свою очередь ряд методов: северо-западного угла, наименьшего тарифа, метода Фогеля и др. Вторым этапом служат построение системы потенциалов на основе равенства (6.6.) и проверка начального плана на оптимальность; в случае его неоптимальности переходят к третьему этапу, содержание которого заключается в реализации так

называемых циклов перераспределения (корректировка плана прикрепления потребителей к поставщикам), после чего переходят, опять ко второму этапу. Совокупность процедур третьего и второго этапов образует одну итерацию; эти итерации повторяются, пока план перевозок не окажется оптимальным по критерию.

Чтобы оценить оптимальность распределения, для всех свободных клеток $(i;j)$ матрицы перевозок определяются их *оценки*, которые обозначаем через Δ_{ks} по формуле:

$$\Delta_{ks} = c_{ij} - (u_i + v_j) \quad (6.7.)$$

Если все оценки свободных клеток не отрицательны, то план транспортной задачи минимизации является оптимальным.

Отсутствие нулевой оценки незанятой клетки говорит о том, что оптимальный план является *единственным*. Если же среди оценок присутствуют нулевые оценки, то найденный оптимальный план не является единственным.

Транспортные задачи, в базисном плане перевозок которых имеют место занятые клетки с нулевой поставкой (или в первоначальном распределении, или в процессе итераций), называются *вырожденными*. В случае вырожденной транспортной задачи существует опасность *зацикливания*, т.е. бесконечного повторения итераций (бесконечного перебора одних и тех же базисных комбинаций занятых клеток). Как правило, в практических задачах транспортного типа зацикливание не встречается; тем не менее следует знать, что существуют специальные правила, позволяющие выйти из цикла, если зацикливание все же произойдет. При отсутствии вырождения метод потенциалов конечен и приводит к оптимальному плану перевозок за конечное число шагов.

Рассмотрим решение транспортной задачи на следующем примере.

Пример 7. Заводы № 1,2,3 производят однородную продукцию в количествах соответственно 510, 470 и 490 единиц. Готовая продукция

отправляется в пункты А, В, С, потребности которых соответственно равны 330, 370, и 410 единиц. Стоимости перевозок единицы продукции с заводов в пункты потребления задаются матрицей

$$\begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Составить и решить экономико-математическую модель задачи из условия определения оптимального плана перевозки продукции минимизирующего транспортные издержки.

Решение:

Составим экономико-математическую модель задачи.

Пусть x_{ij} ($i=\overline{1,3}, j=\overline{1,3}$) - количество продукта, перевозимого с завода № i в пункты А, В, С. Тогда целевая функция задачи будет примет вид

$$f = 7x_{11} + 5x_{12} + x_{13} + 3x_{21} + 4x_{22} + 5x_{23} + 4x_{31} + 2x_{32} + 3x_{33} \rightarrow \min \quad (6.8.)$$

Ограничения задачи:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 510 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 470 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 490 \end{cases} \quad (6.9.)$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 330 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 370 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 410 \end{cases} \quad (6.10.)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i=\overline{1,3}, j=\overline{1,3}). \quad (6.11.)$$

Можно видеть, что это задача открытого типа. Поэтому прежде чем приступить к решению, необходимо привести ее к закрытому типу, введя фиктивного потребителя $(510+470+490) > (330+370+410)$. Требуемое количество груза этому потребителю находим как $(510+470+490) - (330+370+410) = 360$. Тарифы на перевозку к фиктивному потребителю будут равны нулю.

Итак, рассмотрим этапы реализации метода потенциалов для закрытой транспортной задачи более подробно. Прежде всего следует отметить, что при условии баланса (6.5.) ранг системы линейных уравнений (6.2.), (6.3.) равен $(m+n-1)$. Таким образом из общего числа $m \cdot n$ переменных базисных будет $(m+n-1)$. Вследствие этого при любом допустимом базисном распределении в матрице перевозок (транспортной таблице) будет занято ровно $(m+n-1)$ клеток, которые будем называть *базисными* в отличие от остальных *свободных* клеток.

Этап 1. Построение начального опорного плана задачи. Рассмотрим два метода получения начального распределения (начального опорного плана): метод северо-западного угла и метод наименьших тарифов. При каждом из этих методов при заполнении некоторой клетки, кроме последней, «закрывается» или только строка или только столбец транспортной таблицы. Лишь при заполнении последней клетки «закрывается» и строка, и столбец. Такой подход будет гарантировать, что базисных клеток будет ровно $(m+n-1)$.

Если при заполнении некоторой (не последней) клетки одновременно удовлетворяются мощности и поставщика и потребителя, то «закрывается», например, только строка, а в соответствующем столбце заполняется незанятая клетка так называемой «нулевой поставкой», после чего «закрывается» и столбец.

При построении методом северо-западного угла всегда в первую очередь заполняется максимально возможной поставкой клетка, стоящая в верхнем левом (северо-западном) углу транспортной таблицы. Затем переходят в рядом стоящую клетку справа или вниз. Пример составления начального распределения данным методом показан в таблице 7. При решении задачи примера 7. Заполняется клетка (1;1) и «закрывается» первый столбец: заполняется клетка (1;2) и «закрывается» первая строка; заполняется клетка (2;2) и «закрывается» второй столбец; заполняется клетка (2;3) и

«закрывается» вторая строка; заполняется клетка (3;3) и «закрывается» третий столбец; наконец, заполняется клетка (3;4) и «закрывается» последние строка и столбец. Число занятых клеток, равно $m+n-1=3+4-1=6$. Суммарные затраты на реализацию данного плана перевозок составят $f_1 = 7*330+5*180+4*190+5*280+3*130+0*360 = 5206$ ден.ед.

Таблица 7

Запасы поставщиков	Спрос потребителей			
	330	370	410	360
510	330 7	180 5	1	0
470	3	190 4	280 5	0
490	4	2	130 3	360 0

Недостатком данного метода является то, что он не учитывает значения тарифов матрицы транспортных расходов в результате чего полученное этим методом начальный опорный план перевозок может быть достаточно далек от оптимального.

В различных модификациях метода наименьших стоимостей (наименьшего тарифа) заполнение клеток матрицы перевозок проводится с учетом значений величин тарифов c_{ij} . Так, по данному методу первой загружают максимально возможной поставкой клетку с самым маленьким тарифом. Затем, следующую по величине тарифа и так далее. При этом из двух клеток с одинаковой стоимостью перевозок предпочтение отдается клетке, через которую осуществляется больший объем перевозок. Вычеркивание строк и столбцов при заполнении клеток проводится по описанным выше правилам. Пример начального распределения методом наименьших стоимостей для тех же исходных данных, что и ранее, представлен в табл. 8.

Порядок заполнения клеток: (1;3), (1;2), (3;3), (3;1), (2;1), (2;4).

Таблица 8

Запасы поставщиков	Спрос потребителей			
	330	370	410	360
510	7 100	5 410	1 0	
470	3 110	4 360	5 0	
490	4 220	2 270	3 0	

Суммарные затраты на перевозки, представленные в таблице 8, составляют

$$f_2 = 100 \cdot 5 + 410 \cdot 1 + 110 \cdot 3 + 220 \cdot 4 + 270 \cdot 2 = 2660 \text{ (ден.ед.)}.$$

Так как значение $f_1 > f_2$, то данный план перевозок значительно ближе к оптимальному, чем план, составленный по методу северо-западного угла.

Этап 2. Проверка оптимальности полученного плана перевозок. Введем специальные показатели u_i для каждой строки матрицы перевозок (каждого поставщика), где $i = \overline{1, m}$ и показатели v_j для каждого столбца (каждого потребителя), где $j = \overline{1, n}$. Эти показатели называются *потенциалами* поставщиков и потребителей, их удобно интерпретировать как цены продукта в соответствующих пунктах поставщиков и потребителей. Потенциалы подбираются таким образом, чтобы для заполненной клетки $(i; j)$ выполнялось равенство (6.6.). Совокупность уравнений вида (6.6.), составленных для всех заполненных клеток (всех базисных неизвестных), образует систему $(m+n-1)$ линейных уравнений с $m+n$ неизвестными u_i и v_j . Эта система всегда совместна, причем значение одного из неизвестных можно задавать произвольно (например, $u_1 = 0$), тогда значения остальных неизвестных находятся из системы однозначно.

Рассмотрим процесс нахождения потенциалов для базисного начального распределения по методу наименьшего тарифа, представленного в таблице 8. Используя формулу (6.6.) для заполненных клеток получаем систему линейных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 + v_2 = 5; \\ u_1 + v_3 = 1; \\ u_2 + v_1 = 3; \\ u_2 + v_4 = 0; \\ u_3 + v_1 = 4; \\ u_3 + v_2 = 2; \end{array} \right. \quad (6.12.)$$

Задав $u_1 = 0$ находим (по заполненной клетке (1;2)) из первого уравнения $v_2 = 5$, из второго уравнения $v_3 = 1$ (по заполненной клетке (1;3)). Зная v_2 находим $u_3 = -3$, а зная u_3 по заполненной клетке (3;1) находим $v_1 = 7$. Зная v_1 , по заполненной клетке (2;1) находим $u_2 = -4$, а затем по заполненной клетке (2;4) находим $v_4 = 4$. Результаты представлены в табл. 9, где потенциалы поставщиков приведены в последнем столбце, а потенциалы потребителей — в последней строке.

Таблица 9.

Запасы поставщиков	Спрос потребителей				u_i
	330	370	410	360	
510	7	100 (-) 5	410 1	(+); 0	0
470	110 (+); 3		5	360 (-) 0	-4
490	220 (-) 4	270 (+) 2	3	0	-3
v_j	7	5	1	4	

Чтобы оценить оптимальность распределения, для всех свободных клеток $(i;j)$ матрицы перевозок определяются их *оценки*, которые обозначим через Δ_{ks} по формуле: $\Delta_{ks} = c_{ij} - (u_i + v_j)$

Очевидно, оценки заполненных клеток равны нулю. Таким образом, об оптимальности распределения можно судить по величинам оценок свободных клеток. Если оценка некоторой свободной клетки отрицательна, то это можно интерпретировать так: если бы эта клетка была занята, то можно было бы получить дополнительный экономический эффект. Следовательно, *условием оптимальности распределения служит условие неотрицательности оценок свободных клеток матрицы перевозок.*

$$\Delta_{ks} = c_{ij} - (u_i + v_j) \geq 0 \quad (6.13.)$$

Оценки клеток по формуле (6.7.) удобно представить, для ранее рассматриваемого распределения, полученного методом наименьшего тарифа (таблица 9.), оценки клеток имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= 7 - (0+7) = 0; & \Delta_{14} &= 0 - (0+4) = -4; \\ \Delta_{22} &= 4 - (-4+5) = 3; & \Delta_{23} &= 5 - (-4+1) = 8; \\ \Delta_{33} &= 3 - (-3+1) = 5; & \Delta_{34} &= 0 - (-3+4) = -1. \end{aligned} \quad (6.14.)$$

Так как не все оценки неотрицательны, то и этот план не является оптимальным, т.е. имеется возможность улучшить данный план перевозок.

Этап 3. Улучшение неоптимального плана перевозок. Чтобы улучшить неоптимальный план перевозок, выбирается *перспективная клетка* матрицы перевозок с отрицательной оценкой; если таких клеток несколько, то обычно выбирается клетка с наибольшей по абсолютной величине отрицательной оценкой. Например, для распределения, представленного в табл. 9, такой клеткой может служить клетка (1;4) (смотрите оценки свободных клеток (6.14.)).

Для выбранной перспективной клетки строится замкнутая линия (*цикл*), начальная вершина которой лежит в выбранной клетке, а все остальные вершины находятся в занятых клетках; при этом направления отдельных отрезков контура могут быть только горизонтальными и вертикальными. Вершиной контура, кроме первой, является занятая клетка, где отрезки контура образуют один прямой угол (нельзя рассматривать как вершины клетки, где горизонтальные и вертикальные отрезки контура

пересекаются). Очевидно, число отрезков контура, как и его вершин, будет четным. В вершинах контура расставляются поочередно знаки "+" и "-", начиная со знака "+" в выбранной свободной клетке. Пример контура показан пунктиром в табл. 9, хотя вид контура может быть самым разнообразным.

Величина перераспределяемой поставки определяется как наименьшая из величин поставок в вершинах контура со знаком "-", и на эту величину увеличиваются поставки в вершинах со знаком "+" и уменьшаются поставки в вершинах со знаком "-". Это правило гарантирует, что в вершинах контура не появятся отрицательных поставок, начальная выбранная клетка окажется занятой, в то время как одна из занятых клеток при этом обязательно освободится. Если величина перераспределяемой поставки равна поставкам не в одной, а в нескольких вершинах контура со знаком "-", то освобождается только одна клетка, обычно с наибольшей стоимостью перевозки, а все другие такие клетки остаются занятыми нулевой поставкой.

Результат указанных операций для представленного в табл. 9 распределения поставок показан в таблице 10. Суммарные затраты на перевозки по этому плану составляют

$f_3 = 410 \cdot 1 + 210 \cdot 3 + 120 \cdot 4 + 370 \cdot 2 = 2260$, что значительно меньше предыдущей суммы затрат 2660. Хотя план перевозок в таблице 10 еще не является оптимальным. Об этом свидетельствует наличие отрицательных значений оценок свободных клеток этого плана (соответствующие потенциалы u_i и v_j , найдены способом, изложенным при описании этапа 2):

Таблица 10

Запасы поставщиков	Спрос потребителей				u_i
	330	370	410	360	
510	7	5	410 1	100 0	0
470	210 (+) 3	4	5	260 (-) 0	0
490	120 (-) 4	370 2	3	(+) 0	1
v_j	3	1	1	0	

$$\begin{aligned}
\Delta_{11} &= 7 - (0+3) = 4; & \Delta_{12} &= 5 - (0+1) = 4; \\
\Delta_{22} &= 4 - (0+1) = 3; & \Delta_{23} &= 5 - (0+1) = 4; & (6.15.) \\
\Delta_{33} &= 3 - (1+1) = 1; & \Delta_{34} &= 0 - (1+0) = -1.
\end{aligned}$$

Построим контур перераспределения для клетки (3; 4); в таблице 10 он показан пунктиром и его вершинам присвоены соответствующие знаки. Наименьшая поставка в вершине контура со знаком "-" равна 120, поэтому проведя перераспределение поставок мы получим новый план, который представлен в таблице 11; соответствующие значения потенциалов показаны в последних столбце и строке.

Таблица 11

Запасы поставщиков	Спрос потребителей				u_i
	330	370	410	360	
510	7	5	410 1	100 0	0
470	330 3	4	5	140 0	0
490	4	370 2	3	120 0	0
v_i	3	2	1	0	

$$\begin{aligned}
\Delta_{11} &= 7 - (0+3) = 4; & \Delta_{12} &= 5 - (0+2) = 3; \\
\Delta_{22} &= 4 - (0+2) = 2; & \Delta_{23} &= 5 - (0+1) = 4; & (6.16.) \\
\Delta_{31} &= 4 - (0+3) = 1; & \Delta_{33} &= 3 - (0+1) = 2.
\end{aligned}$$

Данный план является оптимальным, так как среди оценок свободных клеток нет отрицательных. Стоимость перевозок по этому плану равна

$$f_4 = 410 \cdot 1 + 330 \cdot 3 + 370 \cdot 2 = 2140 \text{ (ден.ед.)}$$

Выпишем оптимальный план из последней транспортной таблицы:

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 410 \\ 330 & 0 & 0 \\ 0 & 370 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.17)$$

Мы уже знаем, что значение целевой функции равно 2140 ден.ед. Значения в столбце фиктивного потребителя говорят о том, что на первом, втором и третьем заводах останется нераспределенным соответственно по

100, 140 и 120 единиц груза. Отсутствие нулевой оценки незанятой клетки говорит о том, что оптимальный план является единственным. ■

Метод динамического программирования

Метод динамического программирования – это инструмент, позволяющий быстро находить оптимальное решение в задачах математического программирования с дискретным множеством допустимых решений, т.е. в ситуациях, когда имеется некоторое количество различных вариантов поведения, приносящих различные результаты, среди которых необходимо выбрать наилучший. Любая задача такого рода может быть решена путем перебора всех возможных вариантов и выбора среди них наилучшего. Однако часто такой перебор очень затруднителен. В этих случаях процесс принятия оптимального решения может быть разбит на шаги и исследован методом динамического программирования. В основе вычислительных алгоритмов динамического программирования лежит следующий принцип оптимальности, сформулированный Р. Беллманом.

Принцип оптимальности.

Оптимальное поведение обладает тем свойством, что каковы бы ни были начальное состояние и начальное решение, последующие решения должны быть оптимальными относительно состояния, полученного в результате первоначального решения.

Пусть процесс оптимизации разбит на n шагов. На каждом шаге необходимо определить два типа переменных – переменную состояния s и переменную управления или решения x . Переменная s определяет, в каких состояниях может оказаться система на данном k -ом шаге. В зависимости от s на этом шаге можно применить некоторые решения, которые характеризуются переменной x_k . Применение решения x на k -ом шаге приносит некоторый результат $u_k(s, x_k)$ и переводит систему в некоторое состояние $s'(s, x_k)$. Для каждого возможного состояния на k -ом шаге среди

всех возможных решений выбирается оптимальное решение x_k^* , такое, чтобы результат, который достигается за шаги с k -ого по n -ый оказался оптимальным. Числовая характеристика этого результата называется функцией Беллмана $f_k(s)$ и зависит от номера шага k и состояния системы s .

Итак решение задачи распадается на два этапа. На первом этапе, он называется условной оптимизацией, отыскивается функция Беллмана и оптимальные решения для всех возможных состояний на каждом шаге, начиная с последнего. На последнем, n -ом шаге найти оптимальное решение x_n^* и значение функции Беллмана $f_n(s)$ совсем не сложно ($f_n(s) = \text{optimum}\{u_n(s, x_n)\}$, где *optimum* (это максимум или минимум) ищется по всем возможным значениям x_n). Дальнейшие же вычисления производятся согласно уравнению Беллмана – рекуррентному уравнению, связывающему функцию Беллмана на каждом шаге с функцией Беллмана, вычисленной на предыдущем шаге. В общем виде это уравнение имеет вид

$$F_k(s) = \text{optimum} \{u_k(s, x_k) + f_{k+1}(s'(s, x_k))\}$$

Этот максимум или минимум отыскивается по всем возможным для данных k и s значениям переменной решения x_k .

После того, как функция Беллмана и соответствующие оптимальные решения найдены для всех шагов с n -ого по первый, производится второй этап решения задачи, который называется безусловной оптимизацией. Пользуясь тем, что на первом шаге ($k=1$) состояние системы нам известно – это ее начальное состояние s_0 – можно найти оптимальный результат за все n шагов (это $f_1(s_0)$) и, кроме того, оптимальное решение на первом шаге x_1^* , которое этот результат доставляет. После применения этого решения система перейдет в некоторое новое состояние $s'(s, x_1^*)$, зная которое можно, пользуясь результатами, полученными на этапе условной оптимизации, найти оптимальное решение на втором шаге x_2^* , и так далее вплоть до n -ого шага.

Описанная вычислительная схема метода динамического программирования станет понятной, когда мы разберем конкретный числовой пример с экономическим содержанием.

Пример 8. Пусть имеются четыре предприятия, между которыми распределяется 100 тыс. ден. ед. (инвестирование предприятий). Денежные средства распределяются суммами кратными 20 тыс. ден. ед. Значения $g_i(x)(i = \overline{1,4})$ прибыли предприятия в зависимости от выделенной суммы x приведены в таблице 12. Составить план распределения средств, максимизирующий общий прирост выпуска продукции.

Таблица 12

Средства x , тыс. ден. ед.	Предприятие			
	№1	№2	№3	№4
	Прирост выпуска продукции на предприятиях, $g_i(x)$, тыс. ден. ед.			
	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	$g_4(x)$
20	10	12	11	16
40	31	26	36	37
60	42	36	45	46
80	62	54	60	63
100	76	78	77	80

Решение:

I этап. Условная оптимизация.

Очевидно, что данная задача может быть решена просто перебором всех возможных вариантов распределения 100 тыс.ден.ед. по 4 предприятиям (всевозможных вариантов в данном примере не так уж и много). Однако попытаемся решить её более эффективным способом. Разобьём процесс оптимизации на 4 шага, и будем на каждом k -ом шаге оптимизировать инвестирование не всех предприятий сразу, а только предприятий с k -ого по 4-ое. При этом, естественно, будем считать, что в остальные предприятия (с 1-ого по $(k-1)$ -ое) тоже вкладываются некоторые средства, и потому на инвестирование предприятий с k -ого по 4-ое остаются не все средства, а

некоторая сумма $c_k \leq 100$ тыс.ден.ед. Эта величина и будет являться переменной состояния системы. Переменной управления на k -ом шаге назовем величину x_k средств, вкладываемых в k -ое предприятие. В качестве функционального уравнения Беллмана $f_k(c_k)$ на k -ом шаге в этой задаче можно выбрать максимально возможную прибыль, которую можно получить с предприятий с k -ого по 4-ое при условии, что на их инвестирование осталось c_k средств. Очевидно, что при вложении в k -ое предприятие x_k средств, мы получим прибыль $g_k(x_k)$, а система к $(k+1)$ -ому шагу перейдет в состояние $c_{k+1} = c_k - x_k$, т.е. на инвестирование предприятий с $(k+1)$ -ого до 4-ого останется c_{k+1} средств.

Итак, на первом шаге условной оптимизации при $k=4$ функция Беллмана представляет собой не что иное, как прибыль только с 4-ого предприятия. При этом на его инвестирование может остаться количество средств c_k , $0 \leq c_k \leq 100$ тыс.ден.ед. (в дальнейшем просто 100) Очевидно, чтобы получить максимум прибыли с последнего предприятия, надо вложить в него все эти средства, т.е. $f_4(c_4) = g_4(c_4)$, $x_k^* = c_k$.

Таблица 13

$x_4 \backslash c_4$	0	20	40	60	80	100	$f_4(c_4)$	x_4^*
0	0	-	-	-	-	-	0	0
20	-	16	-	-	-	-	16	20
40	-	-	37	-	-	-	37	40
60	-	-	-	46	-	-	46	60
80	-	-	-	-	63	-	63	80
100	-	-	-	-	-	80	80	100

На каждом из последующих шагов для вычисления функции Беллмана приходится использовать результаты, полученные на предыдущем шаге. Пусть на втором шаге для инвестирования предприятия с третьего по четвертое осталось c_3 средств ($0 \leq c_3 \leq 100$). Тогда от вложения в третье предприятие x_3 средств будет получена прибыль $g_3(x_3)$, а на инвестирование четвертого предприятия останется $c_{3+1} = c_4 = c_3 - x_3$ средств. Максимально возможная прибыль, которая может быть получена с этих двух предприятий будет равна $f_3(c_3) = \max_{x_3 \leq c_3} \{g_3(x_3) + f_4(c_3 - x_3)\}$

Таблица 14

$\begin{matrix} x_3 \\ c_3 \end{matrix}$	0	20	40	60	80	100	$f_3^*(c_3)$	x_3^*
0	0+0	-	-	-	-	-	0	0
20	0+16	11+0	-	-	-	-	16	0
40	0+37	11+16	36+0	-	-	-	37	0
60	0+46	11+37	36+16	45+0	-	-	52	40
80	0+63	11+46	36+37	45+16	60+0	-	73	40
100	0+80	11+63	36+46	45+37	60+16	77+0	82	40, 60

Максимум этого выражения $f_3^*(c_3)$ достигается при некотором значении x_3^* , которое и является оптимальным решением на втором шаге для состояния системы c_3 .

На третьем шаге для инвестирования предприятия со второго по четвертое осталось c_2 средств ($0 \leq c_2 \leq 100$). Тогда от вложения во второе предприятие x_2 средств будет получена прибыль $g_2(x_2)$, а на инвестирование третьего и четвертого предприятий вместе останется $c_{2+1} = c_3 = c_2 - x_2$ средств. Максимально возможная прибыль, которая может быть получена с этих трех предприятий будет равна $f_2(c_2) = \max_{x_2 \leq c_2} \{g_2(x_2) + f_3(c_2 - x_2)\}$

Таблица 15

$\begin{matrix} x_2 \\ c_2 \end{matrix}$								
--	--	--	--	--	--	--	--	--

$c_2 \backslash$	0	20	40	60	80	100	$f_2^*(c_2)$	x_2^*
0	0+0	-	-	-	-	-	0	0
20	0+16	12+0	-	-	-	-	16	0
40	0+37	12+16	26+0	-	-	-	37	0
60	0+52	12+37	26+16	36+0	-	-	52	0
80	0+73	12+52	26+37	36+16	54+0	-	73	0
100	0+82	12+73	26+52	36+37	54+16	78+0	85	20

Максимум этого выражения $f_2^*(c_2)$ достигается на некотором значении x_2^* , которое и является оптимальным решением на третьем шаге для состояния системы c_2 .

И, наконец, четвертый шаг. Для инвестирования предприятия с первого по четвертое осталось c_1 средств ($0 \leq c_1 \leq 100$). Тогда от вложения в первое предприятие x_1 средств будет получена прибыль $g_1(x_1)$, а на инвестирование со второго по четвертое предприятий вместе останется $c_{1+1} = c_2 = c_1 - x_1$ средств. Максимально возможная прибыль, которая может быть получена с этих предприятий будет равна $f_1(c_1) = \max_{x_1 \leq c_1} \{g_1(x_1) + f_2(c_1 - x_1)\}$

Таблица 16

$c_1 \backslash x_1$	0	20	40	60	80	100	$f_1^*(c_1)$	x_1^*
0	0+0	-	-	-	-	-	0	0
20	0+16	10+0	-	-	-	-	16	0
40	0+37	10+16	31+0	-	-	-	37	0
60	0+52	10+37	31+16	42+0	-	-	52	0
80	0+73	10+52	31+37	42+16	62+0	-	73	0
100	0+85	10+73	31+52	42+37	62+16	76+0	85	0

Максимум этого выражения $f_1^*(c_1)$ достигается на некотором значении x_1^* , которое и является оптимальным решением на третьем шаге для состояния системы c_1 .

II этап. Безусловная оптимизация. Мы распределяем 100 тыс. ден.ед., т.е. 1-ый шаг: $c_1 = 100$, $F(100) = f_1^*(100) = 85$ тыс. ден.ед. при $x_1^* = 0$.

2-ой шаг: $c_2 = c_1 - x_1^* = 100 - 0 = 100$, из таблицы 15 можем найти, что $x_2^* = 20$.

3-ий шаг: $c_3 = c_2 - x_2^* = 100 - 20 = 80$, из таблицы 14 находим, что $x_3^* = 40$.

4-ый шаг: $c_4 = c_3 - x_3^* = 80 - 40 = 40$, из таблицы 13 видим, что $x_4^* = 40$.

Итак, оптимальный план инвестирования четырех предприятий $\overline{X^*} = (0; 20; 40; 40)$ принесет прибыль равную $f_1^*(100) = 85$ тыс. ден.ед. Т.е. для получения возможно большей прибыли равной 85 тыс. ден.ед. второму предприятию необходимо выделить из общей суммы 20 тыс. ден.ед., третьему и четвертому по 40 тыс. ден.ед., а первое предприятие инвестиции не получает. ■