МИНИСТЕРСТВО ЦИФРОВОГО РАЗВИТИЯ, СВЯЗИ
И МАССОВЫХ КОММУНИКАЦИЙ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Ордена Трудового Красного Знамени федеральное государственное
бюджетное образовательное учреждение высшего образования
Московский технический университет связи и информатики

Кафедра теории вероятностей и прикладной математики

Учебно-методическое пособие
по курсу

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

для студентов-заочников 2 курса
(направления: 15.03.04, 27.03.04)
4 семестр

Москва 2022

План УМД на 2021/22 уч.г.

Учебно-методическое пособие

по курсу

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Составитель: К.Н. Панков, к.ф.-м.н

Издание утверждено на заседании кафедры. Протокол № _ от __.__.20   г.

Рецензент Д.Б. Демин, доцент

ВВЕДЕНИЕ

Студенты-заочники второго курса технических факультетов МТУСИ в течение четвертого семестра изучают математическую дисциплину:

«Теория вероятностей и математическая статистика».

По этому курсу выполняется контрольная работа и сдается экзамен, допуск к которому осуществляется по результатам самостоятельной работы и на основании выполненной контрольной работы.

Целью преподавания данной дисциплины является задача познакомить обучающихся с основными понятиями, аксиомами, теоремами и методами теории вероятностей и математической статистики и научить подбирать и строить подходящие вероятностные модели для описания случайных явлений в их профессиональной деятельности.

Рассматриваются основные понятия, теоремы и методы теории вероятностей, способы нахождения вероятностей. Приводятся основные виды распределений случайных величин и решаются задачи на нахождение основных вероятностных характеристик произвольных случайных величин. Объясняется смысл предельных теорем на конкретных примерах. Проводится анализ данных методами математической статистики, показываются способы вычисления эмпирических характеристик и различных видов оценок неизвестных параметров распределений генеральной совокупности. Рассматриваются задачи проверки гипотез о параметрах и виде распределений, из которых были получены выборки.

Пособие не заменяет учебников по теории вероятностей и математической статистике. Оно содержит разъяснения о порядке изучения программного материала; в нем кратко освещены отдельные вопросы, которые могут встретить затруднение при самостоятельном изучении, и приведены методы решения некоторых типовых задач. Изучать курс следует по литературе, перечисленной в настоящем учебно-методическом пособии.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ И ПОДСЧЕТ ИХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Алгебра событий. Вероятностное пространство. Свойства вероятности. Непосредственный подсчет вероятности. Комбинаторные правила в классической вероятностной схеме. Геометрические вероятности. Условные вероятности. Вероятностные цепочки. Формулы полной вероятности и Байеса. Схема испытаний Бернулли. Формула Бернулли. Полиномиальная схема. Приближенные формулы Пуассона и Муавра-Лапласа.

2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Случайные величины. Функция и плотность распределения вероятностей, их свойства. Числовые характеристики случайных величин. Свойства числовых характеристик. Дискретные распределения: вырожденное, биномиальное, геометрическое, гипергеометрическое, Пуассона. Непрерывные распределения: равномерное, показательное. Нормальное (гауссовское) распределение. Функции от случайных величин. Свойства числовых характеристик функций случайных величин.

3. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

Сходимость по вероятности. Неравенства Чебышева. Закон больших чисел. Характеристические функции. Центральная предельная теорема. Оценка вероятностей при помощи неравенств Чебышева. Проверка условий применимости центральной предельной теоремы.

4. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Выборочные методы математической статистики. Точечное оценивание. Интервальное оценивание. Основы проверки статистических гипотез.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная:

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам.

Дополнительная:

2. Бернгардт, А. С. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике : учебное пособие / А. С. Бернгардт, А. С. Чумаков, В. А. Громов. — 2-е изд. — Томск : Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2014. — 160 c. — ISBN 2227-8397. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/72178.html

3. Блатов, И. А. Теория вероятностей и математическая статистика : учебное пособие / И. А. Блатов, О. В. Старожилова. — Самара : Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, 2017. — 276 с. — ISBN 2227-8397. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/75412.html
4. Макусева, Т. Г. Основные теоремы теории вероятностей : учебно-методическое пособие / Т. Г. Макусева, О. В. Шемелова. — Саратов : Ай Пи Эр Медиа, 2018. — 168 с. — ISBN 978-5-4486-0043-2. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/70773.html
5. .

ТЕМАТИКА ЛЕКЦИЙ

1. Алгебра событий. Вероятностное пространство. Свойства вероятности. Условные вероятности. Формулы полной вероятности и Байеса. Схема испытаний Бернулли. Полиномиальная схема. Приближенные формулы Пуассона и Муавра-Лапласа..
2. Случайные величины. Функция и плотность распределения вероятностей, их свойства. Числовые характеристики случайных величин. Свойства числовых характеристик. Дискретные распределения: вырожденное, биномиальное, геометрическое, гипергеометрическое, Пуассона. Непрерывные распределения: равномерное, показательное. Нормальное (гауссовское) распределение.
3. Сходимость по вероятности. Неравенства Чебышева. Закон больших чисел. Характеристические функции. Центральная предельная теорема. Оценка вероятностей при помощи неравенств Чебышева. Проверка условий применимости центральной предельной теоремы.

ТЕМАТИКА УПРАЖНЕНИЙ

1. Алгебра событий. Вероятностное пространство. Свойства вероятности. Непосредственный подсчет вероятности. Комбинаторные правила в классической вероятностной схеме. Геометрические вероятности. Условные вероятности. Вероятностные цепочки. Формулы полной вероятности и Байеса. Схема испытаний Бернулли. Формула Бернулли. Полиномиальная схема. Приближенные формулы Пуассона и Муавра-Лапласа.
2. Случайные величины. Функция и плотность распределения вероятностей, их свойства. Числовые характеристики случайных величин. Свойства числовых характеристик. Дискретные распределения: вырожденное, биномиальное, геометрическое, гипергеометрическое, Пуассона. Непрерывные распределения: равномерное, показательное. Нормальное (гауссовское) распределениеФункции от случайных величин. Свойства числовых характеристик функций случайных величин.

3. Выборочные методы математической статистики. Точечное оценивание. Интервальное оценивание. Основы проверки статистических гипотез.

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

1. Самостоятельная работа над учебником

Самостоятельная работа над учебником является основным видом работы студента-заочника.

В самостоятельной работе следует руководствоваться следующими положениями.

1. Изучать курс теории вероятностей и математической статистики следует систематически в течение всего учебного процесса. Изучение в сжатые сроки перед экзаменом не дает глубоких и прочных знаний.

2. Все выкладки и вычисления необходимо проделывать на бумаге. Чтение учебного пособия следует сопровождать изучением конспекта, в котором записываются определения основных понятий курса, формулы, теоремы, а также воспроизводятся соответствующие чертежи и графики. На полях конспекта следует отмечать вопросы, выделенные студентом для консультации с преподавателем.

3. Работая по основному учебнику, рекомендованному в настоящем пособии, студент должен обращаться к указанной дополнительной литературе. Это необходимо в тех случаях, когда основной учебник не дает полного ответа на некоторые вопросы программы.

2. Решение задач

Приступая к решению задач, следует после изучения очередного раздела по учебнику внимательно рассмотреть примеры решения типовых задач по данному пособию, а затем переходить к самостоятельному решению рекомендованных задач. Решение следует сопровождать краткими, но исчерпывающими пояснениями. Решение каждой задачи должно доводиться до окончательного ответа и по возможности приводиться в общем виде.

Числовые данные подставляются в формулу в конце решения задачи. В промежуточные вычисления не следует вводить приближенные значения корней, числа π и т.д.

3. Выбор варианта

1. Если две последние цифры студенческого билета образуют число, меньше 50, то номер варианта совпадает с этим числом.

Например, если номер студенческого билета ЗБУТ20042, то номер варианта 42.

2. Если две последние цифры студенческого билета образуют число больше или равное 50, то для получения номера варианта из этого числа надо вычесть 50.

Например, если номер студенческого билета ЗБУТ20098, то номер варианта 98-50=48.

4. Выполнение контрольных работ

При выполнении контрольных работ студент должен руководствоваться следующим.

1. Не следует приступать к выполнению контрольных работ до изучения соответствующего теоретического материала.
2. Контрольные работы выполняются по учебно-методическому пособию одного года издания. Замена издания другим в процессе изучения курса высшей математики не допускается.
3. Контрольная работа выполняется в обычной ученической тетради или в отдельном файле. Она должна быть аккуратно и четко написана. Для замечаний преподавателей на каждой странице оставляются поля шириной 3…4 см. Все страницы нумеруются.
4. Решения задач в контрольных работах сопровождается исчерпывающими, но краткими объяснениями. Задачи располагаются в порядке номеров, указанных в заданиях; перед решением задачи выписывается полностью ее условие.
5. На рецензию на адрес

pankov_proverka@mail.ru

одновременно высылается не более одной работы (скан тетради или файл работы в **pdf-формате**). Файл контрольной должен быть один.

Файл должен иметь название:

ТВиМС – Номер группы – Фамилия, имя, отчество (или фамилия и инициалы) студента.pdf

6. По получении из института рецензии на работу студент обязан выполнить указания, сделанные рецензентом. В случае, если контрольная работа не зачтена, студент обязан в этой же тетради или файле (после заключения рецензента) внести все исправления, решить заново задачи, указанные рецензентом, и представить работу на повторную рецензию.
7. Контрольная работа выполняется самостоятельно.
8. Контрольная работа подписывается с указанием даты выполнения.
9. Контрольные работы, выполненные без соблюдения изложенных выше правил или по чужому варианту, не рецензируются и считаются не выполненными.

5. Сдача экзаменов

К сдаче экзаменов допускаются студенты, имеющие выполненные и зачтенные контрольные работы. Экзамены сдаются устно или согласно регламенту проведения, утвержденному в МТУСИ.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО РАЗДЕЛАМ КУРСА

1. ВВЕДЕНИЕ

Наша задача - рассмотреть некоторые элементы теории множеств, комбинаторики и теории меры в практическом приложении к теории вероятностей.

Теория множеств

Существует строгая (аксиоматическая) теория множеств. Мы будем пользоваться так называемой *наивной теорией множеств*, автором которой является Кантор. В этой теории основные понятия – элемент; множество; принадлежность элемента множеству; свойства, которыми элемент обладает или не обладает - вводятся не аксиоматически, а считаются понятными в силу здравого смысла. Это интуитивное понимание вырабатывается у человека на основе многочисленных примеров из личного опыта. *Постулатами наивной теории множеств* являются следующие основные принципы:

1. множество однозначно определяется набором составляющих его элементов;
2. множество может состоять из любых различных элементов;
3. любое свойство определяет множество объектов, которые обладают данным свойством.

В математическом анализе уже был введен язык записи высказываний, а также кванторы $\forall$ (для любого), $\exists$ (существует), обозначение принадлежности $\in$, логические «И» $\wedge$, «ИЛИ» $\vee$, «следует» $\Rightarrow$, «тогда и только тогда» $\Leftrightarrow$.

Существует два способа задания множества:

1. перечислением элементов: $A=\{a_1,\dots,a_n\}$.
2. описанием с помощью свойства: $A=\{x\in X : x\sim G(A)\}$, где запись $x\sim G(A)$ означает, что элемент x обладает свойством, задающим множество A.

Определение. Множество, не содержащее элементов, называется *пустым* и обозначается $\varnothing$.

Определение. Множество A является *подмножеством* U, если $\forall x\in A\Rightarrow x\in U$, и это обозначается как $A\subset U$.

Определение. Множества A и B называют *равными* $(A=B)$, если $A\subset B$ и $B\subset A$, или, иначе говоря, если они состоят из одних и тех же элементов.

Определение. *Разностью двух множеств A и B* называют множество

$$A\setminus B=\{x:(x\in A)\wedge(x\notin B)\}.$$

Определение. *Объединением двух множеств A и B* называют множество

$$A\cup B=\{x:(x\in A)\vee(x\in B)\}.$$

Определение. *Пересечением двух множеств A и B* называют множество $A \cap B = \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$.

Определение. Если $A \subset U$, то *дополнением к множеству A в множестве U* называется множество $\overline{A} = U \setminus A$.

Любое наше взаимодействие с окружающей средой и другими людьми можно рассматривать как эксперимент с теми или иными исходами. Следует различать *детерминированный* эксперимент - результат которого можно заранее и обдуманно предсказать, и *случайный* эксперимент - тот, результат которого заранее, вообще говоря, предсказать нельзя.

<u>Пример.</u> Результат бросания монеты, игральной кости.

Определение. Множество всех возможных исходов ω (омега малое) случайного эксперимента называется *пространством элементарных событий* и обозначается Ω (омега большое); возможные исходы эксперимента - ω, лежащие в пространстве элементарных событий, $\omega \in \Omega$, называют *элементарными событиями* или *элементарными исходами.*

В одном и том же эксперименте пространство элементарных событий Ω мы можем выбрать по-разному, в зависимости от решаемой задачи. Пространство элементарных событий определено в общем случае неоднозначно.

<u>Пример.</u> При броске игрального кубика пространство элементарных событий можно выбрать и как $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, и как $\Omega = \{even, odd\}$, где $even$ - выпадение четной грани кубика, а odd - нечетной.

Определение. Пространство элементарных событий Ω называется *дискретным*, если оно не более, чем счетно (конечно или счетно).

<u>Примеры.</u> 1. Эксперимент заключается в бросании монеты до появления первой решки. $\Omega = \{\text{Р}, \text{ГР}, \text{ГГР}, \text{ГГГР} \ldots \varpi\}$, где ϖ - случай, когда решка вообще не появится, - пример дискретного пространства элементарных событий.

2. Эксперимент заключается в том, что в единичном круге на декартовой плоскости наугад выбирается точка. Тогда $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1\}$ - пример не дискретного пространства элементарных событий.

Определение. Класс K подмножеств Ω называется *алгеброй*, если выполняются следующие условия:

1. $\Omega \in K$.
2. $A \in K \Rightarrow \overline{A} \in K$.
3. $A \in K, B \in K \Rightarrow A \cup B \in K$.

<u>Примеры.</u> 1. $K = \{\varnothing, \Omega\}$ - алгебра (требуется доказать самостоятельно.)

2. Если $A \in \Omega$ - непустое событие, $A \ne \Omega$, то можно рассмотреть класс $K = \{\varnothing, A, \overline{A}, \Omega\}$. Докажите самостоятельно, что это алгебра.

Утверждение. *Если K- алгебра, то если* $A \in K$, $B \in K$ *то* $A \cap B \in K$, $A \setminus B \in K$.

Докажите это утверждение самостоятельно.

Определение. Алгебра $\mathfrak{A}$ (а готическое) называется σ*-алгеброй* (сигма-алгеброй), если для любых $A_i \in \Omega$, $i \in \mathbb{N}$, выполнено условие $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in K$.

<u>Пример.</u> Пусть Ω - пространство элементарных событий. Тогда $\mathfrak{P}(\Omega)$ (пэ готическое) множество всех подмножеств множества Ω - σ-алгебра.

Определение. Пару $(\Omega, \mathfrak{A})$, где $\mathfrak{A}$ - алгебра или σ-алгебра, называют *измеримым пространством.*

Определение. Пусть нам дан элемент σ-алгебры $A \in \mathfrak{A}$, $A \subset \Omega$. Тогда A называется *случайным событием*.

В математическом анализе A называется измеримым множеством.

<u>Пример.</u> Рассмотрим бросание игрального кубика. Пусть

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$.

Тогда $A = \{1,3,5\} \in \mathfrak{A}$ - случайное событие, состоящее в выпадении нечетной грани, $B = \{5,6\} \in \mathfrak{A}$ - случайное событие, состоящее в выпадении грани, большей четырех.

Определение. Пусть $A \in \mathfrak{A}$ - случайное событие. Говорят, что *событие A наступило* или *произошло в результате эксперимента*, если эксперимент завершился элементарным событием ω, принадлежащим A, т.е. $\omega \in A$.

<u>Пример.</u> Пусть в условиях предыдущего примера мы получим $\omega = 3$, следовательно, событие $A = \{1,3,5\}$ произошло, $B = \{5,6\}$ - не произошло.

Определение. Ω как элемент σ-алгебры называется *достоверным событием*, так как Ω происходит при каждом осуществлении эксперимента.

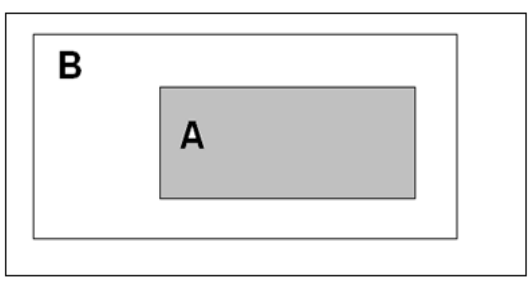
Определение. $\varnothing \in \mathfrak{A}$ называется *невозможным событием*, так как $\varnothing$ не может наступить ни при каком исходе эксперимента.

Одним из способов наглядного представления событий является отождествление их с множествами точек плоских фигур, например, с множествами точек кругов или прямоугольников, которые размещаются внутри другой фигуры, отождествляемой с достоверным событием. Такие представления называются *диаграммами Венна*.

Пусть $A \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{A}$ - случайные события.

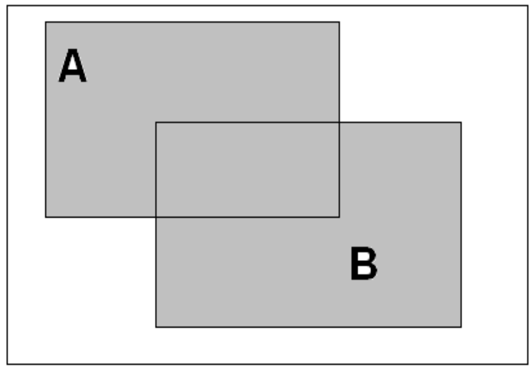
Определение. Говорят, что *A влечет за собой B*, если $A \subset B$:

$(\omega \in A) \Rightarrow (\omega \in B)$



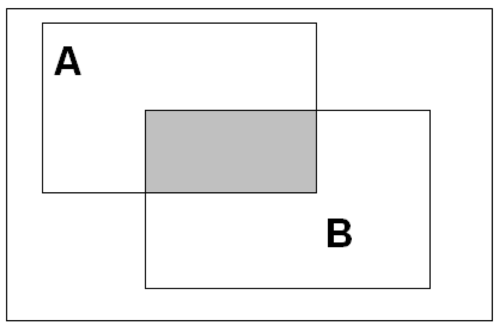
Определение. Событие C называют *объединением A и B*, если C наступает тогда и только тогда, когда наступает событие A или событие B:

$$C = A \cup B = A + B = \{\omega \in \Omega : (\omega \in A) \vee (\omega \in B)\}.$$



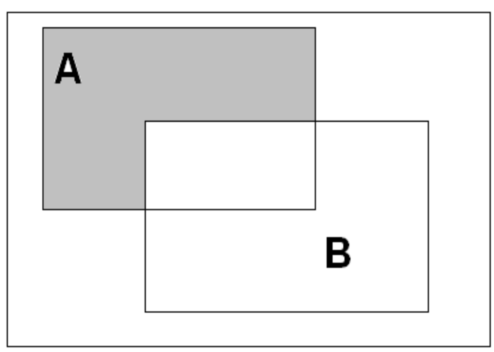
Определение. Событие C называют *пересечением A и B*, если событие C наступает тогда и только тогда, когда наступает событие A и событие B:

$$C = A \cap B = A \cdot B = AB = \{\omega \in \Omega : (\omega \in A) \wedge (\omega \in B)\}.$$



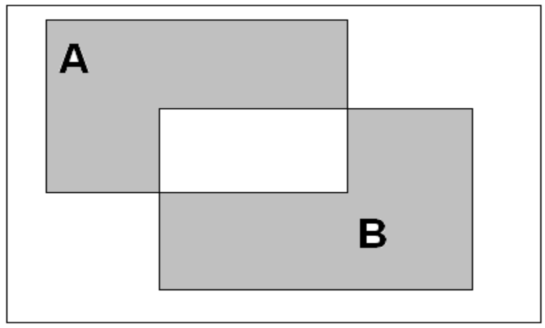
Определение. Событие C называют *разностью A и B*, если событие C наступает тогда и только тогда, когда наступает событие A, а событие B не наступает:

$$C = A \setminus B = A - B = \{\omega \in \Omega : (\omega \in A) \wedge (\omega \notin B)\}.$$



Определение. Событие C называют *симметрической разностью A и B*, если событие C наступает тогда и только тогда, когда наступает событие A, а событие B не наступает, или наступает событие B, а событие A не наступает:

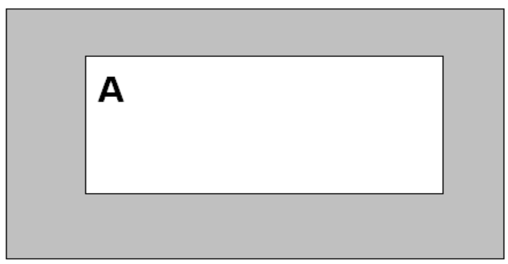
$$C = A \Delta B = (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A) = (A \bigcup B) \setminus (B \bigcap A) =$$
$$= \{\omega \in \Omega : ((\omega \in A) \wedge (\omega \notin B)) \vee ((\omega \in B) \wedge (\omega \notin A))\}.$$



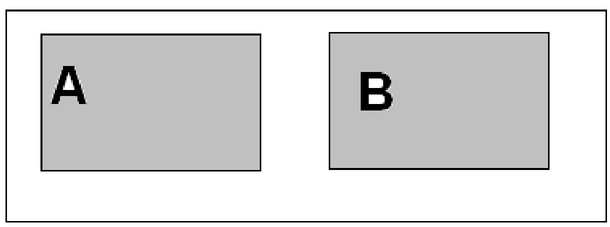
Обратим внимание, что при действиях над случайными событиями в теории вероятностей зачастую вместо обозначений операций над множествами используются алгебраические обозначения.

Определение. Событие $\overline{A} = \Omega \setminus A$ называют *противоположным событию A* или *событием «не A»*. Оно наступает тогда и только тогда, когда событие A не наступает:

$$\overline{A} = \Omega \setminus A = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}.$$



Определение. События A и B называют *несовместными*, если $A \cap B = \varnothing$.



Определение. События $A_1, ..., A_n$ называют *попарно несовместными*, если для любых $i, j \in \overline{1,n}$ таких, что $i \neq j$, выполняется $A_i \cap A_j = \varnothing$.

Основные свойства операций над событиями:

1) *Коммутативность(симметричность):* для любых событий A и B
$A \cup B = B \cup A$ или $A + B = B + A$,
$A \cap B = B \cap A$ или $AB = BA$.

2) *Ассоциативность:* для любых событий A, B и C
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ или $A + (B + C) = (A + B) + C$,
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ или $A(BC) = (AB)C$.

3) *Дистрибутивность:* для любых событий A, B и C
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ или
$A(B + C) = AB + AC$,

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ или

$A + (BC) = (A + B)(A + C)$.

4) *Двойственность (**законы де Моргана**):* для любых событий A и B

1) $\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

2) $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$

5) *Свойства операций с невозможным событием**:***

$\forall A \in \mathfrak{A} \Rightarrow \varnothing \subset A$,

$A \subset \varnothing \Rightarrow A = \varnothing$,

$A + \varnothing = \varnothing + A = A$,

$A \cdot \varnothing = \varnothing \cdot A = \varnothing$,

$A \setminus \varnothing = A$,

$\varnothing \setminus A = \varnothing$,

$\overline{\varnothing} = \Omega$,

$A \cdot \overline{A} = \varnothing$.

6) *Полезные тождества:* для любых событий A и B

$A \setminus B = A\overline{B}$,

$A + A = A \cdot A = A$,

$A + \Omega = \Omega$,

$A \cdot \Omega = A$.

7) *Свойства отношения включения:* для любых событий A и B

$A \subset A$,

$AB \subset A$, $AB \subset B$,

$A \subset B \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$,

$A \subset B \Rightarrow \forall C \in \Omega : AC \subset BC$,

$A \subset B \Rightarrow AB = A, A + B = B$.

8) *Критерии равенства множеств:* для любых событий A и B

$A = B \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A)$,

$A = B \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$,

$A = B \Leftrightarrow (A \setminus B = \varnothing) \wedge (B \setminus A = \varnothing)$,

$A = B \Leftrightarrow \forall C \in \Omega :$

$$(A \cap C = B \cap C) \wedge (A \cap \overline{C} = B \cap \overline{C})$$

9) *Критерии включения множеств:* для любых событий A и B

$A \subset B \Leftrightarrow A \cap \overline{B} = \varnothing$,

$A \subset B \Leftrightarrow (A \cap B = A) \Leftrightarrow (A \cup B = B)$,

$A \subset B \Leftrightarrow \exists T \in \Omega : A = B \cap T$,

$A \subset B \Leftrightarrow \exists T \in \Omega : B = A \cup T$.

Элементы комбинаторики

Часть задач современной теории вероятностей сводится к вычислению числа элементов, т.е. мощности некоторых конечных множеств. В простых случаях эти мощности вычисляются путём непосредственного пересчёта элементов множеств. Однако существует большое количество практических вероятностных задач, в которых непосредственный пересчёт элементов конечных множеств невозможен, т.е. либо число элементов множества слишком велико, либо оно зависит от некоторых переменных параметров.

Определение. Раздел математики, посвящённый задачам пересчёта (вычисления мощностей конечных множеств, обладающих определёнными свойствами) и перечисления (явного определения элементов множеств, обладающих определённым свойством), называется *комбинаторикой*.

Сформулируем основные правила комбинаторики.

Правило суммы. *Для любого натурального* $k \in \mathbb{N}$*, для любых попарно непересекающихся множеств* $A_1,\ldots,A_k$ *с мощностями* $N_1,\ldots,N_k$ *соответственно (обозначается как* $|A_i| = N_i$*,* $i = \overline{1,k}$*) мощность множества* $A = \bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i$ *вычисляется следующим образом:*

$$|A| = \left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{k} A_i\right| = \sum_{i=1}^{k} |A_i| = \sum_{i=1}^{k} N_i .$$

<u>Пример.</u>

$$|A| = |\{1,2\} \cup \{3,4\}| = |\{1,2\}| + |\{3,4\}| = |A_1| + |A_2| =$$
$$= 2 + 2 = 4 .$$

Часто приходится рассматривать множества, состоящие из упорядоченных наборов (векторов) вида $(a_1,\ldots,a_k)$, координаты которых являются элементами каких-то других множеств. К примеру, прямое произведение множеств $A_1 \times\ldots\times A_k = \left\{(a_1 \ldots a_k) : a_i \in A_i \ \forall i \in \overline{1,k}\right\}$. В прямом произведении $A_1 \times\ldots\times A_k$ всякая координата a_i при любых значениях остальных координат «пробегает» все множество A_i, т.е. может в качестве своего значения принимать любой элемент множества A_i.

Прямым произведением числовых отрезков $[a;b]$ и [c;d] является прямоугольник на декартовой плоскости:

$$[a;b] \times [c;d] = \{(x,y) : x \in [a;b], y \in [c;d]\}.$$

Прямое произведение конечных множеств $\{1,2,3\}$ и $\{2,3,4,5\}$ есть конечное множество:

$$\{1,2,3\} \times \{2,3,4,5\} =$$
$$= \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,2),(2,3),(2,4),$$
$$(2,5),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5)\}.$$

Правило произведения. *Пусть зафиксировано любое натуральное* $k \in \mathbb{N}$ *и любое множество* A*, являющееся подмножеством* $A_1 \times\ldots\times A_k$*,* $A = \{(a_1,...,a_k)\} \subseteq A_1 \times\ldots\times A_k$*, такое, что:*

a_1 принимает одно из n_1 значений из A_1 $\left(n_1 \le |A_1| = N_1\right)$;

для каждого фиксированного значения a_1 вторая координата принимает одно из n_2 значений из A_2 $\left(n_2 \le |A_2| = N_2\right)$;

для фиксированных значений a_1 и a_2 третья координата принимает одно из n_3 значений из A_3 $\left(n_3 \le |A_3| = N_3\right)$ и т.д.,

для фиксированных значений $a_{1,},\ldots,a_{k-1}$ k-я координата принимает одно из n_k значений из A_k $\left(n_k \le |A_k| = N_k\right)$, т.е

$$A = \left\{\left(a_1,\ldots,a_k\right) \subset A_1 \times \ldots \times A_k \,|\, \left|\{a_1\}\right| = n_1,\right.$$
$$\left.\left|\{a_2 \,|\, a_1\}\right| = n_2,\ldots,\left|\{a_k \,|\, a_1 \ldots a_{k-1}\}\right| = n_k\right\},$$

где обозначение $..|\,a_1$ означает «при условии фиксации a_1».

Тогда множество А конечно и

$$|A| = \left|\{a_1\}\right| \cdot \left|\{a_2 \,|\, a_1\}\right| \cdot \ldots \cdot \left|\{a_k \,|\, a_1 \ldots a_{k-1}\}\right| = \prod_{i=1}^{k} n_i$$

В частности, если $A = A_1 \times \ldots \times A_k$, $|A_i| = N_i$, то

$$|A| = \prod_{i=1}^{k} N_i .$$

К примеру, мощность прямого произведение конечных множеств $\{1,2,3\}$ и $\{2,3,4,5\}$ равна 12, как мы уже убедились ранее с помощью непосредственного подсчета.

Определение. *Генеральной совокупностью из n элементов* называется любое множество, состоящее из n элементов.

Для комбинаторики природа этих элементов не имеет значения, поэтому элементы генеральной совокупности можно перенумеровать и различать только по номеру. Можно считать, что генеральная совокупность из n элементов - это множество первых n натуральных чисел $\{1,2,...,n\}$, обозначаемое как $\overline{1,n}$. При решении учебных задач генеральную совокупность $\overline{1,n}$ обычно представляют в виде урны с n физически различимыми шарами.

Рассматриваются 4 вида выборок из генеральной совокупности - выборки без возвращения (упорядоченные и неупорядоченные) и выборки с возвращением (упорядоченные и неупорядоченные).

Если рассмотреть генеральную совокупность как урну с шарами, то выборки с возвращением можно рассматривать как выбор шаров по одному элементу, когда номер элемента запоминается, и он возвращается обратно в генеральную совокупность. При выборке без возвращения шары выбираются либо одновременно, либо по одному, но обратно шары не возвращаются.

Таким образом, выборки без возвращения состоят всегда из различных элементов, а выборки с возвращением могут состоять как из различных, так и одинаковых элементов генеральной совокупности.

Определение. Любое подмножество $\{i_1,...,i_k\}\subset\overline{1,n}$ генеральной совокупности $\overline{1,n}$, состоящее из k элементов, называется *неупорядоченной выборкой без возвращения* k *элементов из* n *элементов* или *сочетанием без повторения* k *элементов из* n *элементов.*

Так как множество не зависит от порядка перечисления его элементов, то и порядок расположения элементов в сочетании без повторения не играет никакой роли, т.е. одни и те же элементы $i_1,...,i_k$ при любом порядке расположения образуют одно и то же сочетание без повторений k элементов из n элементов.

Пример. Если генеральная совокупность равна $\overline{1,4}$, то сочетания без повторений 2 элементов из 4 элементов $\{1,2\}$ и $\{2,1\}$ совпадают.

Число всех различных сочетаний без повторения k элементов из n элементов обозначается как C_n^k или $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$.

Определение. Произвольный вектор $(i_1,...,i_k)$, k координат которого являются различными элементами генеральной совокупности $\overline{1,n}$, называется *упорядоченной выборкой без возвращения* k *элементов из* n *элементов* или *размещением без повторения* k *элементов из* n *элементов*.

Таким образом, здесь важен порядок выбора элементов

Пример. Если генеральная совокупность равна $\overline{1,4}$, то размещения без повторений 2 элементов из 4 элементов $(1,2)$ и $(2,1)$ не совпадают, размещения без повторений 3 элементов из 4 элементов $(1,2,3)$ и $(1,3,2)$ не совпадают.

Число всех различных размещений без повторения k элементов из n элементов обозначается как A_n^k или $n^{[k]}$ или $(n)_k$.

Определение. *Перестановкой* n *элементов* называется всякое размещение без повторения $(i_1,...,i_n)$ n элементов из n элементов.

Пример. Если генеральная совокупность равна $\overline{1,4}$, то перестановки 4 элементов $(1,2,4,3)$ и $(1,4,3,2)$ не совпадают.

Число всех различных перестановок n элементов обозначается как P_n.

По определению будем считать, что $C_n^0 = A_n^0 = 0! = 1$.

Утверждение. *Для любого натурального* n*, для всех* $k\in\{0,1,...,n\}$ *верны равенства:*

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!},$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

$$P_n = A_n^n = n!$$

Теорема. *Для любого натурального* n*, для всех* $k \in \{0,1,...,n\} = \overline{0,n}$ *верны равенства:*

1. $C_n^k = C_n^{n-k}$,

2. $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$,

3. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n = \left|\mathfrak{P}\left(\overline{1,n}\right)\right|$,

4. ***(полиномиальная теорема)****. Для любых натуральных* n *и* m*, для любых вещественных* $a_1, a_2, ..., a_m$ *верно равенство*

$$\left(a_1 + a_2 + ... + a_m\right)^n = \sum_{\substack{(k_1...k_m):\\ k_i \in \mathbb{Z}, k_i \geq 0\ \forall i \in \overline{1,m},\\ k_1 + ... + k_m = n}} \frac{n!}{k_1!k_2!...k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} ... a_m^{k_m}.$$

Следствие (*биномиальная теорема или формула разложения бинома Ньютона*). *Для любых вещественных a и b, для любого натурального* n *верно*

$$\left(a+b\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

Определение. Всякий вектор $(i_1,...,i_k)$, упорядоченные координаты которого могут принимать любые (в том числе, одинаковые), значения из генеральной совокупности $\overline{1,n}$, называется *упорядоченной выборкой с возвращением* k *элементов из* n *элементов* или *размещением с повторениями* k *элементов из* n *элементов*.

Пример. Если генеральная совокупность равна $\overline{1,4}$, то размещения с повторениями 5 элементов из 4 элементов $(1,2,2,3,2)$ и $(1,3,2,2,2)$ не совпадают.

Число всех различных размещений с повторениями k элементов из n элементов обозначается как $\overline{A}_n^k$.

Определение. *Вектором состава* или *составом упорядоченной выборки с возвращением* k *элементов из* n *элементов* $(i_1,...,i_k)$ будет называться n-мерный вектор $(j_1,..., j_n)$, где j_1 - количество единиц в размещении $(i_1,...,i_k)$, j_2 - количество двоек и т.д., j_n - количество чисел «n» в размещении.

Пример. Если генеральная совокупность равна $\overline{1,4}$, то вектор состава размещения с повторениями 5 элементов из 4 элементов $(1,2,2,3,2)$ равен $(1,3,1,0)$. Таким же вектором состава обладает размещение $(1,3,2,2,2)$.

Определение. Неупорядоченной выборкой с возвращением k *элементов из* n *элементов* или *сочетанием с повторениями* k *элементов из* n

элементов назовём объединение всех упорядоченных выборок с возвращением k *элементов из* n *элементов*, имеющих одинаковый состав.

Такие выборки лучше всего описывать с использованием состава.

<u>Пример.</u> Если генеральная совокупность равна $\overline{1,4}$, то сочетание с повторений 3 элементов из 4 элементов с составом $(0,1,2,0)$ - это множество

$\{(2,2,3),(2,3,2),(3,2,2)\}$.

Число всех различных сочетаний с повторением k элементов из n элементов обозначается как $\overline{C}_n^k$.

По определению будем считать, что $\overline{C}_n^0 = \overline{A}_n^0 = 1$.

Утверждение. *Для любого натурального* n, *для всех* $k \in \{0,1,...,n\}$ *верны равенства:*

$\overline{A}_n^k = n^k$,

$$\overline{C}_n^k = \frac{(n+k-1)!}{(k-1)!n!}.$$

Докажите это утверждение самостоятельно.

<u>Мера Жордана</u>

Мера – это неотрицательная аддитивная функция множеств. Математическое понятие меры с единых позиций строго определяет, объединяет и обобщает такие интуитивно понятные всем характеристики множеств как длина одномерного (линейного) множества, площадь двумерной (плоской) фигуры и объем трёхмерного (пространственного) тела. В частности, понятие меры распространяется на подмножества n-мерного арифметического пространства $\mathbb{R}^n$ для любого натурального n. Существуют два основных определения меры множеств – мера Жордана и мера Лебега. Однако, так как мера Лебега и мера Жордана одинаково определены для n-мерных параллелепипедов, и все множества, измеримые по Жордану измеримы, и по Лебегу, мы ограничимся мерой Жордана, возникшей исторически раньше.

Технически, способ нахождения меры Жордана похож на метод интегральных сумм, применяемый ещё Архимедом. Он основан на все более и более точном приближении измеряемого множества изнутри и снаружи конечными совокупностями «простых множеств», меры которых известны. При этом мера измеряемого множества равна общему пределу сумм мер вписанных и описанных «простых» множеств. В античное время подобным образом Архимед находил площадь криволинейной трапеции (интеграл).

Мера Жордана определяется в два этапа: сначала определяется мера элементарных (т.е. простых) подмножеств, а затем понятия измеримости и меры распространяются на более широкий класс подмножеств.

Определение. Пустое множество $\varnothing \in \mathbb{R}^n$ называется *измеримым по Жордану*, а его n*-мерная мера Жордана* считается равной нулю, что обозначается как

$$mes_n(\varnothing) = 0\,.$$

Определение. Любая элементарная n-мерная клетка (параллелепипед) $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ называется *измеримой по Жордану*, а её n*-мерной мерой Жордана* называется неотрицательное действительное число, равное

$$mes_n(I) = (b_1 - a_1) \times \ldots \times (b_n - a_n)$$

Из этого определения следует.

1) Любая k-мерная клетка, где $k < n$, вида

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n] \times \{x_{n+1}\} \times \ldots \times \{x_n\} =$$
$$= [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n] \times [x_{n+1}, x_{n+1}] \times \ldots \times [x_n, x_n]$$

является вырожденной n-мерной клеткой и поэтому измерима по Жордану, и её мера равна нулю.

2) Любая точка $x = (x_1 \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n$ является вырожденной клеткой и измерима по Жордану, и её мера равна нулю.

3) Все вершины (нольмерные грани), все рёбра (одномерные грани) и все k-мерные грани ($k < n$) n-мерной клетки измеримы по Жордану, и их меры равны нулю.

Определение. $G \subset \mathbb{R}^n$ называется элементарным множеством, если его можно представить в виде объединения конечного числа непересекающихся элементарных n-мерных клеток: $G = \bigcup_{j=1}^{m} I_j$, $I_j \bigcap I_k = \varnothing$.

Определение. Всякое элементарное множество $G \subset \mathbb{R}^n$ называется *измеримым по Жордану*, и его *n-мерной мерой Жордана* называется сумма мер Жордана составляющих его клеток: $mes_n(G) = \sum_{j=1}^{m} mes_n(I_j)$.

На другие подмножества понятие измеримости распространяется следующим образом.

1) Понятие измеримости и мера по Жордану распространяется только на ограниченные подмножества $\mathbb{R}^n$. Все неограниченные подмножества считается неизмеримыми по Жордану (не имеющими меры в смысле Жордана).

2) Если G – произвольное ограниченное подмножество $\mathbb{R}^n$, то факт его измеримости и неизмеримости устанавливается с использованием следующей процедуры.

а) Всё пространство $\mathbb{R}^n$ разбиваются на стандартные n-мерные клетки I_m с длиной ребра $d = \dfrac{t}{2^m}$ (которую мы будем называть диаметром разбиения), при этом вещественное t больше нуля.

б) Определяются множества A_m (объединение всех клеток, целиком лежащих внутри G) и B_m (объединение всех клеток, имеющих с G хотя бы одну общую точку). A_m - вписанные в G клеточные множества, измеримые по Жордану, B_m - описанные около G клеточные множества, измеримые по Жордану.

Обозначим $a_m = mes_n(A_m)$, $b_m = mes_n(B_m)$. При этом $a_m \le b_k$ для любых натуральных m и k.

в) Устремляем m к бесконечности. Тогда $d = \frac{t}{2^m}$ стремится к нулю. Очевидно, что $A_{m+1} \supset A_m$, $a_m \le a_{m+1}$, $B_{m+1} \subset B_m$, $b_{m+1} \le b_m$. Последовательность $\{a_m\}$ ограничена сверху любым b_k и не убывает, последовательность $\{b_k\}$ ограничена снизу любым a_m и не возрастает.

Следовательно, существуют пределы

$\lim\limits_{m\to\infty} a_m = a(G) \in \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{m\to\infty} b_m = b(G) \in \mathbb{R}$.

Назовем $mes_n^{in}(G) = a(G)$ *внутренней* n*-мерной мерой Жордана* ограниченного множества $G \subset \mathbb{R}^n$, $mes_n^{out}(G) = b(G)$ - *внешней* n*-мерной мерой Жордана* ограниченного множества $G \subset \mathbb{R}^n$.

Определение. Ограниченное множество $G \subset \mathbb{R}^n$ называется *измеримым по Жордану*, если его внутренняя и внешняя меры равны, и это общее значение называется его *n-мерной мерой Жордана* (или *жордановой мерой*):

$mes_n(G) = mes_n^{in}(G) = mes_n^{out}(G)$.

Класс всех измеримых по Жордану множеств обозначается как $J(\mathbb{R}^n)$.

Легко показать, что не всякое ограниченное подмножество $\mathbb{R}^n$ измеримо по Жордану. К примеру, при $n=1$ можно рассмотреть множество $G = [0;1] \cap \mathbb{Q}$, где $\mathbb{Q}$ - множество рациональных чисел: $mes_n^{in}(G) = 0$, $mes_n^{out}(G) = 1$.

Теорема *(о свойствах* $J(\mathbb{R}^n)$*).* *Для любых* $G_1, G_2 \in J(\mathbb{R}^n)$ *верно, что*

1) $G_1 \cap G_2$, $G_1 \cup G_2$, $G_1 \setminus G_2 \in J(\mathbb{R}^n)$;
2) *если* $mes_n G_1 = 0$*, то* $mes_n G_3 = 0$ *для любых* $G_3 \subset G_1$;
3) *если* $G_1 \cap G_2 = G_3$ *и* $mes_n G_3 = 0$*, то* $mes_n(G_1 \cup G_2) = mes_n G_1 + mes_n G_2$;
4) *если* $G_2 \subset G_1$*, то* $mes_n G_2 \le mes_n G_1$;
5) *если* $G_2 \subset G_1$*, то* $mes_n G_1 \setminus G_2 = mes_n G_1 - mes_n G_2$.

Одномерная мера Жордана подмножеств G прямой $\mathbb{R}$ называется *длиной* и обозначается $l(G)$. Двумерная мера Жордана подмножеств G плоскости $\mathbb{R}^2$ называется *площадью* и обозначается $S(G)$. Трехмерная мера

Жордана подмножеств G пространства $\mathbb{R}^3$ называется *объемом* и обозначается $V(G)$.

2. АКСИОМАТИКА ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРОСТРАНСТВО

Определение. Пусть дано измеримое пространство $(\Omega,\mathfrak{A})$, где $\mathfrak{A}$ - сигма-алгебра. Рассмотрим функцию $\mathrm{P}:\mathfrak{A}\to\mathbb{R}$ со свойствами:

1. $\mathrm{P}(\Omega)=1$ (свойство *нормированности*);
2. $\mathrm{P}(A)\ge 0$ для любого события $A\in\mathfrak{A}$ (свойство *неотрицательности*);
3. Для любых попарно несовместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, т.е. таких, что $A_i \bigcap A_j=\varnothing$, выполняется $\mathrm{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\mathrm{P}(A_i)$ (*аксиома счетной аддитивности*).

Данная функция называется *счетно-аддитивной вероятностной мерой* или *вероятностной функцией*, определенной на сигма-алгебре $\mathfrak{A}$.

Для любого события $A\in\mathfrak{A}$ значение $\mathrm{P}(A)$ называется *вероятностью случайного события A*.

Теперь мы можем рассмотреть объект $(\Omega,\mathfrak{A},\mathrm{P})$. Назовем его *вероятностным пространством* (*вероятностной тройкой*).

$(\Omega,\mathfrak{A},\mathrm{P})$ - вероятностная модель случайного эксперимента.

Пример. Пусть происходит бросание монеты.

$\Omega=\{1,0\}$, $\mathfrak{A}=\mathfrak{P}(\Omega)=\{\varnothing,\{0\},\{1\},\Omega\}$.

Зададим $P(\{1\})=\dfrac{1}{2}$; $\mathrm{P}(\{0\})=\dfrac{1}{2}$, $\mathrm{P}(\varnothing)=0$, $\mathrm{P}(\Omega)=1$.

Несложно убедиться, что это – вероятностная функция. Она соответствует бросанию симметричной монеты.

Но вероятностную меру можно задать и другим способом, например, $\mathrm{P}(\{1\})=\dfrac{1}{3}$, $\mathrm{P}(\{0\})=\dfrac{2}{3}$; $\mathrm{P}(\varnothing)=0$, $\mathrm{P}(\Omega)=1$. Эта функция соответствует одному из вариантов несимметричной монеты.

Выбор модели – вопрос не теории вероятностей, а математической статистики, т.е. практики.

Как задается вероятностная мера в случае дискретного пространства элементарных событий?

Рассмотрим $\Omega=\{w_1,w_2,\ldots,w_n,\ldots\}$, $\mathfrak{A}=\mathfrak{P}(\Omega)$.

Пусть $\mathrm{P}(w_i)=p_i\in\mathbb{R}$, при этом $\sum\limits_{i=1}^{\infty}p_i=1$ и $p_i\ge 0$ для любого натурального i.

Для любого $A\in\mathfrak{A}$ такого, что $A=\{w_{i_1},\ldots,w_{i_k},\ldots\}$ определим $\mathrm{P}(A)=\sum\limits_{\forall i:w_i\in A}\mathrm{P}(w_i)=\sum\limits_{\forall i:w_i\in A}p_i$. При этом

$$\mathrm{P}(\Omega)=\sum_{\forall i:w_i\in\Omega}\mathrm{P}(w_i)=\sum_{i=1}^{\infty}p_i=1.$$

Т.к. $p_i\geq 0$, то для любого $A\in\mathfrak{A}$ выполняется свойство

$$\mathrm{P}(A)\geq 0.$$

Поэтому, чтобы задать вероятностную меру в случае дискретного пространства элементарных событий, достаточно задать вероятности элементарных событий.

Пример. Бросаем кубик. $\Omega=\{1,2,...,6\}$, $\mathfrak{A}=\mathfrak{P}(\Omega)$, $\mathrm{P}(\{i\})=\dfrac{1}{6}$ для всех $i\in\overline{1,6}$. Это – модель подбрасывания симметричного (правильного) кубика.

А – событие, состоящее в выпадении нечётной грани. $A=\{1,3,5\}$.

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(\{1\})+\mathrm{P}(\{3\})+\mathrm{P}(\{5\})=\frac{1}{2}.$$

Другая модель: $p(i)=\dfrac{i}{21}$; $i\in\overline{1,6}$. Это – модель подбрасывания, соответствующая одному из вариантов несимметричного кубика

Теперь рассмотрим частный случай дискретного пространства элементарных событий. Пусть оно конечно, т.е. $|\Omega|<\infty$; пусть $\mathfrak{A}=\mathfrak{P}(\Omega)$, $|\Omega|=n$. Положим $\mathrm{P}(w_i)=\dfrac{1}{n}$ для всех $i\in\overline{1,n}$. Легко видеть, что свойства 1 и 2 из определения вероятностной функции выполняются. Такая вероятностная функция соответствует эксперименту с равновозможными исходами.

Пусть у нас имеется случайное событие $A\in\mathfrak{A}$, $A=\{w_{i_1},w_{i_2},...,w_{i_m}\}$, т.е. $|A|=m$. Тогда

$$\mathrm{P}(A)=\sum_{k=1}^{m}\mathrm{P}(w_{i_k})=\frac{m}{n}=\frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Такой способ задания вероятностной функции называется *классическим определением вероятности*.

Определение. Элементарное событие w, входящее в случайное событие A $(w\in A)$ называется *элементарным событием, благоприятствующим A.*

По классическому определению вероятности, вероятность случайного события А есть дробь, в числителе которой стоит количество элементарных событий, благоприятствующих событию А, а в знаменателе – количество всех элементарных событий.

Решая комбинаторно-вероятностные задачи, следует пользоваться именно этой вероятностной моделью. При решении таких задач нужно использовать следующую последовательность действий:

1. описание пространства элементарных событий Ω (обычно задача сводится к определению типа выборки из генеральной совокупности);

к примеру $\Omega=\left\{(\varepsilon_1,...,\varepsilon_k),\varepsilon_i\in\overline{1,n},\varepsilon_i\neq\varepsilon_j\right\}$;

2. нахождение мощности Ω;

в нашем примере $|\Omega| = A_n^k$

3. описание события S, вероятность которого требуется найти (либо математическое описание, либо словесное, в случае, когда математическая запись будет слишком громоздка), при этом, так как $S \subset \Omega$, то повторять те свойства, которые уже описаны в первом пункте не требуется;

к примеру, $S = \{\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_k = n\}$,

$S =\{$среди выбранных ботинок отсутствуют парные$\}$;

4. нахождение мощности S;

5. нахождение вероятности события S: $\mathrm{P}(S) = \dfrac{|S|}{|\Omega|}$.

Теорема ***(простейшие свойства вероятностей)***. *Пусть* $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ - *произвольное вероятностное пространство. Тогда для любых* $A, B \in \mathfrak{A}$ *выполняются свойства:*

1. $\mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)$,

2. $\mathrm{P}(\varnothing) = 0$,

3. Если $A \subset B$*, то* $\mathrm{P}(B \setminus A) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A)$,

4. Если $A \subset B$*, то* $\mathrm{P}(A) \le \mathrm{P}(B)$,

5. $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(AB)$,

$\mathrm{P}(A \cup B \cup C) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(AB) -$

$- \mathrm{P}(AC) - \mathrm{P}(BC) + \mathrm{P}(ABC)$,

Если $AB = \varnothing$; *то* $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$.

6. ***(Теорема о сложении вероятностей или Формула включения исключения)***. *Для любых* $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}$ *выполняется*

$$\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} \mathrm{P}\left(A_{i_1} A_{i_2}\right) +$$

$$+ \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le n} \mathrm{P}\left(A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3}\right) - \ldots + (-1)^{n-1} \mathrm{P}(A_1 \ldots A_n).$$

<u>Пример</u> (*задача о совпадениях*). В урне имеется n шаров с номерами на них. Из урны без возвращения по одному достали все шары. Какова вероятность того, что хотя бы при одном извлечении номер на извлекаемом шаре совпадет с номером извлечения.

$(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ -вероятностное пространство.

$\Omega = \left\{\omega = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n), \varepsilon_i \in \overline{1, n}, \varepsilon_i \ne \varepsilon_j\right\}$,

$\omega \in \Omega$ -перестановка чисел от 1 до n.

$|\Omega| = n!$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$.

Согласно классическому способу задания вероятностей

$$\mathrm{P}(\omega_i) = \frac{1}{n!} \text{ для любого } i \in \overline{1, n!}.$$

Пусть A – событие, состоящее в том, что хотя бы при одном извлечение номер извлечения совпадет с номером на шаре. Чему равно $\mathrm{P}(A)$?

Рассмотрим набор событий A_k, состоящих в том, что при k-м извлечении будет извлечен шар с номером k.

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k \Rightarrow \mathrm{P}(A) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right),$$

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} \mathrm{P}\left(A_{i_1} A_{i_2}\right) +$$

$$+ \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le n} \mathrm{P}\left(A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3}\right) - \ldots + (-1)^{n-1} \mathrm{P}\left(A_1 \ldots A_n\right).$$

Для вычисления $\mathrm{P}(A_1)$ рассмотрим перестановку, где на первом месте зафиксирован элемент «1», а на оставшихся $n-1$ местах могут стоять оставшиеся числа в любом порядке.

$$\mathrm{P}(A_1) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} = \mathrm{P}(A_i) \quad \forall i \in \overline{1, n}.$$

Для вычисления $\mathrm{P}(A_1 A_2)$ рассмотрим перестановку, где на первом и втором месте зафиксированы элементы «1» и «2» соответственно, а на оставшихся $n-2$ местах могут стоять оставшиеся числа в любом порядке.

$$\mathrm{P}(A_1 A_2) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)} = \mathrm{P}\left(A_{i_1} A_{i_2}\right) \text{ для всех } i_1 \ne i_2,$$

$$\sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} P\left(A_{i_1} A_{i_2}\right) = C_n^2 \cdot \frac{1}{n(n-1)} = \frac{n!}{2!(n-2)!} \cdot \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{2!}.$$

Далее аналогично:

$$\mathrm{P}(A_1 A_2 A_3) = \frac{(n-3)!}{n!} = \mathrm{P}\left(A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3}\right) = \frac{3!(n-3)!}{n!} \frac{1}{3!} = \frac{1}{C_n^3} \frac{1}{3!},$$

$$\sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le n} \mathrm{P}\left(A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3}\right) = C_n^3 \frac{1}{C_n^3} \frac{1}{3!} = \frac{1}{3!}.$$

Аналогично доказывается, что для любого $k \in \overline{1, n}$

$$\sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \mathrm{P}\left(A_{i_1} \ldots A_{i_k}\right) = \frac{1}{k!}.$$

Следовательно: $\mathrm{P}(A) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}$.

Рассмотрим разложение по формуле Тейлора функции экспонента:

$$\exp x = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right),$$

$$e^{-1} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!} + o(1) = 1 - \mathrm{P}(A) + o(1).$$

Следовательно, $\mathrm{P}(A) = 1 - e^{-1} + o(1) \approx 0{,}63$;

$\mathrm{P}(A) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - e^{-1}$.

3. УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ И НЕЗАВИСИМОСТЬ СОБЫТИЙ

Рассмотрим случайный эксперимент, состоящий в бросании двух игральных костей. Пусть $\Omega = \{(i,j) : i,j \in \{1,\ldots,6\}\}$, $|\Omega| = 36$.

Рассмотрим события A, заключающееся в том, что на первом кубике выпала четная грань, и B, заключающееся в том, что сумма $i + j$ номеров выпавших граней равна 8.

$\mathrm{P}(w) = \mathrm{P}((i,j)) = \frac{1}{36}$ для любых $i, j \in \overline{1,6}$,

$\mathrm{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$,

$\mathrm{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{5}{36} = \frac{1}{6}$.

Пусть $\mathrm{P}(A \mid B)$ - условная вероятность события A, при условии, что произошло событие B. Если рассмотреть в явном виде событие $B = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$, то легко можно прийти к выводу, что

$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{3}{5}$.

Определение. Пусть $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ - произвольное вероятностное пространство, $A, B \in \mathfrak{A}$, $P(B) > 0$. Тогда *условной вероятностью A при условии того, что событие B наступило*, называется дробь: $\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$.

Условная вероятность обозначается и так: $\mathrm{P}(A / B)$.

Ранее упоминалось, что формула включения-исключения называется еще и теоремой о сложении вероятностей. Рассмотрим два равенства.

Если $\mathrm{P}(\mathrm{B}) > 0$ и $\mathrm{P}(\mathrm{A} \mid \mathrm{B}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{AB})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})}$, то

$$\mathrm{P}(\mathrm{AB}) = \mathrm{P}(\mathrm{B})\mathrm{P}(A \mid B).$$

Если $\mathrm{P}(\mathrm{A}) > 0$ и $\mathrm{P}(B \mid A) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{AB})}{\mathrm{P}(A)}$, то

$$\mathrm{P}(\mathrm{AB}) = \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(B \mid A).$$

Эти две итоговые формулы часто называют теоремами умножения вероятностей при условии, что $\mathrm{P}(\mathrm{A}) > 0$ и $\mathrm{P}(\mathrm{B}) > 0$.

Теорема ***(об умножении вероятностей).*** *Пусть дано произвольное вероятностное пространство* $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ *и набор событий* $\mathrm{A}_1 \ldots \mathrm{A}_n$ *таких, что* $\mathrm{P}(\mathrm{A}_1 \ldots \mathrm{A}_n) > 0$. *Тогда*

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i\right) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_1) \cdot \mathrm{P}(\mathrm{A}_2 \mid \mathrm{A}_1) \times .$$
$$\times \mathrm{P}(\mathrm{A}_3 \mid \mathrm{A}_1 \mathrm{A}_2) \cdot \ldots \cdot \mathrm{P}(\mathrm{A}_n \mid \mathrm{A}_1 \mathrm{A}_2 .. \mathrm{A}_{n+1}).$$

Теперь рассмотрим теорему полной вероятности.

Определение. Пусть $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ - произвольное вероятностное пространство, $\mathrm{H}_1 \ldots \mathrm{H}_k$ - случайные события. Если выполнены условия:

1. $\mathrm{P}(\mathrm{H}_i) > 0$ для любых $i \in \overline{1,k}$,
2. $\mathrm{H}_i \cap \mathrm{H}_j = \varnothing$ для любых $i \neq j$,
3. $\bigcup_{i=1}^{k} \mathrm{H}_i = \Omega$

то набор $\mathrm{H}_1 \ldots \mathrm{H}_k$ называют *полной группой событий* или *разбиением пространства элементарных событий* Ω.

Теорема ***(формула полной вероятности).*** *Если* $\mathrm{H}_1 \ldots \mathrm{H}_k$ *- полная группа событий, то для любого события* $\mathrm{A} \in \mathfrak{A}$ *верно равенство*

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{P}(\mathrm{H}_i) \mathrm{P}(A \mid \mathrm{H}_i).$$

Определение полной группы событий и формулу полной вероятности можно легко обобщить для случая, когда событий $\mathrm{H}_1 \ldots \mathrm{H}_n \ldots$ счетное число.

<u>Пример.</u> Пусть на экзамене выдается N – билетов, из них n - плохих, и при этом $n < N$.

Пусть событие A_1 заключается в том, что первый студент, зашедший в аудиторию, вытащил плохой билет, а событие A_2 в том, что второй вытащил плохой билет. Нас интересует вопрос, чему равны вероятности $\mathrm{P}(\mathrm{A}_1)$ и $\mathrm{P}(\mathrm{A}_2)$?

Очевидно, что $\mathrm{P}(\mathrm{A}_1) = \dfrac{n}{N}$. Для того, чтобы найти $\mathrm{P}(\mathrm{A}_2)$ воспользуемся формулой полной вероятности. Покажите, что события $\mathrm{H}_1 = \mathrm{A}_1$ и $\mathrm{H}_2 = \overline{\mathrm{A}_1}$ составляют полную группу событий.

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_2) = \mathrm{P}(\mathrm{H}_1) \mathrm{P}(\mathrm{A}_2 \mid \mathrm{H}_1) + \mathrm{P}(\mathrm{H}_2) \mathrm{P}(\mathrm{A}_2 \mid \mathrm{H}_2),$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{H}_1) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_1) = \frac{n}{N},$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{H}_2) = \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}_1}) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{A}_1) = \frac{N-n}{N},$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_2 \mid \mathrm{H}_1) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_2 \mid \mathrm{A}_1) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}_1 \mathrm{A}_2)}{\mathrm{P}(\mathrm{A}_1)} = \frac{n(n-1)}{N(N-1)} : \frac{n}{N} = \frac{n-1}{N-1},$$

$$P(A_2 \mid H_2) = P(A_2 \mid \overline{A_1}) = \frac{P(\overline{A_1}A_2)}{P(\overline{A_1})} = \frac{(N-n)n}{N(N-1)} : \frac{N-n}{N} = \frac{n}{N-1} .$$

Таким образом,

$$P(A_2) = \frac{n}{N} \cdot \frac{n-1}{N-1} + \frac{N-n}{N} \cdot \frac{n}{N-1} = \frac{n^2 - n + Nn - n^2}{N(N-1)} =$$

$$= \frac{n(N-1)}{N(N-1)} = \frac{n}{N}$$

и, следовательно, $P(A_1) = P(A_2)$.

Пусть теперь дана полная группа событий $H_1..H_k$ и событие A, и при этом $P(A) > 0$. Чему равна вероятность $P(H_m \mid A)$ для произвольного $m = \overline{1,k}$?

Очевидна следующая цепочка равенств

$$P(H_m \mid A) = \frac{P(AH_m)}{P(A)} = \frac{P(H_m)P(A \mid H_m)}{P(A)}.$$

Равенство

$$P(H_m \mid A) = \frac{P(H_m)P(A \mid H_m)}{\sum_{i=1}^{k} P(H_i)P(A \mid H_i)}$$

называется *формулой Байеса*.

Пример. Пусть имеются три урны, в первой из которых 1 белый и 9 черных шаров, во второй – 5 белых и 5 черных, а в третьей – 3 белых и 7 черных. Наудачу выбираем урну, а затем достаем из урны шар – при этом он оказался черным. Какова вероятность того, что этот шар взят из 1,2,3 урны?

Рассмотрим набор из трех событий H_i, заключающихся в том, что шар выбран из i-й урны, $i \in \overline{1,3}$. Очевидно, что $H_i \cap H_j = \varnothing$, $P(H_i) = \frac{1}{3}$, $\bigcup_{i=1}^{3} H_i = \Omega$. Следовательно, они образуют полную группу событий.

Пусть событие A заключается в том, что был извлечен черный шар. Найдем $P(H_1/A)$, $P(H_2/A)$ и $P(H_3/A)$.

$$P(A) = P(H_1)P(A \mid H_1) + P(H_2)P(A \mid H_2) +$$
$$+ P(H_3)P(A \mid H_3).$$

Очевидно, что

$$P(A \mid H_1) = \frac{9}{10},\ P(A \mid H_2) = \frac{5}{10},\ P(A \mid H_3) = \frac{7}{10}$$

и, следовательно, $P(A) = \frac{7}{10}$.

Покажите самостоятельно, что

$$P(H_1 \mid A) = \frac{3}{7},\ P(H_2 \mid A) = \frac{5}{21},\ P(H_3 \mid A) = \frac{1}{3}.$$

Вероятности $P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\frac{1}{3}$ называются *априорными вероятностями* (вероятностями событий из полной группы до проведения эксперимента),

$P(H_1 \mid A)=\frac{3}{7}$, $P(H_2 \mid A)=\frac{5}{21}$, $P(H_3 \mid A)=\frac{1}{3}$ называются *апостериорными вероятностями* (вероятностями событий из полной группы после проведения эксперимента)

Определение. Случайные события A и B называются *независимыми*, если $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$, т.е. вероятность пересечения событий равна произведению вероятностей событий.

По теореме о произведении вероятностей

$$P(AB)=P(A)P(B/A)=P(B)P(A/B),$$

если $P(A)>0$ и $P(B)>0$.

Если события A и B – независимы, то $P(A)\cdot P(B/A)=P(A)\cdot P(B)$ и

$$P(B)=P(B/A),$$

т.е. безусловная вероятность совпадает с условной.

Аналогично показывается, что $P(A)=P(A/B)$.

Определение. Случайные события $A_1 \dots A_n \in \mathfrak{A}$ называют *попарно независимыми*, если $\forall i, j \in \overline{1,n}$, $i \neq j$, верно равенство $P(A_i A_j)=P(A_i)P(A_j)$.

Определение. Случайные события $A_1 \dots A_n \in \mathfrak{A}$ называют *независимыми в совокупности*, если $P(A_{i_1}A_{i_2})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})$ для всех $i_1 \neq i_2$, $P(A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})P(A_{i_3})$ для всех $i_1 \neq i_2$, $i_2 \neq i_3$, $i_1 \neq i_3$ и т.д., $P(A_1A_2..A_n)=P(A_1)P(A_2)..P(A_n)$.

Из независимости в совокупности следует попарная независимость, но обратное утверждение не верно.

<u>Пример</u> (***пример Бернштейна***). Рассмотрим в качестве эксперимента бросание на плоскость симметричного и однородного тетраэдра (треугольной пирамиды с четырьмя гранями).

Все грани раскрашены: первая грань - в красный, вторая - в зеленый, третья - в желтый цвет, а на четвертой есть все три цвета. Рассмотрим события $A_к$ заключающееся в том, что выпала грань, содержащая красный цвет, $A_з$ - содержащая зеленый цвет, $A_ж$ - содержащая желтый цвет.

Пусть $\Omega=\{\omega_к,\omega_з,\omega_ж,\omega_{кжз}\}$. Тогда

$A_к=\{\omega_к,\omega_{кжз}\}$, $A_ж=\{\omega_ж,\omega_{кжз}\}$, $A_з=\{\omega_з,\omega_{кжз}\}$.

Пусть для всех $\omega \in \Omega$ вероятность будет равна $P(\omega)=\frac{1}{4}$. Тогда

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_к)=\mathrm{P}(\mathrm{A}_ж)=\mathrm{P}(\mathrm{A}_з)=\frac{1}{2},\quad \mathrm{P}(\mathrm{A}_к\mathrm{A}_ж)=\mathrm{P}\{\omega_{кжз}\}=\frac{1}{4}=\mathrm{P}(\mathrm{A}_з\mathrm{A}_ж)=\mathrm{P}(\mathrm{A}_к\mathrm{A}_з)=$$
$$=\mathrm{P}(\mathrm{A}_к)\cdot\mathrm{P}(\mathrm{A}_ж)=\mathrm{P}(\mathrm{A}_з)\cdot\mathrm{P}(\mathrm{A}_ж)=\mathrm{P}(\mathrm{A}_к)\cdot\mathrm{P}(\mathrm{A}_з).$$

Мы получили, что $\mathrm{A}_к,\mathrm{A}_ж,\mathrm{A}_з$ - независимы попарно, но не являются независимыми в совокупности, так как

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_к\mathrm{A}_ж\mathrm{A}_з)=\mathrm{P}\{\omega_{кжз}\}=\frac{1}{4}\neq\mathrm{P}(\mathrm{A}_к)\cdot\mathrm{P}(\mathrm{A}_ж)\cdot\mathrm{P}(\mathrm{A}_з)=\frac{1}{8}.$$

Утверждение. *Если события A и B – независимы, то независимы и события A и $\overline{B}$.*

4. КЛАССИЧЕСКИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ СХЕМЫ И ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

Геометрическая вероятность

Еще в самом начале развития теории вероятности была замечена недостаточность классического определения вероятности, основанного на рассмотрении конечной группы равновероятных событий. Уже тогда частные примеры привели к некоторому видоизменению этого определения и построению понятия вероятности также для случаев, когда мыслится бесконечное число исходов.

Общая задача, которая привела к расширению понятия вероятности, может быть сформулирована следующим образом:

Пусть имеется, к примеру, на плоскости некоторая область Ω, и в ней содержится другая область A. В область Ω наудачу бросается точка, и спрашивается, чему равна вероятность того, что точка попадет в область A. При этом выражение «точка бросается наудачу в область Ω» употребляется в том смысле, что брошенная точка может попасть в любую точку области Ω, а вероятность попасть в какую либо часть области пропорциональна мере этой части (длине, площади и т.д.) и не зависит от ее расположения и формы. Теперь сформируем более строго.

Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ - множество, измеримое по Жордану, т.е. $\Omega\in J(\mathbb{R}^n)$, $mes_n(\Omega)$ - мера Жордана множества Ω. При этом $0<mes_n(\Omega)<\infty$.

Нас будут интересовать чаще всего случаи, когда $n=1,2,3$.

Пусть $\mathfrak{F}$ (эф готическое) - множество всех подмножеств Ω для которых определена мера Жордана $\mathfrak{F}=\mathfrak{P}(\Omega)\cap J(\mathbb{R}^n)$. В данном случае $\mathfrak{F}$ является алгеброй (докажите это), и $\mathfrak{F}\subset J(\mathbb{R}^n)$. Подмножества $A\in\mathfrak{F}$ мы будем так же называть *событиями*.

Функция $\mathrm{P}(\mathrm{A})=\dfrac{mes_n(\mathrm{A})}{mes_n(\Omega)}$, отображающая $\mathfrak{F}$ в $\mathbb{R}$, по определению будет называться *геометрической вероятностью события* A. Несложно показать, что данная функция будет обладать следующими свойствами:

1. $\mathrm{P}(\mathrm{A}) \geq 0$ для всех $\mathrm{A} \in \mathfrak{F}$;

2. $\mathrm{P}(\Omega) = 1$;

3. (*свойство аддитивности*) $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup B) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(B)$ для любых непересекающихся $A, B \in \mathfrak{F}$.

Функция, обладающая этими тремя свойствами, называется *конечно-аддитивной вероятностной мерой*, а тройка $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, состоящая из пространства элементарных событий Ω, алгебры $\mathfrak{F}$ и конечно-аддитивной вероятностной меры P, называется *вероятностным пространством в широком смысле*.

Самостоятельно докажите, что любая счетно-аддитивная вероятностная функция будет конечно-аддитивной.

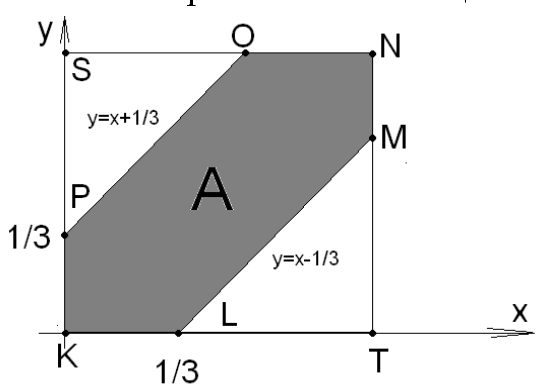
В зависимости от контекста под словом вероятность может пониматься как конечно-, так и счетно-аддитивная вероятностная меры. Мы рассмотрим конкретные примеры вычисления геометрической вероятности.

<u>Примеры.</u> 1. Два друга договорились о встрече с 12 часов до 13 часов дня. Пришедший первым на место встречи ждет другого в течение 20 минут. Какова вероятность того, что встреча состоится?

Для решения данной задачи обозначим через x – момент прихода первого друга, а через y – момент прихода второго. Станем изображать x и y как декартовые координаты на плоскости, а в качестве единицы масштаба выберем час. Возможные исходы изобразим точками квадрата со сторонами 1. Тогда $\Omega = [0,1] \times [0,1]$.

Для того, что бы встреча состоялась необходимо и достаточно что бы $|x - y| \leq \frac{1}{3}$. Из того, что $|x - y| < \frac{1}{3}$ следует система неравенств $y - x < \frac{1}{3}$, т.е. $y < \frac{1}{3} + x$ при $y \geq x$, и $x - y < \frac{1}{3}$, т.е. $y > x - \frac{1}{3}$ при $y < x$.

Пусть $A \in \mathfrak{F}$ заключается в том, что встреча состоялась. На рисунке ниже это событие изображено темным цветом.



$$P(A)=\frac{mes_2(A)}{mes_2(\Omega)}=\frac{S_2(A)}{S(\Omega)}=S_{KLMNOP}=1-2S_{\Delta LMT}=$$

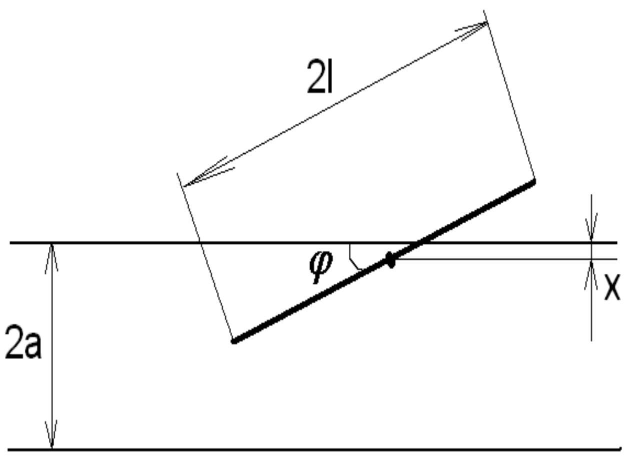
$$=1-2\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\right)=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$$

2. **Задача Бюффона.**

Пусть плоскость разлинована параллельными прямыми, отстоящими на расстоянии 2a. На плоскость наудачу бросается игла длиной $2l$ ($l<0$). Нужно найти вероятность того, что игла пересечет какую-либо прямую.

Обозначим через x расстояние от центра иглы до ближайшей параллели и через φ угол, составляющий иглой с этой параллелью. Величины x и φ полностью определяют положение иглы.

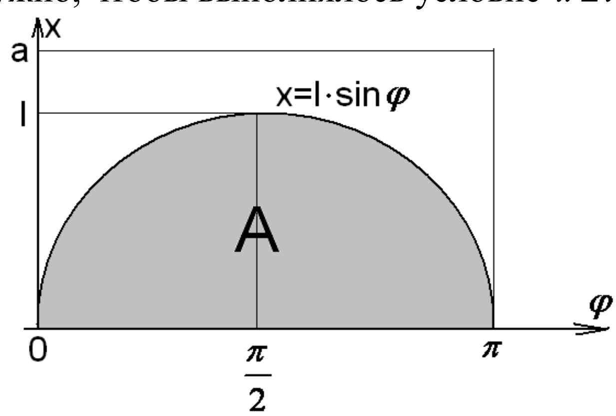
В этом случае



$\Omega=\{(x,\varphi):0\le x\le a, 0\le\varphi\le\pi\}=[0;a]\times[0;\pi]$.

Получаем, что x и φ - декартовы координаты на плоскости.

Из геометрических соображений очевидно, что для того, чтобы игла пересекла прямую нужно, чтобы выполнялось условие $x\le l\cdot\sin\varphi$.



Пусть A – событие, заключающееся в том, что игла пересекла препятствие: $A=\{x\le l\cdot\sin\varphi\}$.

$$P(A)=\frac{mes_n(A)}{mes_n(\Omega)}=\frac{S(A)}{S(\Omega)}=\frac{S(A)}{\pi a},\ S(A)=\int_0^{\pi} l\sin\varphi d\varphi=l(\cos 0-\cos\pi)=2l,$$

$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \dfrac{2l}{\pi a}$.

В результате проведения некоторого эксперимента может наступить или не наступить некоторое события А. Эксперимент повторим n раз. Через m обозначим число наступления A ($m < n$). Величина $\nu = \dfrac{m}{n}$ называется *частотой события* A или *относительной частотой наступления события* A.

В примере 2 у нас есть вероятность события A и $\mathrm{P}(\mathrm{A}) \approx \nu(\mathrm{A}) = \dfrac{m}{n}$ (в силу некоторых вероятностных соображений, которые мы рассмотрим позднее в законе больших чисел). С помощью этого приближенного равенства мы можем оценить число «пи» экспериментально. Т. к. $\dfrac{r\ell}{a\pi} \approx \dfrac{m}{n}$, то $\pi \approx \dfrac{r\ell n}{am}$.

В 1850 году математик Вольф 5000 раз бросал иглу и получил $\pi \approx 3{,}1596$. Лаззерини в 1901 году 3408 раз бросал иглу. Его оценка - $\pi \approx 3{,}14159$. Гриджеман в 1960 году бросил иглу 2 раза и получил $\pi \approx 3{,}143$.

<u>Схема испытаний Бернулли</u>

Пусть у нас имеется случайный эксперимент $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathrm{P})$.

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$.

$\mathrm{P}(\omega_1) = p$, $0 \le p \le 1$, $\mathrm{P}(\omega_2) = 1 - p = q$.

Обозначим ω_1 через 1 и назовем *успехом*, а ω_2 через 0 и назовем *неудачей* (*неудачей*).

Более сложный случайный эксперимент заключается в повторении этого случайного эксперимента.

Рассмотрим $n = 2$ (повторяем 2 раза): $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mathrm{P}_2)$

$\Omega_2 = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\Omega_2)$,

$$\left.\begin{array}{r} \mathrm{P}_2(0,0) = \mathrm{P}(0) \times \mathrm{P}(0) = q^2 \ge 0 \\ \mathrm{P}_2(0,1) = \mathrm{P}(0) \times \mathrm{P}(1) = qp \ge 0 \\ \mathrm{P}_2(1,0) = \mathrm{P}(1) \times \mathrm{P}(0) = pq \ge 0 \\ \mathrm{P}_2(1,1) = \mathrm{P}(1) \times \mathrm{P}(1) = p^2 \ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow q^2 + pq + qp + p^2 = 1$$

$(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mathrm{P}_2)$-вероятностная (математическая) модель сложного случайного эксперимента, состоящего в двух простых повторениях исходного эксперимента.

Повторим эксперимент n-раз:

$\Omega_n = \{(\varepsilon_1 ... \varepsilon_n) : \varepsilon_i \in \{0,1\}\}$, где ε_i- результат i-го повторения исходного эксперимента.

$\Omega_n = \underbrace{\Omega \times ... \times \Omega}_{n-раз} = \Omega^n$, $\mathfrak{A}_n = \mathfrak{P}(\Omega_n)$, Рассмотрим элементарное событие $\omega=(\varepsilon_1...\varepsilon_n)$. Обозначим через m число единиц в ω: $m=\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k$.

Тогда пусть $\mathrm{P}_n(\omega)=\prod_{k=1}^{n}\mathrm{P}(\varepsilon_n)=p^m q^{n-m}$.

1) $\mathrm{P}_n(\omega)\geq 0$ для всех $\omega\in\Omega_n$

2) $\sum_{(\varepsilon_1...\varepsilon_n)}\mathrm{P}_n(\varepsilon_1...\varepsilon_n)=1$

Докажем последнее равенство:

$$\sum_{(\varepsilon_1..\varepsilon_n)}\mathrm{P}_n\left(\varepsilon_1..\varepsilon_n\right)=\sum_{m=0}^{n}\left(\sum_{(\varepsilon_1..\varepsilon_n):\sum\varepsilon_i=m}\mathrm{P}_n\left(\varepsilon_1..\varepsilon_n\right)\right)=$$

$$=\sum_{m=0}^{n}C_n^m p^m q^{n-m}=\left(p+q\right)^n=1.$$

Мы получили вероятностное пространство $(\Omega_n,\mathfrak{A}_n,\mathrm{P}_n)$-математическую (вероятностную) модель случайного эксперимента, состоящего в n-кратном повторении исходного эксперимента.

Эту модель и называют *схемой независимых испытаний Бернулли* или *биноминальной схемой*.

Рассмотрим задачу: пусть проведено n испытаний по схеме Бернулли. Буквой ξ обозначим число успехов в n испытаний. Какова вероятность того, что $\xi=m$?

$$\mathrm{P}\left(\xi=m\right)=\sum_{(\varepsilon_1..\varepsilon_n):\sum\varepsilon_i=m}p^m q^{n-m}=C_n^m p^m q^{n-m}\text{, где } m\in\overline{0,n}.$$

Равенство $\mathrm{P}\left(\xi=m\right)=C_n^m p^m q^{n-m}$ называется *формулой Бернулли*.

<u>Примеры</u>: 1. Пусть 100 раз бросают правильный тетраэдр, $\Omega=\{1,2,3,4\}$, $\mathrm{P}\left(i\right)=\frac{1}{n}$, где $i\in\overline{1,4}$.

Пусть успех – выпадение грани «3», тогда неудача – выпадение граней «1», «2», «4».

$$p=\mathrm{P}\left(3\right)=\frac{1}{4},$$

$$q=\mathrm{P}\left(\{1,2,4\}\right)=\mathrm{P}\left(1\right)+\mathrm{P}\left(2\right)+\mathrm{P}\left(4\right)=1-p=\frac{3}{4}.$$

Имеем схему Бернулли. Какова вероятность того, что «3» выпадет 15 раз?

$$\mathrm{P}\left(\xi=m=15\right)=C_{100}^{15}\left(\frac{1}{4}\right)^{15}\left(\frac{3}{4}\right)^{85}=C_{100}^{15}\frac{3^{85}}{2^{200}}.$$

2. По каналу связи передают 500 знаков. вероятность искажения одного знака равно 0,01. Какова вероятность того, что в телеграмме 7 искаженных знаков?

$$\mathrm{P}(\xi=7)=C_{500}^{7}\left(\frac{1}{100}\right)^{7} x\left(\frac{99}{100}\right)^{493}=C_{500}^{7}\frac{99^{493}}{10^{1000}}.$$

Какова вероятность того, что число успехов заключено в фиксированных пределах? По формуле Бернулли

$$\mathrm{P}(m_1\le\xi\le m_2)=\sum_{k=m_1}^{m_2}\mathrm{P}(\xi=k)=\sum_{k=m_1}^{m_2}C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Теперь обозначим $C_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}=\mathrm{P}(\xi=m)$. Пусть n – фиксировано. Рассмотрим отношение вероятностей

$$\frac{C_n(m+1)}{C_n(m)}=\frac{C_n^{m+1}p^{m+1}q^{n-m-1}}{C_n^m p^m q^{n-m}}=\frac{C_n^{m+1}}{C_n^m}\cdot\frac{p}{q}=$$

$$=\frac{\dfrac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!}}{\dfrac{n!}{m!(n-m)!}}\cdot\frac{p}{q}=\frac{n-m}{m+1}\cdot\frac{p}{q}.$$

Нужно найти, когда предыдущая вероятность больше последующей, т.е. когда $\dfrac{C_n(m+1)}{C_n(m)}=\dfrac{n-m}{m+1}\cdot\dfrac{p}{q}>1$.

Легко провести преобразования:

$(n-m)p-(m+1)q>0$,

$np-mp-mq-q>0$,

$np-m(p+q)-q>0$,

$np-m-q>0$.

Если $np-q>m$, то следующая вероятность больше предыдущей.

Если $np-q$ не целое число, тогда наиболее вероятным числом успехов является число $m=[np-q]+1$. Если $np-q$ - целое, то максимума $C_n(m)$ достигает при $m=np-q$ и при $m=np-q+1$

Пример: Пусть мы 100 раз бросаем несимметричный тетраэдр.

$\Omega=\{1,2,3,4\}$,

$\mathrm{P}(1)=\dfrac{1}{10}$, $\mathrm{P}(2)=\dfrac{2}{10}$, $\mathrm{P}(3)=\dfrac{3}{10}$, $\mathrm{P}(4)=\dfrac{4}{10}$.

Пусть выпадение грани «3» - успех. Какое количество раз она выпадет с наибольшей вероятностью?

$p=\dfrac{3}{10}$, $q=\dfrac{7}{10}$, $np-q=100\cdot\dfrac{2}{10}-\dfrac{7}{10}=30-0,7=29,3\notin\mathbb{Z}$.

$C_n(m)$ максимально при $m=[np-q]+1=30$.

Полиномиальная схема

Имеется случайный эксперимент $(\Omega,\mathfrak{A},\mathrm{P})$.

$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,..\omega_r\}$,

$\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$,

$\mathrm{P}(\omega_k) = p_k \ge 0$, $k = \overline{1,r}$, $\sum\limits_{k=1}^{r} p_k = 1$.

Пусть эксперимент независимо повторяется n – раз. Получаем вероятностное пространство $(\Omega_n, \mathfrak{A}_n, \mathrm{P}_n)$, где

$\Omega_n = \Omega \times .. \times \Omega = \Omega^n = \left\{ \left(\omega_{i_1} .. \omega_{i_n} \right) \right\}$,

$\mathfrak{A}_n = \mathfrak{P}(\Omega_n)$,

$\mathrm{P}\left\{ \left(\omega_{i_1} .. \omega_{i_n} \right) \right\} = \prod\limits_{k=1}^{n} \mathrm{P}\left(\omega_{i_k} \right)$.

1) $\mathrm{P}\left\{ \left(\omega_{i_1} .. \omega_{i_n} \right) \right\} = \prod\limits_{k=1}^{n} \mathrm{P}\left(\omega_{i_k} \right) \ge 0$,

2) $\sum\limits_{(\omega_1 .. \omega_n)} \mathrm{P}\left\{ \omega_{i_1} .. \omega_{i_n} \right\} = 1$.

Докажем последнее равенство. Для этого рассмотрим множество из векторов $\left(\omega_{i_1} .. \omega_{i_n} \right)$ таких, что событие ω_1 повторяется в них m_1 раз; $\omega_2 - m_2$ и так далее.

Таких цепочек (их число мы считали в полиномиальной теореме) $\dfrac{n!}{m_1! m_2! .. m_2!}$.

$$\sum_{(\omega_1 .. \omega_n)} \mathrm{P}\left(\left\{ \omega_{i_1} .. \omega_{i_n} \right\} \right) = \sum_{\substack{m_1, m_2, .., m_r \ge 0 \\ \sum_{i=1}^{r} m_i = n}} \left(\sum_{\substack{\omega_1 \text{ повторяется } m_1 \text{ раз} \\ \omega_2 \text{ повторяется } m_2 \text{ раз} \\ \dots \\ \omega_r \text{ повторяется } m_r \text{ раз}}} \mathrm{P}\left(\left\{ \omega_1 .. \omega_n \right\} \right) \right) =$$

$$= \sum_{\substack{m_i \in \mathbb{N}_0 \\ m_1 + .. + m_r = n}} \frac{n!}{m_1! m_2! .. m_r!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} .. p_r^{m_r} = 1.$$

Последнее равенство следует из полиномиальной теоремы.

Мы получили новое вероятностное пространство $(\Omega_n, \mathfrak{A}_n, \mathrm{P}_n)$ - математическую (вероятностностную) модель n – кратного повторения случайного эксперимента с r исходами в каждом при неизменных условиях. Эта модель называется *полиномиальной схемой*. При $r = 2$ мы получаем биномиальную схему.

Пусть ξ_1 - число исходов ω_1 в случайном исходе полиномиальной схемы

ξ_2 - число исходов ω_2 в случайном исходе полиномиальной схемы

…

ξ_r - число исходов ω_r в случайном исходе полиномиальной схемы

$\overline{\xi} = (\xi_1 .. \xi_r)$ - полиномиальный вектор.

Очевидно, что $\sum_{k=1}^{r}\xi_k = n$.

Какова вероятность того, что $\mathrm{P}(\xi_1 = k_1; \xi_2 = k_2; ...; \xi_r = k_r)$, если $\sum_{i=1}^{r} k_i = n$?

$$\mathrm{P}(\xi_1 = k_1; \xi_2 = k_2; ...; \xi_r = k_r) = \frac{n!}{k_1! k_2! .. k_r!} p^{k_1} p^{k_2} .. p^{k_r}.$$

Данное равенство носит название *полиномиальной формулы*, частный ее случай – формула Бернулли:

$$\mathrm{P}(\xi_1 = k_1, \xi_2 = k_2 = n - k_1) =$$

$$= \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!} p^{k_1} (1-p)^{n-k_1} = C_n^{k_1} p^{k_1} q^{n-k_1}.$$

Пример: 24 раза бросаем игральную кость. Какова вероятность того, что каждая сторона выпадет по 4 раза?

$\Omega = \{1, 2, ..6\}$, r=6, $p_i = \mathrm{P}\{i\} = \frac{1}{6}$ для всех $i = \overline{1,6}$,

$\Omega_{24} = \Omega^{24}$,

$$\mathrm{P}(\xi_1 = 4; \xi_2 = 4; ...; \xi_6 = 4) = \frac{24!}{4!4!..4!}\left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{1}{6}\right)^4 .. \left(\frac{1}{6}\right)^4 =$$

$$= \frac{24!}{(4!)^6}\left(\frac{1}{6}\right)^{24}.$$

Теоремы Муавра – Лапласа и Пуассона

Рассмотрим биноминальную схему с вероятностью успеха p, где $0 < p < 1$. Пусть A_m - событие, заключающееся в том, что при n испытаниях успех появился ровно m раз.

Если n и m небольшие, то вычислить $\mathrm{P}(\mathrm{A}_m)$ по формуле Бернулли довольно просто. Но при больших n вычисление будет крайне трудоемким. Поэтому в таких случаях следует для оценки $\mathrm{P}(\mathrm{A}_m)$ использовать приближенные формулы, к которым и относят формулы, следующие из предельных теорем Муавра-Лапласа и Пуассона.

Сформулируем без доказательства полезную формулу.

Утверждение (*формула Стерлинга*). *Для любого натурального n верно, что* $n! = \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}$, где $0 < \theta_n < 1$, или $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Теперь сформулируем первую предельную теорему.

Теорема (*Локальная теорема Муавра-Лапласа*). *Дана биноминальная схема с вероятностью успеха p такой, что* $0 < p < 1$. *Пусть* $m = m(n)$ *- целое число, зависящее от n, такое, что последовательность* $x(n) = \frac{m(n) - np}{\sqrt{npq}}$

ограниченна (т. е. существует $c > 0$*:* $|x(n)| < c$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$*). Рассмотрим событие* A_m*, заключающееся в том, что произошло ровно т исходов.*

Тогда при n *стремящемся к бесконечности*

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_m) = C_n^m p^m q^{n-m} \sim \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2(n)}{2}}.$$

Получается, что оценка вероятности $\mathrm{P}(\mathrm{A}_m)$ верна при $|x(n)| < c$, т. е. при $a < \dfrac{m(n) - np}{\sqrt{npq}} < b$, где a и b – некоторые константы.

Отсюда из локальной теоремы (вероятность в точке) мы можем получить интегральную теорему (вероятность промежутка):

Теорема (*интегральная теорема Муавра – Лапласа*). *В условиях предыдущей теоремы для любых натуральных* A *и* B *таких, что* $\mathrm{A} < \mathrm{B}$ *верно*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=A}^{B} \mathrm{P}(\mathrm{A}_m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

где $a = \dfrac{\mathrm{A} - np}{\sqrt{npq}}$, $b = \dfrac{\mathrm{B} - np}{\sqrt{npq}}$.

Еще раз подчеркнем, что интегральная и локальная теоремы Муавра-Лапласа предназначаются для приближенного вычисления биноминальных вероятностей, либо их сумм.

<u>Пример</u>. Правильная кость подбрасывается 12000 раз. Какова вероятность того, что выпадение числа «6» будет лежать в пределах от 1800 до 2100?

Искомая вероятность равна $\sum\limits_{k=1800}^{2100} C_{12000}^k \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{10}\right)^{12000-k}$

Понятно, что вычисление этой суммы крайне трудоёмко. Если мы воспользуемся интегральной теоремой Муавра-Лапласа, то найдем, что интересующая нас вероятность приближенно вычисляется следующим образом:

$$n = 12000,\ p = \frac{1}{6},\ \mathrm{A} = 18000,\ \mathrm{B} = 2100;$$

$$a = \frac{1800 - 2000}{\sqrt{12000 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}} \approx -2\sqrt{6} \approx -4{,}898,$$

$$b = \frac{2100 - 2000}{\sqrt{12000 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}} = \sqrt{6} \approx 2{,}449,$$

$$\sum_{k=1800}^{2100} C_{12000}^k \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{10}\right)^{12000-k} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-4{,}898}^{2{,}449} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Рассмотрим функцию $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{y^2}{2}}dy$, тогда

$$\sum_{k=1800}^{2100}C_{12000}^{k}\left(\frac{1}{6}\right)^{k}\left(\frac{5}{10}\right)^{12000-k}\approx$$

$$\approx\Phi(2,449)-\Phi(-4,998)\approx 0,992\,.$$

Численные значения $\Phi(x)$ берутся из таблицы значений этой функции (функции распределения стандартного нормального закона, с которой мы познакомимся позднее более подробно).

Процесс приближенного вычисления одной функции с помощью другой можно назвать *аппроксимацией*. Аппроксимация суммы биноминальных вероятностей с помощью функции $\Phi(x)$, то есть теоремы Муавра-Лапласа, при значениях p, близких к нулю или единице, может быть «плохой» (то есть дающей большую погрешность) даже при больших значениях n. При этих, «малых» значениях p «хорошую» аппроксимацию для нашей суммы дает так называемая теорема Пуассона.

Рассмотрим биноминальную схему испытаний при n испытаниях. Будем менять *n* так, чтобы $n\to\infty$, а вероятность успеха $p=p(n)$ будем считать функцией параметра n.

Теорема (*Пуассона*). *Пусть в биномиальной схеме при n стремящемся к бесконечности* $p=p(n)\underset{n\to\infty}{\to}0$*; при этом* $n\cdot p(n)\underset{n\to\infty}{\to}\lambda$*, где* $\lambda>0$.

Тогда для любого фиксированного $m=0,1,2,\ldots$

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}\left(\mathrm{A}_m\right)=\lim_{n\to\infty}C_n^m p^m(n)\left(1-p(n)\right)^{n-m}=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}\,.$$

Теорему Пуассона используют для приближенного вычисления биноминальных вероятностей, когда значения p малы, а число испытаний n велико. Обычно, если $p\cdot n<10$, то для аппроксимации биноминальных вероятностей используют теорему Пуассона, а если $p\cdot n\geq 10$, то теоремы Муавра – Лапласа.

Обратим внимание, что в предыдущем рассмотренном примере $p\cdot n=12000\cdot\dfrac{1}{6}=2000>10$.

Пример. Пусть на Московский рынок завезли партию цыплят из 10000 тушек. Известно, что их завезли из области, где 0,05 процентов поголовья больны птичьим гриппом. Найти вероятность того, что в поставке было не более одной опасной для здоровья тушки.

Имеем

$n=10000=10^4$, $p=\dfrac{0,05}{100}=5\cdot 10^{-4}$,

$np=\lambda=5\leq 10$.

Следовательно, нужно использовать теорему Пуассона.

$$\mathrm{P}(\xi \le 1) = \mathrm{P}(\xi = 0) + \mathrm{P}(\xi = 1) \approx \frac{5^0}{0!}e^{-5} + \frac{5^1}{1!}e^{-5} = 6e^{-5} \approx 0,04 .$$

5. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И СЛУЧАЙНЫЕ ВЕКТОРЫ

Рассмотрим произвольное вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathrm{P})$. Введем понятие, призванное формально определить величины, подлежащие «измерению» в случайных экспериментах.

Определение. *Случайной величиной* называется функция $\xi = \xi(w): \Omega \to \mathbb{R}$, заданная на пространстве элементарных событий Ω, принимающая значения в $\mathbb{R}$ и удовлетворяющая условию, что для любого вещественного x множество $\{w \in \Omega : \xi(w) < x\}$ является событием, т.е.

$$\{w \in \Omega : \xi(w) < x\} \in \mathfrak{A} .$$

<u>Пример</u>: Пусть случайный эксперимент состоит в двукратном подбрасывании монеты: $\Omega = \{00, 10, 01, 11\}$.

Определим случайную величину ξ с помощью таблицы

ω	00	10	01	11
$\xi(\omega)$	0	1	1	2

Здесь число $\xi(\omega)$ означает число гербов в элементарном исходе.

Другим простейшим примером случайной величиной ξ является индикатор наступления некоторого события $A \in \mathfrak{A}$: $\xi(\omega) = \mathrm{I}_{\mathrm{A}}(\omega) = I(A)$, где

$$\mathrm{I}_{\mathrm{A}}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in \mathrm{A} \\ 0, & \omega \notin \mathrm{A} \end{cases}.$$

Определение. *Функцией распределения* случайной величины ξ называется функция $F_\xi(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, равная

$$F_\xi(x) = \mathrm{P}(\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x\}) = \mathrm{P}(\xi < x).$$

Теорема (о *свойствах функции распределения*). *Для любой случайной величины ξ верно:*

1. $0 \le F_\xi(x) \le 1$ *для любых* $x \in \mathbb{R}$*;*

2. $F_\xi(x)$ *- неубывающая функция на* $\mathbb{R}$*;*

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_\xi(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F_\xi(x) = 1$*;*

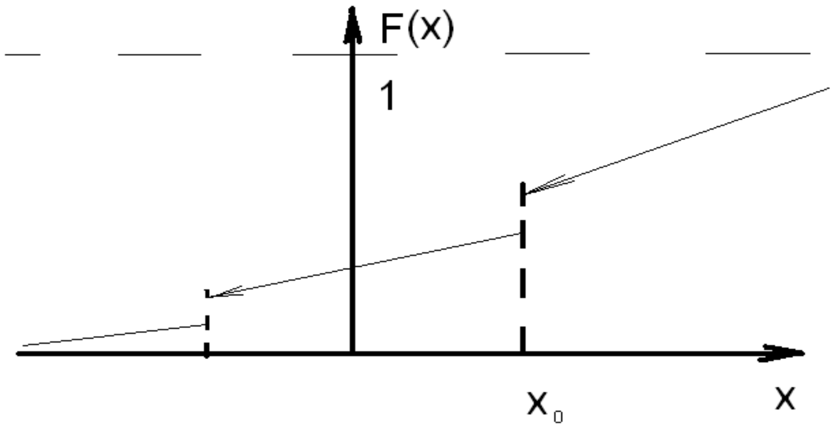
4. $F_\xi(x_0)$ *непрерывна слева в любой точке* $x_0 \in \mathbb{R}$*, т. е.*

$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} F_\xi(x) = F_\xi(x_0)$ *или*

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \partial > 0 : \forall x \in (x_0 - \partial, x_0) \; \left| F_\xi(x) - F_\xi(x_0) \right| < \varepsilon .$$

Утверждение. $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} F_\xi(x) = F_\xi(x_0) + \mathrm{P}(\xi = x_0)$

Свойства функции распределения $F_{\xi}(x)$ позволяют построить ее график:

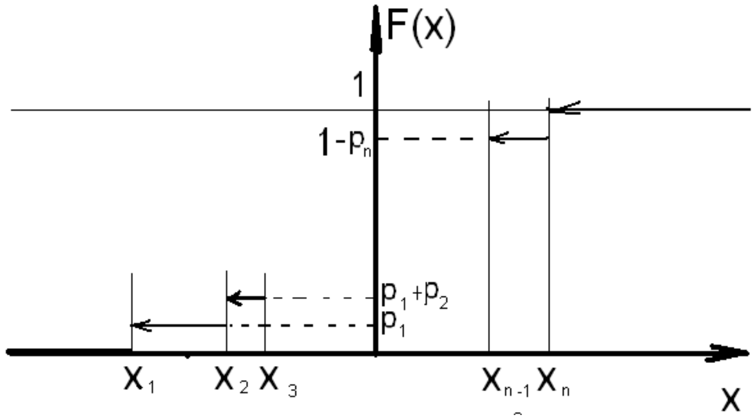


В каждой точке разрыва x_0 функция распределения $F_{\xi}(x)$ имеет разрыв первого рода. Значение функции $F_{\xi}(x)$ в точке x_0 разрыва равно пределу функции $F_{\xi}(x)$ при x, стремящемся к точке x_0 слева.

Функция распределения $F_{\xi}(x)$ имеет не более чем счетное число точек разрыва (конечное либо счетное).

Случайные величины дискретного типа

Определение. Если случайная величина ξ принимает конечное либо счетное число значений, то функцию $F_{\xi}(x)$ называют *функцией распределения дискретного типа*, а случайную величину ξ называют *случайной величиной дискретного типа*.



Рассмотрим случайную величину дискретного типа ξ. Ее возможное значение обозначим через x_k, $k=1,2,...$ так, что $p_k = \mathrm{P}(\xi = x_k)$, $k=1,2,...$, $\sum\limits_{(k)} p_k = 1$, $p_k \geq 0$. Распределение такой случайной величины изображают в виде таблицы, называемой *таблицей распределения*:

$$\begin{pmatrix} x_1 \; x_2 & ... & x_n \; ... \\ p_1 \; p_2 & ... & p_n \; ... \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} x_i & \\ p_i & i \in \mathbb{N} \end{pmatrix}.$$

В верхней части таблицы перечислены возможные значения случайной величины ξ (обычно в порядке возрастания), а в нижней строке соответствующие вероятности этих значений.

Функция распределения случайной величины ξ дискретного типа имеет вид, представленный на рисунке выше.

$$F_\xi(x) = \mathrm{P}(\xi < x) = \sum_{k: x_k < x} p_k$$

<u>Примеры</u> основных случайных величин дискретного типа:

1) *Вырожденное распределение.*

Пусть ξ всегда равно a: $\mathrm{P}(\xi = a) = 1$, тогда функция распределения этой случайной величины равна

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le a \\ 1, & x > a \end{cases}.$$

2) *Распределение Бернулли.*

Пусть ξ принимает значение x_1 с вероятностью p и x_2 с вероятностью $1-p$, тогда, если $x_1 < x_2$, то

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_1 \\ p, x < x_1 \le x_2 \\ 1, & x > x_2 \end{cases}.$$

3) *Биноминальное распределение.*

Пусть ξ - число успехов в схеме Бернулли с вероятностью успеха p при n испытаниях. Тогда случайная величина ξ может принимать значения k из множества $\{0,1,2,...n\} = \overline{0,n}$, и $\mathrm{P}(\xi = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.

n, p -параметры биномиального распределения.

Если ξ имеет биноминальное распределение с параметрами n и p, то это обозначается как $\xi \sim \mathrm{Bi}(n,p)$ или, реже, $\xi \sim \mathrm{B}(n,p)$.

4) *Геометрическое распределение*.

Пусть ξ - число испытаний до первого успеха в схеме Бернулли с вероятностью успеха p.

$\mathrm{P}(\xi = n) = q^{n-1} p$, $n \in \mathbb{N}$.

5) Говорят, что ξ имеет *распределение Пуассона с параметром* $\lambda > 0$, если ξ принимает значения 0,1,2,…, т. е. $\xi \in \mathbb{N}_0$, и $\mathrm{P}(\xi = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ для всех $k \in \mathbb{N}_0$.

Обозначение: $\xi \sim \mathrm{P}_0(\lambda)$- или $\xi \sim \Pi(\lambda)$.

В четвертом и пятом примерах случайная величина ξ принимает счетное количество значений, а в первых трех – конечное.

Абсолютно непрерывные распределения

Определение. Функцию $F_\xi(x)$ называют *абсолютно непрерывной*, а соответствующую случайную величину ξ называют *случайной величиной абсолютно непрерывного типа*, если существует неотрицательная функция $p_\xi(x)$ такая, что

$$F_\xi(x)=\int_{-\infty}^{x} p_\xi(z)dz .$$

При этом функцию $p_\xi(x)$ называют *плотностью распределения* случайной величины ξ.

Утверждение (*о свойствах плотности* $p_\xi(x)$). *Для любой абсолютно непрерывной случайной величины ξ верны свойства:*

1) $p_\xi(x)\ge 0$ *для любого* $x\in\mathbb{R}$*,*

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(x)dx=1$*,*

3) $p_\xi(x)=\dfrac{dF_\xi(x)}{dx}$*, где x – точка непрерывности* $F_\xi(x)$*,*

4) $\mathrm{P}\{\xi\in[a,b)\}=F(b)-F(a)=\int_a^b p(x)dx=$

$$=\mathrm{P}(\xi\in(a,b))=\mathrm{P}(\xi\in(a,b])=\mathrm{P}([a,b]).$$

Следствие. *Для любой абсолютно непрерывной случайной величины ξ и для любого* $a\in\mathbb{R}$ *верно равенство*

$$\mathrm{P}\{\xi=a\}=0 .$$

Примеры основных случайных величин абсолютно непрерывного типа.

1) *Равномерное на отрезке* $[a,b]$ *распределение*, где $a<b$.

У данного распределения плотность имеет вид:

$$p_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in[a,b]\\ 0, & x\notin[a,b]\end{cases},$$

а функция распределения –

$$F_\xi(x)=\int_{-\infty}^{x}p(z)dz=\begin{cases}0, & x\le a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\le b\\ 1, & x>b\end{cases}.$$

a и b - параметры распределения.

Обозначение: $\xi\sim U[a,b]$ или, реже, $\xi\sim R[a,b]$.

2) Показательное (экспоненциальное) распределение с параметром $\lambda>0$.

$$p_\xi(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases},$$

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 1-e^{-\lambda x}, & x>0\end{cases}.$$

Обозначение: $\xi\sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

3) *Нормальное распределение с параметрами* μ *и* $\sigma^2>0$.

$$p_\xi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

$$F_\xi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}dz.$$

Обозначение: $\xi\sim \mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$.

Если $\mu=0$, $\sigma^2=1$, то $\xi\sim\mathrm{N}(0,1)$ называется стандартным нормальным распределением с плотностью

$$\varphi(x)=p_\xi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Соответствующая функция распределения обозначается как

$$\Phi(x)=F_\xi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{y^2}{2}}dy.$$

В интегральной теореме Муавра-Лапласа:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{a\le\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\le b}p(\mathrm{A}_m)=\int_a^b\varphi(x)dx=\Phi(b)-\Phi(a).$$

Нормальное распределение еще известно как гауссовское. Вместе с портретом великого немецкого математика К.Ф. Гаусса (1777-1855) плотность этого распределения была изображена в конце XX века на 10 западногерманских марках.

4) *Распределение Коши с параметром* $\theta>0$.

$$p_\xi(x)=\frac{1}{\pi}\frac{\theta}{x^2+\theta^2},$$

$$F_\xi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\pi}\frac{\theta}{z^2+\theta^2}dz=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\pi}\frac{1}{\left(\frac{z}{\theta}\right)^2+1}d\left(\frac{z}{\theta}\right)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\frac{x}{\theta}}\frac{1}{\pi}\frac{1}{z^2+1}dz=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctg\frac{x}{\theta}.$$

Если $\theta=1$, то это стандартное распределение Коши с плотностью $p_\xi(x)=\dfrac{1}{\pi(x^2+1)}$.

5) X^2 (читается как хи-квадрат) *распределение с* n *степенями свободы*, где $n \in \mathbb{N}$ - параметр.

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \dfrac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}}}, & x > 0 \end{cases},$$

где $\Gamma(x) = \int\limits_{0}^{+\infty} z^{x-1} e^{-z} dz$.

Обозначение: $\xi \sim \mathrm{X}_n^2$.

6) распределение Стьюдента с n степенями свободы, где $n \in \mathbb{N}$ - параметр.

$$p_{\xi}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}}};$$

Обозначение: $\xi \sim \mathrm{st}_n$.

Если $n = 1$, то из распределения Стьюдента получится стандартное распределение Коши.

<u>Случайные векторы и их распределения</u>

Определение. Упорядоченный набор из n случайных величин $\xi_1 ... \xi_n$, заданных на одном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathrm{P})$, называют *n – мерным случайным вектором* или *n – мерной случайной величиной*.

Обозначение: $\overline{\xi} = (\xi_1 \xi_2 ... \xi_n)$, $\overline{\xi} : \Omega \to \mathbb{R}^n$.

Определение. *Функцией распределения случайного вектора* $\overline{\xi} = (\xi_1 ... \xi_n)$ называют функцию многих вещественных переменных $F_{\overline{\xi}}(\overline{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ такую, что для любых $\overline{x} = (x_1 ... x_n) \in \mathbb{R}^n$ верно равенство

$$F_{\overline{\xi}}(\overline{x}) = F_{\overline{\xi}}(x_1 ... x_n) = P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, ..., \xi_n < x_n).$$

Эту функцию еще называют *совместной функцией распределения случайных величин* $\xi_1 ... \xi_n$.

Определение. Пусть дан случайный вектор $\overline{\xi} = (\xi_1 ... \xi_n)$, натуральное число $m \in \mathbb{N}$, такое, что $1 \le m < n$, набор чисел $1 \le i_1 < i_2 < ... < i_m \le n$. Рассмотрим вектор $\overline{\xi_1} = \left(\xi_{i_1} ... \xi_{i_m}\right)$. Функцию распределения $F_{\overline{\xi_1}}\left(x_{i_1} ... x_{i_m}\right)$ вектора $\overline{\xi_1} = \left(\xi_{i_1} ... \xi_{i_m}\right)$ называют *частной функцией распределения подвектора* $\overline{\xi_1}$ или *частным распределением случайных величин* $\xi_{i_1} ... \xi_{i_m}$.

По частным распределениям, вообще говоря, нельзя восстановить совместное распределение, а наоборот – можно.

Теорема (*о свойствах функции* $F_{\bar{\xi}}(\bar{x})$). *Для любого случайного вектора* $\bar{\xi}=(\xi_1...\xi_n)$ *и для любого* $k\in\overline{1,n}$ *верно*

1) $\lim\limits_{x_k\to-\infty} F_{\bar{\xi}}(x_1...x_n)=0$,

2) $\lim\limits_{x_k\to+\infty} F_{\xi_1...\xi_n}(x_1...x_n)=F_{\xi_1...\xi_{k-1}\xi_{k+1}...\xi_n}(x_1...x_{k-1}x_k...x_n)$,

3) $\lim\limits_{\substack{x_1\to\infty\\ ...\\ x_n\to\infty}} F_{\bar{\xi}}(x_1...x_n)=1$.

<u>Пример.</u> Пусть дан случайный вектор $\bar{\xi}=(\xi_1\xi_2)$ с совместной функцией распределения

$$F_{\xi}(x_1x_2)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}e^{\frac{-u^2+v^2}{2}}dudv.$$

Из второго пункта предыдущей теоремы следует, что функция распределения подвектора примет вид:

$$F_{\xi}(x_1)=\lim_{x_2\to\infty}F_{\bar{\xi}}(x_1x_2)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{x_1}e^{\frac{-u^2}{2}}du\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\frac{-v^2}{2}}dv=$$

$$=\frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi}\int_{-\infty}^{x_1}e^{\frac{-u^2}{2}}du=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x_1}e^{\frac{-u^2}{2}}du.$$

Получаем, что ξ_1 имеет функцию распределения стандартного нормального закона. Следовательно,

$$\xi_1\sim\mathrm{N}(0,1).$$

Аналогично показывается, что $\xi_2\sim\mathrm{N}(0,1)$

Для случайных векторов вводятся понятия случайных векторов дискретного (если они принимает счетное или конечное число значений из $\mathbb{R}^n$) и абсолютно непрерывного типа.

<u>Пример.</u> Рассмотрим полиномиальную схему с k исходами при n испытаниях, в которой обозначим через p_j вероятность появления исхода с номером j при одном испытании, $\sum\limits_{j=1}^{k}p_j=1$.

Пусть ξ_j - частота исхода с номером j при n испытаниях. Тогда вектор $\bar{\xi}=(\xi_1..\xi_k)$ имеет *полиномиальное распределение*, если

$$\mathrm{P}(\xi_1=m_1,...,\xi_k=m_k)=\frac{n!}{m_1!..m_k!}p_1^{m_1}..p_k^{m_k},$$

где $m_j\ge0$, $\forall j\in\overline{1,\mathrm{n}}$, $\sum\limits_{j=1}^{k}m_j=n$.

Определение. Функция $F_{\bar{\xi}}(\bar{x})$ называется *абсолютно непрерывной функцией распределения случайного вектора* $\bar{\xi}$ (который также называется *абсолютно непрерывным),* если существует неотрицательная функция $p_{\bar{\xi}}\left(\bar{x}\right):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, называемая *плотностью*, такая, что

$$F_{\bar{\xi}}\left(\bar{x}\right)=F_{\bar{\xi}}\left(x_1...x_n\right)=\int\limits_{-\infty}^{x_1}...\int\limits_{-\infty}^{x_n}p_{\bar{\xi}}\left(z_1...z_n\right)dz_1..dz_n.$$

Свойства плотности $p_{\bar{\xi}}\left(\bar{x}\right)$:

1). $p_{\bar{\xi}}\left(\bar{x}\right)\geq 0$ для всех $\bar{x}\in\mathbb{R}^n$,

2). $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}...\int\limits_{-\infty}^{+\infty}p_{\bar{\xi}}\left(\bar{x}\right)dx_1..dx_n=1$.

<u>Пример.</u> Двухмерным нормальным распределением называют распределение абсолютно непрерывного сучайного вектора $\bar{\xi}=\left(\xi_1,\xi_2\right)$ с плотностью:

$$p_{\bar{\xi}}\left(x_1x_2\right)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\frac{\left(x_1-\mu_1\right)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\left(x_2-\mu_2\right)^2}{\sigma_2^2}\right]\right),$$

где $\mu_1,\mu_2\in\mathbb{R}$, $-1<\rho<1$, $\sigma_1>0$, $\sigma_2>0$ - параметры. Параметр ρ называют коэффициентом корреляции.

Утверждение. *Пусть случайный вектор $\bar{\xi}$ имеет плотность распределения $p_{\bar{\xi}}\left(x_1..x_n\right)$, тогда подвектор $\bar{\xi}_1=\left(\xi_1..\xi_m\right)$ имеет плотность распределения*

$$p_{\bar{\xi}_1}\left(x_1...x_m\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}..\int\limits_{-\infty}^{+\infty}p_{\bar{\xi}}\left(x_1..x_mx_{m+1}..x_n\right)dx_{m+1}..dx_n$$

<u>Операции над случайными величинами</u>

Утверждение (*без доказательства***).** *Пусть $n\in\mathbb{N}$, $\bar{\xi}=\left(\xi_1..\xi_n\right)$ - случайный вектор с плотностью $p\left(x_1..x_n\right)$, дана непрерывная функция $\varphi\left(\bar{x}\right)=\varphi\left(x_1..x_n\right):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. Тогда $\varphi\left(\xi_1..\xi_n\right)$ будет случайной величиной и*

$$\mathrm{P}\left(\varphi\left(\xi_1..\xi_n\right)<x\right)=\int\limits_{D_x}p\left(x_1..x_n\right)dx_1..dx_n,$$

где $D_x=\left\{\left(x_1..x_n\right)\in\mathbb{R}^n:\varphi\left(x_1..x_n\right)<x\right\}$

Аналогично, в дискретном случае:

$$\mathrm{P}\left(\varphi\left(\xi_1..\xi_n\right)=y\right)=\sum_{\bar{x}\in\mathbb{R}^n:\varphi\left(\bar{x}\right)=y}\mathrm{P}\left(\bar{\xi}=\bar{x}\right).$$

Более подробно рассмотрим случай, когда $n=1$; т. е. рассмотрим случай преобразования одной случайной величины ξ с функцией распределения $F_\xi(x)$ и плотностью $p_\xi(x)$

Утверждение. *Пусть* $\eta=\varphi(\xi)$*; где* $\varphi(x)$ *- строго возрастающая непрерывная функция* $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$*,* ξ *- произвольная случайная величина с функцией распределения* $F_\xi(x)$*. Тогда* $F_\eta(x)=F_\xi\left(\varphi^{-1}(x)\right)$.

Утверждение. *Пусть* ξ *- случайная величина, плотность распределения которой* $p_\xi(x)$*,* $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *- строго возрастающая и непрерывная функция с положительной производной* $\dfrac{d\varphi(x)}{dx}>0$ *для любого* $x\in\mathbb{R}$*. Тогда случайная величина* $\eta=\varphi(\xi)$ *также имеет плотность* $p_\eta(x)$ *и справедливо равенство*

$$p_\eta(x)=p_\xi\left(\varphi^{-1}(x)\right)\cdot\frac{d\left(\varphi^{-1}(x)\right)}{dx}.$$

<u>Пример.</u> *Линейное преобразование случайной величины.*

Рассмотрим случайную величину $\eta=a\xi+b$, где a и b - некоторые вещественные константы, а ξ - случайная величина с функцией распределения $F_\xi(x)$ и плотностью $p_\xi(x)$.

$$F_\eta(x)=\mathrm{P}(\eta<x)=\mathrm{P}(a\xi+b<x)=\mathrm{P}(a\xi<x-b).$$

Пусть $a>0$. Тогда

$$F_\eta(x)=\mathrm{P}(a\xi<x-в)=\mathrm{P}\left(\xi<\frac{x-в}{a}\right)=F_\xi\left(\frac{x-в}{a}\right)$$

$$p_\eta(x)=\frac{dF_\eta(x)}{dx}=\frac{dF_\xi\left(\frac{x-в}{a}\right)}{dx}=\frac{d\left(\frac{x-в}{a}\right)}{dx}\frac{dF_\xi(y)}{dy}\bigg|_{y=\frac{x-в}{a}}=$$

$$=\frac{1}{a}p_\xi(y)\Big|_{y=\frac{x-в}{a}}=\frac{1}{a}\cdot p_\xi\left(\frac{x-в}{a}\right)$$

Пусть $a<0$. Тогда

$$F_\eta(x)=\mathrm{P}(a\xi<x-в)=\mathrm{P}\left(\xi>\frac{x-в}{a}\right)=1-\mathrm{P}\left(\xi\le\frac{x-в}{a}\right)=$$

$$=1-\mathrm{P}\left(\xi<\frac{x-в}{a}\right)-\mathrm{P}\left(\xi=\frac{x-в}{a}\right)=$$

$$=1-F_\xi\left(\frac{x-в}{a}\right)-\mathrm{P}\left(\xi=\frac{x-в}{a}\right),$$

$$p_\eta(x)=\frac{dF_\eta(x)}{dx}=\frac{d\left(1-\mathrm{P}\left(\xi=\frac{x-в}{a}\right)-F_\xi\left(\frac{x-в}{a}\right)\right)}{dx}=$$

$$= -\frac{1}{a} p_\xi(y)\Big|_{y=\frac{x-в}{a}} = -\frac{1}{a} \cdot p_\xi\left(\frac{x-в}{a}\right).$$

Объединяя оба этих случая, получаем, что при $a \neq 0$

$$p_\eta(x) = \frac{1}{|a|} p_\xi\left(\frac{x-в}{a}\right).$$

При $a = 0$ получаем, что $\eta = b$. В этом случае случайная величина η не имеет плотности распределения, а график её функции распределения имеет вид

$$F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \le b \\ 1, & x > b \end{cases}.$$

Независимость случайных величин

Определение. Пусть даны случайные величины $\xi_1 ... \xi_n$, заданные на одном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathrm{P})$. Они называются *независимыми (в совокупности)*, если для любых $m \in \overline{2,n}$ и $1 \le i_1 < i_2 < ... < i_m$, для любых событий $\mathrm{A}_j \in \mathfrak{A}$, $j \in \overline{1,m}$, выполняется следующее свойство

$$\mathrm{P}\left(\xi_{i_1} \in \mathrm{A}_1, \xi_{i_2} \in \mathrm{A}_2, ..., \xi_{i_m} \in \mathrm{A}_m\right) =$$
$$= \mathrm{P}\left(\xi_{i_1} \in \mathrm{A}_1\right) \mathrm{P}\left(\xi_{i_2} \in \mathrm{A}_2\right) ... \mathrm{P}\left(\xi_{i_m} \in \mathrm{A}_m\right).$$

Так как $\xi_1 ... \xi_n$ заданы на одном вероятностном пространстве, то мы можем рассмотреть их как случайный вектор $\bar{\xi} = (\xi_1 ... \xi_n)$ с функцией распределения $F_{\bar{\xi}}(x_1 ... x_n)$.

Теорема *(критерий независимости случайных величин).* *Случайные величины* $\xi_1 ... \xi_n$*, из которых можно составить случайный вектор* $\bar{\xi} = (\xi_1 ... \xi_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$*, независимы тогда и только тогда, когда для всех* $(x_1 ... x_n) \in \mathbb{R}^n$ *выполняется равенство*

$$F_{\bar{\xi}}(x_1 ... x_n) = F_{\xi_1}(x_1) F_{\xi_2}(x_2) ... F_{\xi_n}(x_n).$$

Теорема. *Пусть случайные величины* ξ_j *имеют плотности распределения* $p_{\xi_j}(x)$ *при всех* $j \in \overline{1,n}$*, а случайный вектор* $\bar{\xi} = (\xi_1 ... \xi_n)$ *имеет совместную плотность* $p_{\bar{\xi}}(\bar{x}) = p_{\bar{\xi}}(x_1 ... x_n)$*. Тогда* $\xi_1 ... \xi_n$ *- независимые случайные величины тогда и только тогда, когда*

$$p_{\bar{\xi}}(x_1 ... x_n) = p_{\xi_1}(x_1) ... p_{\xi_n}(x_n).$$

Последняя теорема – это критерий независимости для абсолютно непрерывных случайных величин.

Следствие *(формулы свертки для независимых случайных величин).* *Если* ξ_1, ξ_2 *- независимые абсолютно непрерывные случайные величины, то*

$$p_{\xi_1+\xi_2}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_1}(x_1) p_{\xi_2}(y - x_1) dx_1.$$

Если ξ_1, ξ_2 - независимые дискретные случайные величины, то

$$\mathrm{P}(\xi_1+\xi_2=y)=\sum_{x_1}\mathrm{P}(\xi_1=x_1)\mathrm{P}(\xi_2=y-x_1).$$

<u>Примеры.</u> 1). Пусть независимые случайные величины ξ_1 и ξ_2 распределены по закону Пуассона с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно. Найдем распределение их суммы:

$$\mathrm{P}(\xi_1+\xi_2=k)=\sum_{i=0}^{\infty}\mathrm{P}(\xi_1=i)\mathrm{P}(\xi_2=k-i).$$

Т.к. для любых $i>k$ верно, что $\mathrm{P}(\xi_2=k-i)=0$, то

$$\mathrm{P}(\xi_1+\xi_2=k)=\sum_{i=0}^{k}\mathrm{P}(\xi_1=i)\mathrm{P}(\xi_2=k-i)=$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda_1^i}{i!}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!}e^{-\lambda_2}= \qquad =e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\cdot\frac{k!}{k!(k-i)!}\lambda_1^i\lambda_2^{k-i}=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}.$$

Это равенство верно для любых $k\geq 0$.

Мы получили, что $\xi_1+\xi_2\sim\Pi(\lambda_1+\lambda_2)$.

2). Пусть ξ_1,ξ_2 - независимы, $\xi_1\sim\mathrm{Exp}(\lambda_1)$, $\xi_2\sim\mathrm{Exp}(\lambda_2)$. Это абсолютно непрерывные случайные величины. Найдем плотность распределения их суммы:

$$p_{\xi_1+\xi_2}(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_{\xi_1}(x_1)p_{\xi_2}(y-x_1)dx_1.$$

Т.к. для любых $x_1<0$ $p_{\xi_1}(x_1)=0$ и для любых $x_1>y$ верно, что $p_{\xi_2}(y-x_1)=0$, то

$$p_{\xi_1+\xi_2}(y)=\int_0^y \mathrm{P}_{\xi_1}(x_1)\mathrm{P}_{\xi_2}(y-x_1)dx_1=\int_0^y\lambda_1e^{-\lambda_1x_1}\lambda_2e^{-\lambda_2(y-x_1)}dx_1=$$

$$=\lambda_1\lambda_2e^{-\lambda_2y}\int_0^y e^{x_1(\lambda_2-\lambda_1)}dx_1$$

Если $\lambda_2\neq\lambda_1$, то

$$p_{\xi_1+\xi_2}(y)=\lambda_1\lambda_2e^{-\lambda_2y}\frac{e^{y(\lambda_2-\lambda_1)}-1}{\lambda_2-\lambda_1}=\lambda_1\lambda_2\frac{e^{-\lambda_1y}-e^{-\lambda_2y}}{\lambda_2-\lambda_1}.$$

Если $\lambda_2=\lambda_1=\lambda$, то

$$p_{\xi_1+\xi_2}(y)=\lambda_1\lambda_2e^{-\lambda_2y}\int_0^y dy=y\lambda^2e^{-\lambda y}.$$

Примеры показывают нам, что при свертке двух однотипных распределений можно получить как распределение того же типа (как в примере 1), так и распределение другого типа (как в примере 2).

6. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Определение. Если ξ - случайная величина дискретного типа с таблицей распределения $\begin{pmatrix} x_i \\ \mathrm{P}(x_i) \end{pmatrix}, i \in \mathbb{N}$, то *математическим ожиданием случайной величины* ξ называется число

$$\mathrm{E}\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \,\mathrm{P}(\xi = x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \,\mathrm{P}(x_i).$$

(т.е. сумма значений случайной величины, умноженных на их вероятности).

Здесь предполагается, что ряд абсолютно сходится, т.е. $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \mathrm{P}(\xi = x_i) < +\infty$.

Если ξ - случайная величина абсолютно непрерывного типа, то её *математическим ожиданием* называется значение интеграла

$$\mathrm{E}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_{\xi}(x)\,dx,$$

при условии, что он абсолютно сходится, т.е. сходится интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |\, x \,|\, p_{\xi}(x)\,dx$.

Обычно используются два основных обозначения для математического ожидания: $\mathrm{E}\xi$ и $\mathrm{M}\xi$.

Теорема (о *свойствах математического ожидания* *с доказательством для дискретного пространства элементарных событий)*.

1. Если пространство элементарных событий Ω *конечно, либо счетно, то* $\mathrm{E}\xi = \sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega)\mathrm{P}(\omega)$, *где* $\mathrm{P}(\omega)$ *- вероятность элементарного исхода* ω.

*2. (**Свойство линейности**). Для любых вещественных* a *и* b, *для любых случайных величин* ξ *и* η, *имеющих математические ожидания* $E\xi$ *и* $E\eta$ *соответственно, верно равенство* $\mathrm{E}(a\xi + b\eta) = a\,\mathrm{E}\xi + b\,\mathrm{E}\eta$.

3. Если $a \le \xi \le b$, *то* $a \le \mathrm{E}\xi \le b$.

4. Если ξ, η *- независимы и существуют* $E\xi$ *и* Ey, *то* $E(\xi \cdot y) = E\xi \cdot Ey$.

С помощью принципа математической индукции можно доказать, что свойства 2 и 4 верны для любого натурального количества случайных величин.

Следствие.

1. *Если* $\xi \ge 0$, *то* $\mathrm{E}\xi \ge 0$.
2. *Если* $\xi \ge \eta$, *то* $\mathrm{E}\xi \ge \mathrm{E}\eta$.
3. $|\,\mathrm{E}\xi\,| \le \mathrm{E}\,|\,\xi\,|$.

Утверждение (*неравенство Коши – Буняковского*). *Для любых случайных величин* ξ *и* η, *для которых определены математические ожидания, верно неравенство*

$$\left(\mathrm{E}\left|\xi\cdot\eta\right|\right)^2\le \mathrm{E}(\xi^2)\cdot\mathrm{E}(\eta^2)$$

Математическое ожидание функций от случайных величин

Рассмотрим некоторую случайную величину ξ и случайную величину $\eta=\varphi(\xi)$, где $\varphi(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ - некоторая функция.

Требуется вычислить математическое ожидание случайной величины η, если известно распределение случайной величины ξ.

Утверждение. *Пусть* $\xi\sim\begin{pmatrix} x_i \\ \mathrm{P}(x_i) \end{pmatrix}, i\in\mathbb{N}$ *- случайная величина дискретного типа с математическим ожиданием* $\mathrm{E}\xi$, $\varphi(x)$ *- произвольная функция,* $\varphi(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. *Тогда* $\mathrm{E}\varphi(\xi)=\sum\limits_{(i)}\varphi(x_i)\mathrm{P}(\xi=x_i)$.

Утверждение. *Пусть* ξ *- случайная величина абсолютно непрерывного типа с плотностью* $p_\xi(x)$, $\varphi(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *- функция, имеющая положительную производную* $\dfrac{d\varphi(x)}{dx}>0$ *для всех вещественных* x. *Тогда*

$$\mathrm{E}\varphi(\xi)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)p_\xi(x)dx.$$

Моменты и дисперсия случайных величин

Определение. *Моментом k-го порядка случайной величины* ξ *относительно* $a\in\mathbb{R}$ называется математическое ожидание случайной величины $(\xi-a)^k$, если оно определено.

Если $a=0$, то момент называется *начальным*: $\nu_k=\mathrm{E}\xi^k$.

Если $a=\mathrm{E}\xi$, то момент называется *центральным*: $\mu_k=\mathrm{E}(\xi-\mathrm{E}\xi)^k$.

Центральный и начальный моменты однозначно определяют друг друга:

$$\mu_k=\mathrm{E}(\xi-\mathrm{E}\xi)^k=\mathrm{E}\sum_{m=0}^{k}C_k^m\xi^m(-1)^{k-m}(\mathrm{E}\xi)^{k-m}=$$

$$=\sum_{m=0}^{k}(-1)^{k-m}C_k^m(\mathrm{E}\xi)^{k-m}\mathrm{E}\xi^m=\sum_{m=0}^{k}(-1)^{k-m}C_k^m(\nu_1)^{k-m}\nu_m.$$

Аналогично,

$$\nu_k=\mathrm{E}(\xi^k)=\mathrm{E}(\xi-\mathrm{E}\xi+\mathrm{E}\xi)^k=\mathrm{E}\sum_{m=0}^{k}C_k^m(\xi-\mathrm{E}\xi)^m(\mathrm{E}\xi)^{k-m}=$$

$$=\sum_{m=0}^{k}C_k^m(\mathrm{E}\xi)^{k-m}\mathrm{E}(\xi-\mathrm{E}\xi)^m=\sum_{m=0}^{k}C_k^m(\mathrm{E}\xi)^{k-m}\cdot\mu_m.$$

Определение. *Абсолютным моментом* k *-го порядка случайной величины* ξ *относительно* $a\in\mathbb{R}$ называется математическое ожидание случайной величины $|\xi-a|^k$, если оно определено.

Если $a=0$, то это *начальный абсолютный момент*: $\alpha_k=\mathrm{E}|\xi|^k$.

Если $a = \mathrm{E}\xi$, то это *центральный абсолютный момент:* $\beta_k = \mathrm{E}\,|\,\xi - \mathrm{E}\xi\,|^k$.

Определение. *Дисперсией* случайной величины ξ называют её центральный момент второго порядка (или центральный абсолютный момент второго порядка):

$$\mathrm{D}\xi = \mathrm{E}\left(\xi - \mathrm{E}\xi\right)^2 = \mathrm{E}\,|\,\xi - \mathrm{E}\xi\,|^2 = \mu_2 = \beta_2 .$$

Если математическое ожидание, иногда называемое средним значением, характеризует среднее значение случайной величины, полученное в результате случайного эксперимента, то дисперсия характеризует степень «разброса» значений случайной величины относительно её математического ожидания.

Вычислительные формулы для дискретных и абсолютно непрерывных случайных величин выглядят следующим образом:

$$\mathrm{D}\xi = \sum_{(i)} \left(x_i - \mathrm{E}\xi\right)^2 \mathrm{P}\left(x_i\right) = \sum_{(i)} x_i^{\,2}\, \mathrm{P}\left(x_i\right) - \left(\mathrm{E}\xi\right)^2 ;$$

$$\mathrm{D}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - \mathrm{E}\xi\right)^2 p_\xi\left(x\right)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_\xi\left(x\right)dx - \left(\mathrm{E}\xi\right)^2 .$$

Теорема (*о свойствах дисперсии*). *Пусть ξ - случайная величина, обладающая дисперсией. Тогда*

1. $\mathrm{D}\xi \ge 0$.

2.Для любой вещественной константы c верно, что $\mathrm{D}c = 0$.

3. $\mathrm{D}\xi = \mathrm{E}\left(\xi^2\right) - \left(\mathrm{E}\xi\right)^2$.

4.Для любой вещественной константы c верно, что $\mathrm{D}\left(c\xi\right) = c^2\,\mathrm{D}\xi$, $\mathrm{D}\left(c + \xi\right) = \mathrm{D}\xi$.

5.Если ξ_1, ξ_2 - независимые случайные величины с дисперсиями $D\xi_1$, $D\xi_2$, то $\mathrm{D}\left(\xi_1 + \xi_2\right) = \mathrm{D}\xi_1 + \mathrm{D}\xi_2$.

<u>Примеры</u> (вычисления математического ожидания и дисперсии случайных величин).

1). Пусть ξ - индикатор некоторого случайного события, $\xi \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$, тогда $\xi^2 = \xi \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$, и мы получаем:

$$\mathrm{E}\xi = \mathrm{E}\xi^2 = 1\cdot p + 0\cdot(1-p) = p ,$$

$$\mathrm{D}\xi = \mathrm{E}\left(\xi^2\right) - \left(\mathrm{E}\xi\right)^2 = p - p^2 = p\left(1-p\right).$$

2). Пусть $\xi \sim B_i(n,p)$. Мы можем представить эту случайную величину как сумму независимых и одинаково распределенных случайных величин $\xi = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n$, где ξ_i - индикатор того, что в *i*-м испытании произошел успех.

Тогда мы получаем:

$$\mathrm{E}\,\xi=\mathrm{E}\,\xi_1+\mathrm{E}\,\xi_2+\ldots+\mathrm{E}\,\xi_n=np\,.$$

$$\mathrm{D}\,\xi=\mathrm{D}\,\xi_1+\mathrm{D}\,\xi_2+\ldots+\mathrm{D}\,\xi_n=np\left(1-p\right)=npq\,.$$

3). Пусть $\xi\sim\Pi\left(\lambda\right)$. Тогда, используя разложение экспоненты $e^{\lambda}=\sum\limits_{s=0}^{\infty}\frac{\lambda^s}{s!}$ в ряд Тейлора, получаем

$$\mathrm{E}\,\xi=\sum_{k=0}^{\infty}k\,\mathrm{P}\left(\xi=k\right)=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{\left(k-1\right)!}=$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\lambda^s}{s!}=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda\,,$$

$$\mathrm{E}\,\xi^2=\sum_{k=0}^{\infty}k^2\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{\lambda^{k-1}}{\left(k-1\right)!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{s=0}^{\infty}(s+1)\frac{\lambda^s}{s!}=$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\left(\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\lambda^s}{\left(s-1\right)!}+\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\lambda^s}{s!}\right)=\lambda e^{-\lambda}\left(\lambda\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\lambda^{s-1}}{\left(s-1\right)!}+e^{\lambda}\right)=$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\left(\lambda\sum_{t=0}^{\infty}\frac{\lambda^t}{t!}+e^{\lambda}\right)=\lambda e^{-\lambda}\left(\lambda e^{\lambda}+e^{\lambda}\right)=\lambda^2+\lambda\,,$$

$$\mathrm{D}\,\xi=\mathrm{E}\left(\xi^2\right)-\left(\mathrm{E}\,\xi\right)^2=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda\,.$$

4). Пусть ξ имеет геометрическое распределение, тогда

$$\mathrm{E}\,\xi=\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}p=p\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}=p\cdot Q\left(q\right).$$

Степенной ряд $Q\left(x\right)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}k\cdot x^{k-1}$ получается почленным дифференцированием из степенного ряда

$$P\left(x\right)=\sum_{k=0}^{\infty}x^k=\frac{1}{1-x}\,.$$

Следовательно, при всех x таких, что $\left|x\right|<1$, имеем:

$$Q\left(x\right)=\frac{dP\left(x\right)}{dx}=\frac{d\left(\left(1-x\right)^{-1}\right)}{dx}=\frac{1}{\left(1-x\right)^2}\,.$$

В итоге получаем

$$\mathrm{E}\,\xi=p\cdot Q\left(q\right)=p\frac{1}{\left(1-q\right)^2}=p\frac{1}{p^2}=\frac{1}{p}\,;$$

Аналогично находим

$$\mathrm{D}\,\xi=\mathrm{E}\left(\xi^2\right)-\left(\mathrm{E}\,\xi\right)^2,$$

$$\mathrm{E}\,\xi^2=\sum_{k=1}^{\infty}k^2q^{k-1}p=\sum_{k=2}^{\infty}\left(k^2-k\right)q^{k-1}p+\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}p=$$

$$=qp\sum_{k=2}^{\infty}\left(k-1\right)kq^{k-2}+pQ\left(q\right)=qpR\left(q\right)+pQ\left(q\right).$$

Очевидно, что $R(x)=\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)kx^{k-2}=\frac{dQ(x)}{dx}=\frac{2}{(1-x)^3}$, следовательно,

$$\mathrm{E}\,\xi^2=qpR(q)+pQ(q)=qp\frac{2}{(1-q)^3}+\frac{1}{p}=\frac{2q}{p^2}+\frac{1}{p}=\frac{1+q}{p^2},$$

$$\mathrm{D}\xi=\frac{1+q}{p^2}-\left(\frac{1}{p}\right)^2=\frac{q}{p^2}.$$

5). Пусть имеется случайная величина, равномерно распределенная на отрезке: $\xi\sim U[a,b]$. Тогда

$$p_\xi(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & x\in[a,b]\\ 0, & x\notin[a,b]\end{cases}.$$

$$\mathrm{E}\,\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}xp_\xi(x)\,dx=\int_a^b\frac{x}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b=$$

$$=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{b^2-a^2}{2}=\frac{a+b}{2},$$

$$\mathrm{E}\,\xi^2=\int_a^b\frac{x^2}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_a^b=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{b^3-a^3}{3}=\frac{a^2+ab+b^2}{3},$$

$$\mathrm{D}\xi=\mathrm{E}\left(\xi^2\right)-\left(\mathrm{E}\,\xi\right)^2=\frac{a^2+ab+b^2}{3}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{a^2-2ab+b^2}{12}=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

6). Пусть дана нормально распределенная случайная величина $\xi\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$. Тогда

$$\mathrm{E}\,\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}xp_\xi(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}d\left(\frac{x}{\sigma}\right).$$

Сделаем замену $\frac{x-\mu}{\sigma}=t$. В этом случае

$$\mathrm{E}\,\xi=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma t+\mu)e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}dt+\mu\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Используя то, что первый интеграл - от нечетной функции в симметричных пределах, а под знаком второго стоит плотность стандартного нормального закона, получаем, что $\mathrm{E}\,\xi=0+\mu\cdot 1=\mu$.

Используя опять замену $x=\sigma t+\mu$, находим

$$\mathrm{E}\left(\xi^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sigma^2 t^2 + 2\sigma\mu t + \mu^2\right) e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$

$$= \mu^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{2\sigma \cdot \mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$

$$= \mu^2 + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt .$$

Используя формулу интегрирования по частям, находим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} -t \left(e^{-\frac{t^2}{2}} (-t) dt \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} -t d \left(e^{-\frac{t^2}{2}} \right) =$$

$$= -t e^{-\frac{t^2}{2}} \Bigg|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0 + \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi} .$$

Тогда $\mathrm{E}\left(\xi^2\right) = \mu^2 + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} = \mu^2 + \sigma^2$.

$$\mathrm{D}\xi = \mathrm{E}\left(\xi^2\right) - \left(\mathrm{E}\xi\right)^2 = \mu^2 + \sigma^2 - \left(\mu\right)^2 = \sigma^2 .$$

Из примера 6 следует, что запись $\xi \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$ можно прочитать как «случайная величина ξ распределена по нормальному знаку с математическим ожиданием (средним) μ и дисперсией σ^2».

7). Пусть $\xi \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. Тогда, используя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\mathrm{E}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_\xi(x) dx = \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-x\lambda} dx = \int_0^{+\infty} -x(-\lambda e^{-x\lambda} dx) = \int_0^{+\infty} -x d e^{-x\lambda} =$$

$$= \left(-x e^{-x\lambda}\right)\Bigg|_0^{\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x\lambda} dx = 0 + \frac{e^{-x\lambda}}{\lambda}\Bigg|_0^{\infty} = 0 - \left(0 - \frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda};$$

$$\mathrm{E}\xi^2 = \int_0^{+\infty} x^2 \lambda e^{-x\lambda} dx = \int_0^{+\infty} -x^2 d e^{-x\lambda} = \left(-x^2 e^{-x\lambda}\right)\Bigg|_0^{\infty} + \int_0^{+\infty} 2x e^{-x\lambda} dx =$$

$$= 2\int_0^{+\infty} x e^{-x\lambda} dx = \frac{2}{\lambda} \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-x\lambda} dx = \frac{2}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda^2},$$

$$\mathrm{D}\xi = \mathrm{E}\left(\xi^2\right) - \left(\mathrm{E}\xi\right)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Теорема (*неравенство Чебышева*). *Пусть дано вероятностное пространство* $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathrm{P})$, $\xi = \xi(\omega)$ *- неотрицательная случайная величина. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *верно неравенство* $\mathrm{P}\left(\xi \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{E}\xi}{\varepsilon}$.

Следствие к данной теореме докажите самостоятельно.

Следствие. *Для любой случайной величины* ξ, *заданной на произвольном вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathrm{P})$ *верны следующие неравенства*

1. $\mathrm{P}\left(|\xi| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{E}|\xi|}{\varepsilon}$,

2. $\mathrm{P}\left(|\xi| \geq \varepsilon\right) = \mathrm{P}\left(\xi^2 \geq \varepsilon^2\right) \leq \varepsilon^{-2} \cdot \mathrm{E}\left(\xi^2\right)$,

3. (***классическая форма неравенства Чебышева***) *Для любой случайной величины, дисперсия которой определена, верно неравенство* $\mathrm{P}\left(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{D}\xi}{\varepsilon^2}$.

<u>Ковариация и коэффициент корреляции двух случайных величин</u>

Определение. *Ковариацией* двух случайных величин ξ и η называется величина

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \mathrm{E}(\xi - \mathrm{E}\xi)(\eta - \mathrm{E}\eta) = \mathrm{E}\xi\eta - \mathrm{E}\xi \cdot \mathrm{E}\eta .$$

Для любых случайных величин ξ и η верно равенство:

$$\mathrm{D}(\xi + \eta) = \mathrm{D}\xi + \mathrm{D}\eta - 2\operatorname{cov}(\xi,\eta).$$

Если случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы, то $\operatorname{cov}(\xi_1,\xi_2) = 0$.

Определение. *Коэффициентом корреляции* двух случайных величин ξ и η с конечной дисперсией называется величина

$$\rho(\xi,\eta) = \frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{\mathrm{D}\xi\,\mathrm{D}\eta}} = \frac{\mathrm{E}(\xi - \mathrm{E}\xi)(\eta - \mathrm{E}\eta)}{\sqrt{\mathrm{D}\xi\,\mathrm{D}\eta}} = \frac{\mathrm{E}\xi\eta - \mathrm{E}\xi\,\mathrm{E}\eta}{\sqrt{\mathrm{D}\xi\,\mathrm{D}\eta}}.$$

Полезно знать, что операция вычитания математического ожидания из случайной величины называется её *центрированием*, а процесс деления на корень из дисперсии – *нормированием*. Это связано с тем, что после того как над любой случайной величиной проделать обе эти операции, то получим величину со средним 0 и дисперсией 1. Проверьте это самостоятельно.

Теорема (*о свойствах коэффициента корреляции*). *Для произвольных случайных величин ξ и η с ненулевой дисперсией верно:*

1. если ξ и η независимы, то $\rho(\xi,\eta) = 0$;

2. для любых вещественных a и b верно равенство
$\rho(\xi + a,\eta + b) = \rho(\xi,\eta)$*;*

3. $|\rho(\xi,\eta)| \leq 1$.

Следствие. *Модуль коэффициента корреляции двух случайных величин ξ и η равен 1 тогда и только тогда, когда существуют вещественные числа $a \neq 0$ и c такие, что* $\mathrm{P}(\eta = a\xi + c) = 1$.

При этом константа a и $\rho(\xi,\eta)$ имеют одинаковый знак, т.е. если $a > 0$, то $\rho(\xi,\eta) = 1$, а если $a < 0$, то $\rho(\xi,\eta) = -1$.

Определение. Если $\rho(\xi,\eta) = 0$, то случайные величины ξ и η называются *некоррелированными*.

Все независимые случайные величины согласно первому пункту предыдущей теоремы некоррелированы, но не все некоррелированные величины независимы. Это доказывает следующий пример.

Пример. Пусть дана следующая случайная величина. $\xi \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.
Очевидно, что $\mathrm{E}\xi = 0$, $\mathrm{D}\xi > 0$ (покажите это самостоятельно).

Пусть $\eta = \xi^2$. Тогда $\eta \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$. Покажите, что $\mathrm{D}\eta > 0$.

Так как $\xi\eta = \xi^3 = \xi$, то $\mathrm{E}\xi\eta = 0$, следовательно,

$$\rho(\xi,\eta) = \frac{\mathrm{E}\xi\eta - \mathrm{E}\xi\,\mathrm{E}\eta}{\sqrt{\mathrm{D}\xi\,\mathrm{D}\eta}} = 0.$$

Мы получили, что величины ξ и η некоррелированны. Легко показать, что они не являются независимыми.

Двумерное нормальное распределение

Определение. Случайный вектор $\bar{\xi} = (\xi_1,...,\xi_n)$ имеет *n–мерное нормальное распределение*, если его плотность имеет вид

$$p_{\bar{\xi}}(x_1,...,x_n) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n \sqrt{\det\Sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(x^{\downarrow}-\mu^{\downarrow}\right)^T \Sigma^{-1}\left(x^{\downarrow}-\mu^{\downarrow}\right)},$$

где $x^{\downarrow} = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ - вектор-столбец, $\left(a^{\downarrow}\right)^T$ - транспонированный вектор $a^{\downarrow}$, $\det\Sigma$- определитель матрицы Σ, $\Sigma = \left\|\mathrm{cov}\left(\xi_i,\xi_j\right)\right\|_{n\times n}$ - *ковариационная матрица вектора* $\bar{\xi} = (\xi_1,...,\xi_n)$, составленная из попарных ковариаций случайных величин $\xi_1,...,\xi_n$, $\left(\mu^{\downarrow}\right)^T = (\mathrm{E}\xi_1,...,\mathrm{E}\xi_n)$ - вектор математических ожиданий случайных величин ξ_1, …, ξ_n.

Для этого распределения используется обозначение

$\bar{\xi} = (\xi_1,...,\xi_n) \sim N\left(\vec{\mu},\Sigma\right)$.

Матрицу Σ еще обозначают как $\mathrm{cov}\left(\xi^{\downarrow},\vec{\xi}\right)$.

Определение. Пусть $Z_{m\times n} = \left\|\xi_{ij}\right\|_{m\times n}$ - матрица размеров $m\times n$ с элементами – случайными величинами ξ_{ij} с конечными математическими ожиданиями $\mathrm{E}\xi_{ij} < +\infty$. Тогда по определению *математическим ожиданием матрицы* $Z_{m\times n}$ называется матрица, составленная из математических ожиданий её элементов:

$\mathrm{E}Z = \left\|\mathrm{E}\xi_{ij}\right\|_{m\times n}$.

Легко показать, что

1). если $D = A \times Z \times B + C$, где *A, B, C* –подходящие по размеру числовые матрицы, то $\mathrm{E} D = A \times (\mathrm{E} Z) \times B + C$;

2). верно равенство

$\Sigma = \operatorname{cov}(\xi^{\downarrow}, \vec{\xi}) = \mathrm{E}\left(\xi^{\downarrow} - E\xi^{\downarrow}\right) \cdot \left(\xi^{\downarrow} - E\xi^{\downarrow}\right)^{T}$.

Теперь рассмотрим случай, когда $n = 2$, т.е. рассмотрим двумерное нормальное распределение.

Пусть $\overline{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$, $\overline{\mu} = \mathrm{E}\,\overline{\xi} = (\mu_1, \mu_2)$, где $\mu_1 = \mathrm{E}\xi_1$, $\mu_2 = \mathrm{E}\xi_2$.

Пусть $\sigma_1^{\ 2} = \mathrm{D}\xi_1$, $\sigma_2^{\ 2} = \mathrm{D}\xi_2$, тогда

$\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) = \rho(\xi_1, \xi_2)\sqrt{\mathrm{D}\xi_1\,\mathrm{D}\xi_2} = \sigma_1\sigma_2\rho(\xi_1, \xi_2)$,

$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^{\ 2} & \sigma_1\sigma_2\rho \\ \sigma_1\sigma_2\rho & \sigma_2^{\ 2} \end{pmatrix}$, где $\rho(\xi_1, \xi_2) = \rho$.

Легко вычислить, что

$$\det\Sigma = \sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_1^2\sigma_2^2\rho^2 = \sigma_1^2\sigma_2^2\left(1 - \rho^2\right).$$

Следовательно, используя алгебраические методы, можно найти, что

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{\sigma_1^{\ 2}\sigma_2^{\ 2}\left(1-\rho^2\right)}\begin{pmatrix} \sigma_2^{\ 2} & -\sigma_1\sigma_2\rho \\ -\sigma_1\sigma_2\rho & \sigma_1^{\ 2} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{1-\rho^2}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sigma_1^{\ 2}} & -\dfrac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} \\ -\dfrac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} & \dfrac{1}{\sigma_2} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$-\frac{1}{2}\left(x^{\downarrow} - \mu^{\downarrow}\right)^{T}\Sigma^{-1}\left(x^{\downarrow} - \mu^{\downarrow}\right) = -\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left(\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^{\ 2}} - \right.$$

$$\left. -2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^{\ 2}}\right).$$

Следовательно, плотность двумерного нормального распределения имеет вид:

$$p_{\overline{\xi}}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left(\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^{\ 2}} - \right.\right.$$

$$\left.\left. -2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^{\ 2}}\right)\right),$$

при $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, $|\rho| < 1$.

Если $\rho = \pm 1$, то плотность не определена.

Для двумерного нормального распределения иногда используют следующее обозначение: $\overline{\xi} = (\xi_1, \xi_2\ ) \sim N\left(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^{\ 2}, \sigma_2^{\ 2}, \rho\right)$

Утверждение. *Если даны две нормальные случайные величины* $\xi_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ *и* $\xi_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, *то они независимы тогда и только тогда, когда их коэффициент корреляции равен нулю, т.е.*

$\rho(\xi_1, \xi_2) = 0$.

Утверждение. *Если дан случайный вектор* $\overline{\xi} = (\xi_1, \xi_2) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$, *то компоненты его нормальны:* $\xi_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $\xi_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$.

7. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

Определение. Говорят, что последовательность случайных величин $\{\xi_n, n \in N\}$ *сходится по вероятности* к случайной величине ξ при $n \to \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ верно, что $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}\{|\xi_n - \xi| \ge \varepsilon\} = 0$.

Данное соотношение может быть заменено на эквивалентное $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}\{|\xi_n - \xi| < \varepsilon\} = 1$.

Для этого вида сходимости применяют обозначение

$\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} \xi$.

Определение. Говорят, что последовательность случайных величин $\{\xi_n, n \in N\}$ *сходится почти наверное* или *с вероятностью 1* к случайной величине ξ при $n \to \infty$, если вероятность события, включающего все элементарные события $\omega \in \Omega$ такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)$, равна 1:

$\mathrm{P}\{\omega \in \Omega : \xi_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi(\omega)\} = 1$,

или, что эквивалентно, вероятность события, включающего все элементарные события $\omega \in \Omega$ такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n(\omega) \ne \xi(\omega)$, равна 0.

Для этого вида сходимости применяют обозначение

$\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} \xi$ или $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi\ (\mathrm{P} = 1)$.

Определение. Говорят, что последовательность случайных величин $\{\xi_n, n \in N\}$ *сходится в среднем порядка* r, где $r > 0$, к случайной величине ξ при $n \to \infty$, если $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{E}|\xi_n - \xi|^r = 0$.

Для этого вида сходимости применяют обозначение

$\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{r}} \xi$.

Определение. Говорят, что последовательность случайных величин $\{\xi_n, n \in N\}$ с функциями распределения $F_n(x)$ *сходится по распределению* к случайной величине ξ с функцией распределения $F(x)$ при $n \to \infty$, если для всех точек непрерывности $F(x)$ выполняется

$\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$.

Для этого вида сходимости применяют обозначение

$\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{D}} \xi$.

Теорема. Пусть дана последовательность случайных величин $\{\xi_n, n \in N\}$ и случайная величина ξ. Тогда

1. если $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} \xi$, то $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} \xi$;
2. если $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{r}} \xi$, то $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} \xi$;
3. если $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} \xi$, то $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{D}} \xi$.

Убедимся на конкретном примере, что в обратную сторону в общем случае утверждение будет неверным.

<u>Пример.</u> Пусть в качестве пространства элементарных событий выступает полуинтервал $\Omega = [0;1)$. Рассмотрим вероятностное пространство в широком смысле $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathrm{P})$, которое мы определили в теме 4.

Для любого $n \in \mathbb{N}$ построим разбиение полуинтервала Ω:

$$[0;1) = \left[0;\frac{1}{n}\right) \cup \left[\frac{1}{n};\frac{2}{n}\right) \cup \ldots \cup \left[\frac{n-1}{n};1\right) \quad .$$

Для всех $n \in \mathbb{N}$ и $k \in \overline{1,n}$ рассмотрим случайные величины $\xi_{nk} = I\left(\omega \in \left[\frac{k-1}{n};\frac{k}{n}\right)\right)$.

Рассмотрим последовательность случайных величин $\xi_{11}, \xi_{21}, \xi_{22}, \xi_{31}, \xi_{32}, \xi_{33}, \xi_{41}, \ldots$. Данная последовательность по вероятности будет сходиться к нулю, т.к.

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{|\xi_{nk} - \xi| \geq \varepsilon\right\} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{|\xi_{nk}| \geq \varepsilon\right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{\omega \in \left[\frac{k-1}{n};\frac{k}{n}\right)\right\} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 \quad .$$

Итак, $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} \xi$.

Покажите самостоятельно, что, кроме того, $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{r}} \xi$, но не выполняется, что $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} \xi$.

<u>Закон больших чисел</u>

Определение. Говорят, что последовательность случайных величин $\{\xi_n, n \in N\}$ подчиняется *закону больших чисел*, если последовательность случайных величин вида $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - \mathrm{E}\xi_k)$ сходится по вероятности к нулю:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - \mathrm{E}\xi_k) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} 0,$$

или, если обозначить $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, то

$$\frac{S_n - \mathrm{E}\,S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} 0.$$

Сформулируем закон больших чисел в форме Чебышева.

Теорема (*Чебышева*). *Пусть* $\{\xi_n, n \in N\}$ *- последовательность независимых случайных величин и существует* $C \in \mathbb{R}$ *такая, что* $D\xi_n \leq C$ *для* *любого $n \in \mathbb{N}$ (т.е. дисперсии равномерно ограниченны). Тогда последовательность $\{\xi_n, n \in N\}$ подчиняется закону больших чисел.*

Рассмотрим схему Бернулли с вероятностью успеха p. Пусть S_n- число успехов при *n* испытаниях. Тогда $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$, где $\xi_i \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & q \end{pmatrix}$ - индикатор того, что в *i*-м испытании произошел успех. Очевидно, что $\mathrm{E}\xi_i = p$, $\mathrm{D}\xi_i = pq$. Проверьте, что $\mathrm{D}\xi_i = pq = p(1-p) \le \frac{1}{4}$.

Обозначим $\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{E}\xi_k = \frac{\nu_n}{n}$, где ν_n - число успехов в *n* испытаниях. Тогда

$ES_n = pn$.

К последовательности $\{\xi_n, n \in N\}$ применим закон больших чисел (по теореме Чебышева), следовательно, т.к. $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{E}\xi_k = \frac{\nu_n}{n} - \frac{np}{n} = \frac{\nu_n}{n} - p$, то $\frac{\nu_n}{n} - p \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} 0$. Итак, мы доказали

Следствие (*закон больших чисел в форме Бернулли*). *Для биномиальной схемы во введенных выше обозначениях верно, что* $\frac{\nu_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} p$.

Сформулируем еще две полезные теоремы

Теорема (*Хинчина*). *Пусть $\{\xi_n, n \in N\}$ - последовательность попарно независимых одинаково распределенных случайных величин с конечным математическим ожиданием (т.е. $\mathrm{E}\xi_n = a$). Тогда последовательность $\{\xi_n, n \in N\}$ подчиняется закону больших чисел.*

Теорема (*Маркова*). *Пусть $\{\xi_n, n \in N\}$ - последовательность случайных величин, для которых выполняется свойство*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\mathrm{D}\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right) = 0.$$

Тогда последовательность $\{\xi_n, n \in N\}$ подчиняется закону больших чисел.

<u>Центральная предельная теорема</u>

Определение. Говорят, что последовательность случайных величин $\{\xi_n, n \in N\}$ подчиняется *центральной предельной теореме*, если для случайных величин $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$, $\widetilde{S_n} = \frac{S_n - \mathrm{E}S_n}{\sqrt{\mathrm{D}S_n}}$ выполняется, что последовательность $\{\widetilde{S_n}, n \in N\}$ сходится по распределению к стандартной нормальной случайной величине:

$\widetilde{S_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{D}} \xi$, где $\xi \sim N(0,1)$.

Теорема (*центральная предельная теорема для независимых, одинаково распределенных случайных величин*). *Пусть* $\{\xi_n, n \in N\}$ - *последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечной и ненулевой дисперсией (т.е.* $\mathrm{D}\xi_n = \sigma^2 > 0$*). Тогда последовательность* $\{\xi_n, n \in N\}$ *подчиняется центральной предельной теореме.*

Сформулируем полезную теорему:

Теорема (*Ляпунова*). *Пусть* $\{\xi_n, n \in N\}$ *- последовательность независимых случайных величин, у которых определены математическое ожидание и ненулевая дисперсия (т.е.* $\mathrm{E}\,\xi_n$ *существует и* $\mathrm{D}\xi_n = \sigma_n^2 > 0$*). Обозначим* $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. *Если выполнено условие Ляпунова, т.е. существует* $\delta > 0$ *такое, что*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{\mathrm{D}\,S_n}\right)^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}\left(\left|\xi_k - E\xi_k\right|^{2+\delta}\right) = 0,$$

то последовательность $\{\xi_n, n \in N\}$ *подчиняется центральной предельной теореме.*

Центральная предельная теорема для независимых и одинаково распределенных случайных величин и интегральная теорема Муавра-Лапласа являются следствиями теоремы Ляпунова.

8 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Математическая статистика – это прикладная математическая дисциплина, родственная теории вероятностей. Она базируется на понятиях и методах теории вероятностей, но решает свои специфические задачи своими методами.

Математическая модель случайных явлений, изучаемых в теории вероятностей, основывается на понятии вероятностного пространства $\left(\Omega, \mathfrak{A}, \mathrm{P}\right)$. При этом в каждой конкретной ситуации функция вероятностей P, заданная на сигма-алгебре $\mathfrak{A}$, считается полностью определенной, и основной задачей теории вероятностей является разработка методов нахождения вероятностей различных сложных событий (исходя из известных вероятностей более простых событий) для данной вероятностной модели.

Однако на практике при изучении конкретного эксперимента вероятность P редко известна полностью. Часто можно изначально утверждать лишь то, что P является элементом некоторого заданного класса функций вероятностей $\mathfrak{P}$ (пэ готическое). Этот класс $\mathfrak{P}$ может включать в себя все функции вероятностей, которые можно задать на $\mathfrak{A}$ (т. е. ситуация полной неопределенности). В других же случаях $\mathfrak{P}$ представляет собой некоторое более узкое семейство вероятностей, заданное в той или иной явной форме. В любом случае $\mathfrak{P}$ - это совокупность допустимых в данной ситуации (для описания данного эксперимента) функций вероятностей P. Если задан класс $\mathfrak{P}$, то говорят, что имеется *вероятностно – статистическая* (или просто *статистическая*) *модель*, понимая под этим набор $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathfrak{P})$.

Пример. Пусть в качестве эксперимента мы рассматриваем схему Бернулли с вероятностью успеха p, а исход эксперимента в нем – $\omega \in \{0,1\}^n$,

$\Omega = \{\omega = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n), \varepsilon_i \in \{0,1\}\}$,

$\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$ - множество всех подмножеств Ω,

$p(\omega) = p^{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i} q^{n - \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i}$.

Пусть теперь вероятность успеха неизвестна. Обозначив её через θ, мы можем только сказать, что $\theta \in \Theta = [0,1]$. Поэтому здесь семейство допустимых вероятностей имеет вид

$$\mathfrak{P} = \{\mathrm{P}_\theta, \theta \in \Theta\},$$

где P_θ задается вероятностями $\mathrm{P}_\theta(\omega) = \theta^{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i} (1-\theta)^{n - \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i}$.

Исходя из статистической модели, выделяют следующие основные задачи математической статистики, которые часто встречаются на практике.

1. Определение неизвестных параметров распределения.

Часто теоретические соображения позволяют сделать вывод о типе функции распределения интересующей нас случайной величины: в примере – это случайная величина, равная числу успехов в исходе, т. е. бернуллиевская с неизвестной вероятностью успеха θ, с функцией распределения $F_\theta(x)$, лежащей в некотором классе $\mathfrak{F}$ (эф готическое):

$$F_\theta(x) \in \mathfrak{F}.$$

Если функция распределения из класса $\mathfrak{F}$ задана с точностью до значений некоторого параметра $\theta \in \Theta$, то такая статистическая модель называется *параметрической*:

$$\mathfrak{F} = \{F_\theta(x) = F(x, \theta), \theta \in \Theta\}.$$

2. Определение неизвестной функции распределения.

Если неизвестен тип наблюдаемой случайной величины, то говорят уже о *непараметрической* статистической модели.

3. Задача проверки правдоподобия гипотез (т. е. предположения о виде функции распределения) по опытным данным.

В этом случае мы пытаемся ответить на вопрос, совместимы ли наблюдаемые значения с гипотезой о том, что случайная величина имеет распределение $F(x)$.

Итак, статистическая модель описывает такие ситуации, когда в вероятностной модели изучаемого эксперимента имеется та или иная неопределенность в задании вероятности P, и задача математической статистики состоит в том, чтобы уменьшить эту неопределенность, используя информацию, доставленную наблюдаемыми исходами эксперимента (т. е. статистическими данными).

В большинстве случаев исходные статистические данные – это результат наблюдения некоторой конечной совокупности случайных величин $\left(\xi_1,\ldots,\xi_n\right)$, характеризующей исход изучаемого эксперимента.

Определение. *Выборкой из распределения* $F\left(x\right)$ *объема n* называется наблюдение над *n* – мерным случайным вектором $\bar{\xi}=\left(\xi_1,\ldots,\xi_n\right)$, координаты которого являются независимыми, одинаково распределенными случайными величинами с функциями распределения $F\left(x\right)=\mathrm{P}\left(\xi_i<x\right)$, $i\in\overline{1,n}$.

Будем обозначать выборку следующим образом:

$$\left(x_1,\ldots,x_n\right).$$

Множество всех значений или наблюдений над $\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ мы будем называть *выборочным пространством*.

Под *наблюдением* мы будем понимать значение вектора $\left(\xi_1\left(\omega\right),\ldots,\xi_n\left(\omega\right)\right)$ при некотором элементарном событии ω.

На практике часто вектор $\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ является вектором n-кратного наблюдения одной и той же случайной величины.

Прежде чем переходить к детальному анализу наблюдаемых статистических данных, обычно производят их предварительную обработку. Иногда результаты такой обработки уже сами по себе дают наглядную картину исследуемого явления. В большинстве же случаев они служат исходным материалом для получения более подробных статистических выводов.

Определение. Если элементы выборки упорядочить в порядке неубывания, то полученный вектор называется *вариационным рядом* и обозначается

$$\left(x_{(1)},x_{(2)},\ldots x_{(n)}\right),$$

где $x_{(1)}\le x_{(2)}\le..\le x_{(n)}$.

Элементы вариационного ряда называют *порядковыми статистиками* с соответствующим номером.

К примеру, $x_{(1)}=\min\left\{x_1,\ldots,x_n\right\}$.

Определение. Пусть $x\in\mathbb{R}$. Через $\nu_n\left(x\right)$ обозначим число элементов выборки, строго меньших чем x:

$$\nu_n(x) = \left|\left\{x_i \in \{x_1, \dots, x_n\} : x_i < x, i \in \overline{1,n}\right\}\right| = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ind}(x_i < x).$$

Функция

$$F_n(x) = \frac{\nu_n(x)}{n},\ x \in \mathbb{R}$$

называется *эмпирической функцией распределения*.

По определению, функция распределения $F(x)$ - это вероятность того, что $\{\xi < x\}$, а эмпирическая функция распределения $F_n(x)$ - это относительная частота события $\{\xi < x\}$.

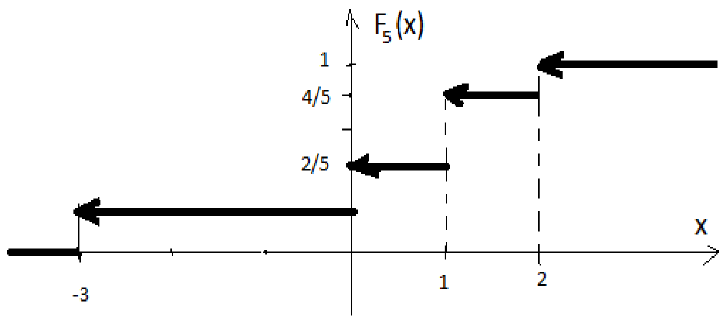
Теорема (***Гливенко***). *Пусть* $F(x)$ – *функция распределения случайной величины* ξ*, и* $F_n(x)$ *- её эмпирическая функция распределения.*

Тогда $\mathrm{P}\left\{\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left|F_n(x) - F(x)\right| \underset{n\to\infty}{\to} 0\right\} = 1$.

Пример. Пусть некоторый эксперимент проводится 5 раз. В результате мы получаем выборку:

$(x_1, \dots, x_5) = (-3, 1, 2, 1, 0)$.

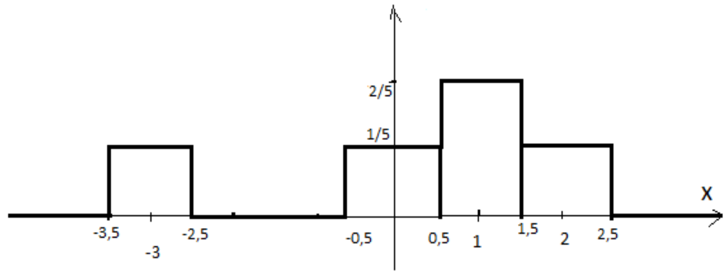
Вариационный ряд этой выборки: $\left(x_{(1)}, x_{(2)}, \dots x_{(5)}\right) = (-3, 0, 1, 1, 2)$, а график эмпирической функции распределения будет выглядеть следующим образом:



Определение. Вся прямая разбивается на равные промежутки длиной h. Обозначим через ν_k число элементов выборки, попавших в к – й интервал разбиения. Над каждым интервалом построим прямоугольник высотой $\dfrac{\nu_k}{n \cdot h}$. Полученная фигура называется *гистограммой*.

Пример. В условиях предыдущего примера построим гистограмму.

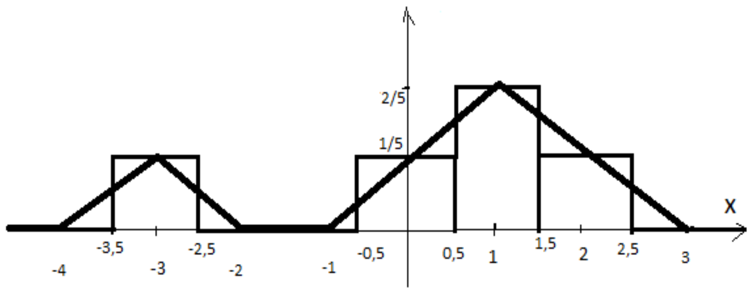
Выберем в качестве начала промежутка точку $0{,}5$, а в качестве длины $h = 1$.



Заметим, что в качестве начала промежутка можно выбрать любую точку вещественной прямой, но на практике ее стараются выбрать так, чтобы ни одна точка выборки не попала на границу промежутков.

По теореме Бернулли с ростом *n* площадь каждого из прямоугольников гистограммы, построенного над *k*-м интервалом, сходится к вероятности попасть в этот интервал (проверьте это самостоятельно).

Определение. Если построена гистограмма, то *полигоном частот* будет называться ломаная, состоящая из отрезков прямых, последовательно соединяющих ординаты, соответствующие средним точкам интервалов:



Полигон частот и гистограмма, исходя из определений, взаимно-однозначно определяют друг друга.

С помощью построения вариационного ряда, эмпирической функции распределения, гистограммы и (или) полигона частот проводится первичная статистическая обработка результатов эксперимента.

Введем новое определение.

Определение. *Статистикой* называется всякая функция f от выборки $(x_1,...,x_n)$, в случае если $f(\xi_1,...,\xi_n)$ является случайной величиной.

Итак, у нас имеется случайная величина ξ с теоретической функцией распределения $F(x)$. Мы измеряем ξ n раз и получаем выборку объёма *n* $(x_1,...,x_n)$ с эмпирической функцией распределения $F_n(x)$. По этой выборке мы можем построить новые характеристики (аналогичные уже полученным для случайной величины) .

Определение. Статистика

$$M_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k$$

называется *начальным выборочным моментом k-го порядка*. Если k=1, то начальный выборочный момент $M_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ называется *выборочным средним* (так как является средним арифметическим элементов выборки) и обозначается

$$M_1 = \overline{x}.$$

Статистика

$$S_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^k$$

называется в*ыборочным центральным моментом k – го порядка*. При $k = 2$ центральный выборочный момент $S_2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k - \overline{x}\right)^2$ называется *выборочной дисперсией* и обозначается

$$S_2 = S^2.$$

Обозначим через $\mu_k = \mathrm{E}\,\xi^k$ *k*-й начальный (теоретический) момент случайной величины ξ, а через $\nu_k = \mathrm{E}\left(\xi - \mathrm{E}\,\xi\right)^k$ - *k*-й центральный (теоретический) момент.

Все выборочные характеристики являются случайными величинами, поэтому мы имеем право говорить об их распределении и считать их моменты:

$$\mathrm{E}\,\mathrm{M}_k = \mathrm{E}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\,x_i^k = \frac{1}{n}\cdot n\cdot\mathrm{E}\,\xi^k = \mu_k,$$

$$\mathrm{D}\,\mathrm{M}_k = \mathrm{D}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{D}\,x_i^k =$$

$$= \frac{\mathrm{E}\,\xi^{2k} - \left(\mathrm{E}\,\xi^k\right)^2}{n} = \frac{\mu_{2k} - \left(\mu_k\right)^2}{n}.$$

<u>Пример.</u> Если k=1 и $M_1 = \overline{x}$, то

$\mathrm{E}\,\overline{x} = \mathrm{E}\,\xi = \mu_1$ и $\mathrm{D}\,\overline{x} = \mu_2 - \left(\mu_1\right)^2 / n = \mathrm{D}\,\xi / n$.

Найдите самостоятельно $\mathrm{E}\,S^2$, $\mathrm{D}\,S^2$.

Теорема. *Для случая выборки из любой случайной величины выполняется*

$$M_k \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} \mu_k.$$

Теорема. *Для случая выборки из любой случайной величины выполняется*

$$S_k \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} \nu_k.$$

Определение. Последовательность случайных величин η_n *называется асимптотически нормальной с параметрами* $\left(\mu_n, \sigma_n^2\right)$, если последовательность $\left(\eta_n - \mu_n\right) / \sqrt{\sigma_n^2}$ сходится по распределению к стандартной нормальной случайной величине.

Теорема. *Для случая выборки из любой случайной величины, для которой* $0 < \mu_{2k} - \left(\mu_k\right)^2 < \infty$*, последовательность начальных выборочных моментов* M_k *асимптотически нормальна с параметрами* $\left(\mu_k, \dfrac{\mu_{2k} - \mu_k^2}{n}\right)$.

9 ТОЧЕЧНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть мы наблюдаем случайную величину ξ с функцией распределения $F\left(x, \theta_1, ..., \theta_m\right)$, зависящей от одного или нескольких параметров $\theta_1, ..., \theta_m$. Пусть вид функции распределения $F\left(x\right)$ известен, а параметры $\theta_1, ..., \theta_m$ неизвестны.

Наша задача состоит в том, чтобы по наблюдениям за случайной величиной построить оценки неизвестных параметров

$$\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1\left(x_1, ..., x_n\right);$$
$$\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2\left(x_1, ..., x_n\right);$$
$$\dots$$
$$\hat{\theta}_m = \hat{\theta}_m\left(x_1, ..., x_n\right).$$

Любую статистику $g\left(x_1, ..., x_n\right)$, зависящую только от выборки, можно считать *оценкой параметра* θ, или *точечной оценкой*. Но возникает вопрос, насколько хороша или плоха данная оценка.

Определение. Оценка $\hat{\theta} = \hat{\theta}\left(x_1, ..., x_n\right)$ называется *несмещенной*, если $\mathrm{E}\hat{\theta} = \theta$; и *асимптотически несмещенной*, если $\mathrm{E}\hat{\theta}\left(x_1, ..., x_n\right) \underset{n\to\infty}{\to} \theta$.

Разность $\mathrm{E}\hat{\theta} - \theta = b\left(\hat{\theta}\right)$ называется *смещением оценки*.

Пример. В случае выборки из произвольной случайной величины, согласно доказанному ранее результату, $\mathrm{E}\mathrm{M}_k = \mu_k$. Следовательно, статистика M_k - несмещенная оценка для μ_k. В частности, $\bar{x}$ - несмещенная оценка для математического ожидания $\mathrm{E}\xi$.

Пусть $\xi \sim \mathrm{N}\left(\theta_1, \theta_2\right)$, тогда $\bar{x}$ - несмещенная оценка для параметра θ_1.

$\mathrm{E}S_2 = \dfrac{n-1}{n}\mathrm{D}\xi$, следовательно, S_2 - смещенная оценка для θ_2. Смещение её равно

$$b\left(S_2\right) = -\frac{1}{n}\mathrm{D}\xi.$$

$S_2^* = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2$ - несмещенная оценка для $\mathrm{D}\,\xi$.

S_2 - асимптотически несмещенная оценка для θ_2.

Определение. Оценка $\hat{\theta}$ называется *состоятельной*, если $\hat{\theta}\left(x_1,...,x_n\right)\xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}}\theta$.

Пример. Согласно двум теоремам из предыдущей темы

$$\mathrm{M}_k\xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}}\mu_k,\ S_k\xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}}\nu_k.$$

Следовательно, эти выборочные моменты – состоятельные оценки для соответствующих теоретических.

Исторически первым общим методом получения оценок неизвестных параметров распределения является предложенный К. Пирсоном в 1894 году метод моментов, состоящий в приравнивании эмпирических начальных моментов теоретическим и составлении системы из m уравнений (по числу параметров):

$$\begin{cases}\mathrm{M}_1 = \mu_1\left(\theta_1,...,\theta_m\right)\\ ...\\ \mathrm{M}_m = \mu_m\left(\theta_1,...,\theta_m\right)\end{cases}.$$

Решением этой системы является набор оценок $\left(\hat{\theta}_1,...,\hat{\theta}_m\right)$, называемых *оценками, полученными с помощью метода моментов*.

Пример. Пусть выборка производится из нормально распределенной случайной величины с двумя неизвестными параметрами, т. е. $\xi \sim \mathrm{N}\left(\theta_1,\theta_2\right)$.

$\mathrm{E}\xi = \theta_1 = \mu_1$,

$\mathrm{D}\xi = \mathrm{E}\xi^2 - \left(\mathrm{E}\xi\right)^2 = \mu_2 - \left(\mu_1\right)^2 = \theta_2$,

$\mu_2 = \theta_2 + \theta_1^2$.

Согласно методу моментов, получаем систему из двух уравнений

$$\begin{cases}\mathrm{M}_1 = \theta_1\\ \mathrm{M}_2 = \theta_2 + \left(\theta_1\right)^2\end{cases},$$

где $\mathrm{M}_1 = \overline{x}$, $\mathrm{M}_2 = S_2^2 + \left(\overline{x}\right)^2$,

$$\begin{cases}\overline{x} = \theta_1\\ S^2 + \left(\overline{x}\right)^2 = \theta_2 + \left(\theta_1\right)^2\end{cases},$$

$$\begin{cases}\overline{x} = \theta_1\\ S^2 = \theta_2\end{cases}.$$

Мы видим, что в этом случае оценки, полученные методом моментов, будут состоятельными.

Еще одним универсальным методом оценивания неизвестных параметров является метод максимального правдоподобия, предложенный в 1921 году Р.Фишером.

Сначала дадим определение функции правдоподобия, которая обозначается как $L\left(x_1,\dots,x_n,\bar{\theta}\right)$ и является функцией выборки $x_1,\dots,x_n$ и неизвестных параметров $\bar{\theta}=\left(\theta_1,\dots,\theta_m\right)$, от которых зависит теоретическая функция распределения $F\left(x\right)=F\left(x,\theta_1,\dots,\theta_m\right)=F\left(x,\bar{\theta}\right)$.

Определение. Если $F\left(x,\bar{\theta}\right)$ - функция распределения дискретной случайной величины, то *функция правдоподобия* $L\left(x_1,\dots,x_n,\bar{\theta}\right)$ определяется как вероятность того, что $\xi_1=x_1,\dots,\xi_n=x_n$, т. е. функция правдоподобия задается следующим равенством:

$$L\left(x_1,\dots,x_n,\bar{\theta}\right)=\prod_{i=1}^{n}\mathrm{P}_{\bar{\theta}}\left(\xi_i=x_i\right).$$

Если $F\left(x,\bar{\theta}\right)$ - функция распределения абсолютно непрерывной случайной величины с плотностью распределения $p\left(x,\bar{\theta}\right)$, то *функция правдоподобия* $L\left(x_1,\dots,x_n,\bar{\theta}\right)$ задается равенством

$$L\left(x_1,\dots,x_n,\bar{\theta}\right)=\prod_{i=1}^{n}p\left(x_i,\bar{\theta}\right).$$

Предположим, что при каждом фиксированном векторе $\left(x_1,\dots,x_n\right)$ функция правдоподобия достигает своего максимума в некоторой точке $\theta=\hat{\theta}$, где $\hat{\theta}=\hat{\theta}\left(x_1,\dots,x_n\right)$. Тогда $\hat{\theta}\left(x_1,\dots,x_n\right)$ называется *оценкой, полученной по методу максимального правдоподобия*.

Таким образом, для нахождения оценки максимального правдоподобия необходимо найти точку, в которой достигается максимальное значение функции правдоподобия $L\left(x_1,\dots,x_n,\bar{\theta}\right)$ при изменении $\bar{\theta}$. Обычно более удобно находить максимум для функции $\ln L\left(x_1,\dots,x_n,\bar{\theta}\right)$, так как точки максимума функций $L\left(x_1,\dots,x_n,\bar{\theta}\right)$ и $\ln L\left(x_1,\dots,x_n,\bar{\theta}\right)$ будут совпадать.

<u>Пример</u>. 1. Пусть у нас реализована схема Бернулли с неизвестной вероятностью успеха $0<\theta<1$, и имеется выборка $\left(x_1,\dots,x_n\right)$, где $x_i\in\left\{0,1\right\}$.

$L\left(x_1,\dots,x_n,\bar{\theta}\right)=\theta^k\cdot\left(1-\theta\right)^{n-k}$, где k – число единиц в векторе $\left(x_1,\dots,x_n\right)$.

Найдем максимум функции $\ln L\left(x_1,...,x_n,\overline{\theta}\right) = k\ln\theta + \left(n-k\right)\ln\left(1-\theta\right)$. Используя методы математического анализа, имеем

$$\frac{\partial \ln L}{\partial\theta} = \frac{k}{\theta} - \frac{n-k}{1-\theta} = 0,$$

$$k - k\theta - n\theta + k\theta = 0,$$

$\hat{\theta} = \dfrac{k}{n}$ - единственное решение данного уравнения.

Так как $0 \le k \le n$, то $\dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial^2\theta} = -\dfrac{k}{\theta^2} - \dfrac{n-k}{\left(1-\theta\right)^2} \le 0$ для всех $\theta \in \left(0,1\right)$.

Отсюда следует, что функция $\ln L$ в интервале $\left(0,1\right)$имеет единственный максимум при $\theta = \hat{\theta} = \dfrac{k}{n}$.

Поэтому оценка $\hat{\theta} = \dfrac{k}{n}$ является оценкой, полученной методом максимального правдоподобия. При этом $k = \sum_{i=1}^{n} x_i$, т. е.

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n}\cdot k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{x}.$$

Мы видим, что в этом случае оценка, полученная методом максимального правдоподобия, будет несмещенной и состоятельной.

2. Пусть выборка производится из нормально распределенной случайной величины с двумя неизвестными параметрами, т. е. $\xi \sim \mathrm{N}\left(\theta_1,\theta_2\right)$, где $0 < \theta_2 < +\infty$, $\left|\theta_1\right| < +\infty$.

$$L\left(x_1,...,x_n,\overline{\theta}\right) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_2}} e^{-\frac{\left(x_i-\theta_1\right)^2}{2\theta_2}}.$$

Здесь у нас два параметра: $\overline{\theta} = \left(\theta_1,\theta_2\right)$.

$$\ln L = -\frac{n}{2}\left(\ln 2\pi + \ln\theta_2\right) - \frac{1}{2\theta_2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \theta_1\right)^2.$$

Найдем частные произведения первого порядка для функции $\ln L$и приравняем их к нулю.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L}{\partial\theta_1} = \dfrac{1}{\theta_2}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i - \theta_1\right) = 0 \\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial\theta_2} = -\dfrac{n}{2\theta_2} + \dfrac{1}{2\theta_2^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i - \theta_1\right)^2 = 0 \end{cases}.$$

Получаем

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i - n\theta_1 = 0 \\ n\theta_2 - \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \theta_1\right)^2 = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} \hat{\theta}_1 = \frac{1}{n}\sum x_i = \overline{x} \\ \hat{\theta}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x}\right)^2 = S^2 \end{cases}.$$

Решение данной системы единственное, и функция L принимает в точке $\left(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2\right)$ максимальное значение (проверьте это самостоятельно).

Следовательно, $\left(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2\right) = \left(\overline{x}, S^2\right)$ является оценкой максимального правдоподобия для $\overline{\theta} = \left(\theta_1, \theta_2\right)$. В силу свойств самих оценок – это состоятельная оценка.

Введем еще одну величину, характеризующую оценку.

Определение. *Среднеквадратичной ошибкой оценки* $\hat{\theta}$ *параметра* θ называется величина $\mathrm{E}\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2$.

Если оценка несмещенная, то

$$\mathrm{E}\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2 = \mathrm{E}\left(\hat{\theta} - \mathrm{E}\hat{\theta}\right)^2 = \mathrm{D}\hat{\theta}.$$

Это мера отклонения оценки от оцениваемого параметра.

Иногда среднеквадратичная ошибка может быть больше у несмещенной оценки, чем у смещенной.

<u>Пример</u>. Самостоятельно сравните среднеквадратичные ошибки оценок $S_2^* = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2$ и $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2$.

Хорошо было бы, если бы эта ошибка была как можно меньше. Но очень часто нельзя ее уменьшить ниже определенного порога.

Сформулируем теорему об этой границе. Но сначала введем понятие регулярной статистической модели.

Пусть ξ имеет функцию распределения $F\left(x,\theta\right)$ с плотностью $p\left(x,\theta\right)$.

Условия регулярности для семейства $F\left(x,\theta\right)$ *и* $p\left(x,\theta\right)$*:*

1) множество $\left\{x : p\left(x,\theta\right) > 0\right\}$ не зависит от θ.

2) Равенство $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,\theta)dx = 1$ можно дифференцировать по параметру θ под знаком интеграла.

3) Смещение в равенстве $\mathrm{E}\hat{\theta} = \theta + b(\hat{\theta})$ дифференцируемо по параметру θ.

4) Интеграл

$$\mathrm{E}\hat{\theta}(x_1,...,x_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} ... \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\theta}(x_1,...,x_n) \prod_{i=1}^{n} p(x_i,\theta)d\overline{x} =$$
$$= \theta + b(\hat{\theta}),$$

где $d\overline{x} = dx_1 \cdot ... \cdot dx_n$, можно дифференцировать по параметру θ под знаком интеграла.

5) Интеграл $Inf(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \ln p(x,\theta)}{\partial \theta} \right)^2 p(x,\theta)\,dx$ не равен нулю и сходится, т.е. $0 < |Inf(\theta)| < +\infty$.

Интеграл $Inf(\theta)$ называется *информацией по Фишеру о неизвестном параметре* θ*, содержащейся в одном наблюдении* x_i.

Теорема (*неравенство Рао-Крамера*). *Если семейство плотностей* $p(x,\theta)$ *, где* $\theta \in \Theta$*, и оценка* $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1,...,x_n)$ *удовлетворяют условиям регулярности 1)-5), то имеет место неравенство*

$$\mathrm{E}(\hat{\theta} - \theta)^2 \geq \frac{1}{n \cdot Inf(\theta)} \cdot \left(1 + \frac{\partial b(\hat{\theta})}{\partial \theta} \right)^2 .$$

Следствие. Если $\hat{\theta}$ - несмещенная оценка, то в условиях регулярной модели

$$\mathrm{D}\hat{\theta} \geq \frac{1}{n \cdot Inf(\theta)}.$$

В случае если мы оцениваем не параметр θ, а параметрическую функцию $\tau(\theta)$, то с некоторыми изменениями на условия регулярности неравенство Рао-Крамера примет вид

$$\mathrm{E}(\hat{\theta} - \tau(\theta))^2 \geq \frac{(\tau'(\theta) + b'(\theta))^2}{n \cdot Inf(\theta)}.$$

Определение. *Эффективностью регулярной оценки* $\hat{\theta}$ *параметрической функции* $\tau(\theta)$ называется величина

$$eff\hat{\theta} = \frac{\left(\tau'(\theta) + b'(\theta)\right)^2}{n \cdot Inf(\theta) \cdot \mathrm{E}\left(\hat{\theta} - \tau(\theta)\right)^2}.$$

Очевидно, что у любой оценки $\hat{\theta}$ эффективность ограничена: $0 \le eff\hat{\theta} \le 1$.

Определение. Регулярная оценка $\hat{\theta}$ параметрической функции $\tau(\theta)$ называется *эффективной*, если $eff\hat{\theta} = 1$, т.е. неравенство Рао-Крамера для нее обращается в равенство.

Определение. Регулярная оценка $\hat{\theta}$ параметрической функции $\tau(\theta)$ называется *асимптотически эффективной*, если $eff\hat{\theta} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

Примером эффективной оценки в модели $N(\theta, \sigma^2)$ является $\bar{x}$.

В модели $N(a, \theta)$ статистика S^2 - асимптотически эффективная оценка.

10 ИНТЕРВАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

В предыдущей теме мы рассматривали точечные оценки для параметров статистической модели. Любая точечная оценка представляет собой функцию выборки, т. е. является случайной величиной, и при каждой реализации выборки эта функция определяет единственное число, которое мы принимаем за приближенное значение оцениваемой характеристики. При этом нужно принимать во внимание, что в каждом конкретном случае значение оценки может отличаться от значения параметра. Следовательно, полезно знать и возможную погрешность, возникающую при использовании предлагаемой оценки. К примеру, можно указать такой интервал, или область, внутри которого с высокой вероятностью находится точное значение оцениваемого параметра. В этом случае говорят об интервальном, или доверительном, оценивании.

Теперь сформулируем основное определение.

Определение. Рассмотрим выборку $(x_1, \ldots, x_n)$ и две статистики $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(x_1, \ldots, x_n)$ и $\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(x_1, \ldots, x_n)$. Если для некоторого $\gamma \in (0;1)$ выполняется

$$\mathrm{P}\left(\theta_1(x_1, \ldots, x_n) < \theta < \theta_2(x_1, \ldots, x_n)\right) \ge \gamma,$$

то говорят, что *случайный интервал* $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ *накрывает неизвестный параметр* θ *с вероятностью не меньшей, чем* γ.

Если $\mathrm{P}\left(\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2\right) = \gamma$, то величину γ называют *доверительной вероятностью* или *коэффициентом надежности*.

Случайный интервал $\left(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2\right)$ называют *доверительным интервалом для неизвестного параметра* θ *с коэффициентом надежности* γ.

Опишем способ, с помощью которого в ряде случаев можно построить доверительный интервал.

Определение. Пусть статистическая модель $\mathfrak{F}$ абсолютно непрерывна, и существует случайная величина $G\left(x_1,...,x_n,\theta\right)$, зависящая от θ, такая, что:

1) распределение $G\left(x_1,...,x_n,\theta\right)$ не зависит от θ;

2) для любой фиксированной реализации выборки $x_1,...,x_n$ функция $G\left(x_1,...,x_n,\theta\right)$ непрерывна и строго монотонна по θ.

Тогда такую случайную величину G называют *центральной статистикой параметра* θ.

Обратим внимание, что в силу определения центральная статистика не является статистикой в точном определении этого понятия.

Итак, пусть для модели $\mathfrak{F}$ построена центральная статистика $G\left(x_1,...,x_n,\theta\right)$, и $f_{\mathrm{G}}\left(t\right)$ – плотность распределения этой центральной статистики.

По первому условию из определения, $f_{\mathrm{G}}\left(t\right)$ не зависит от θ, поэтому для любого значения $\gamma \in \left(0;1\right)$ можно выбрать величины $t_1 < t_2$ (какими угодно способами) так, чтобы:

$$\mathrm{P}\left(t_1 < G\left(x_1,...,x_n,\theta\right) < t_2\right) = \int_{t_1}^{t_2} f_{\mathrm{G}}\left(t\right)dt = \gamma .$$

Далее для определенности будем считать, что G - строго возрастающая по θ функция. Определим теперь для любой реализации выборки $\left(x_1,...,x_n\right)$ числа $\hat{\theta}_1\left(x_1,...,x_n\right)$ и $\hat{\theta}_2\left(x_1,...,x_n\right)$, где

$$\hat{\theta}_1\left(x_1,...,x_n\right) < \hat{\theta}_2\left(x_1,...,x_n\right),$$

как решение относительно θ совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} G\left(x_1,...,x_n,\theta\right) = t_1 \\ G\left(x_1,...,x_n,\theta\right) = t_2 \end{array}\right. .$$

Однозначность определения обоих этих чисел обеспечивается вторым условием, наложенным по определению на функцию $G\left(x_1,...,x_n,\theta\right)$. Тогда неравенство

$$t_1 < G\left(x_1,...,x_n,\theta\right) < t_2$$

эквивалентно неравенству

$$\hat{\theta}_1\left(x_1,...,x_n\right) < \theta < \hat{\theta}_2\left(x_1,...,x_n\right)$$

и выполняется равенство

$$\mathrm{P}\left(t_1 < G\left(x_1,...,x_n,\theta\right) < t_2\right) =$$
$$= \mathrm{P}\left(\hat{\theta}_1\left(x_1,...,x_n\right) < \theta < \hat{\theta}_2\left(x_1,...,x_n\right)\right) = \gamma .$$

Таким образом, построенный интервал $\left(\hat{\theta}_1\left(x_1,...,x_n\right),\hat{\theta}_2\left(x_1,...,x_n\right)\right)$ является γ -доверительным интервалом для неизвестного параметра θ.

В каждой конкретной задаче при построении центральной статистики для оцениваемого параметра обычно приходится учитывать специфику рассматриваемой модели.

Это мы разберем на примере оценки параметров нормального распределения. Но сначала сформулируем полезную теорему.

Теорема (*Фишера*). *Если $\left(x_1,...,x_n\right)$- выборка из $\xi \sim \mathrm{N}\left(a,\sigma^2\right)$ (случайной величины, имеющей нормальное распределение с двумя параметрами a и σ^2), то*

1. случайные величины $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ и $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2$ независимы,

2. имеют место следующие распределения:

$$\overline{x} \sim \mathrm{N}\left(a,\frac{\sigma^2}{n}\right),$$

$$\frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \mathrm{X}_{n-1}^2,$$

где X_{n-1}^2 – случайная величина, имеющая хи-квадрат распределение с $n-1$ степенью свободы.

Определение. Пусть случайная величина ξ обладает функцией распределения $F\left(x\right)$, и дано вещественное число: $0 < p < 1$. Тогда решения x_p уравнения

$$F\left(x\right) = p$$

называются квантилями распределения $F\left(x\right)$ уровня p.

<u>Примеры.</u>

1). Рассмотрим случай выборки из нормального распределения с неизвестным математическим ожиданием и известной дисперсией: $\xi \sim N\left(\theta,\sigma^2\right)$.

По теореме Фишера

$$\overline{x} \sim \mathrm{N}\left(\theta,\frac{\sigma^2}{n}\right),$$

следовательно, функция

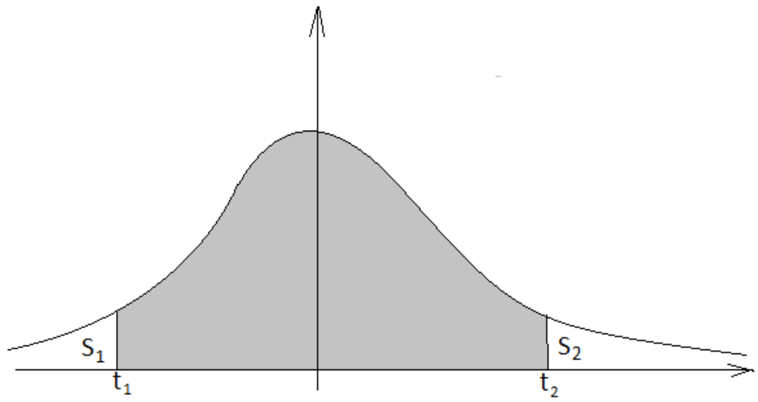
$$G\left(x_1,...,x_n,\theta\right) = \left(\overline{x} - \theta\right)\frac{\sqrt{n}}{\sigma}$$

является центральной статистикой, имеющей стандартное нормальное распределение $\mathrm{N}(0;1)$.

$P\left(t_1 < G\left(x_1, \ldots, x_n, \theta\right) < t_2\right) =$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \gamma .$$

Рассмотрим график плотности нормального распределения:



Пусть площадь закрашенной области на графике равна γ, тогда сумма площадей $S_1 + S_2$ равна $1-\gamma$. Удобно считать, что $S_1 = S_2 = \frac{1-\gamma}{2}$.

Получаем, что t_1 - квантиль стандартного нормального распределения уровня $\frac{1-\gamma}{2}$, что обозначается как $t_1 = t_{\frac{1-\gamma}{2}}$, а t_2 - уровня $1-\frac{1-\gamma}{2}$, т. е. уровня $\frac{1+\gamma}{2}$: $t_2 = t_{\frac{1+\gamma}{2}}$.

Эти квантили для конкретных значений γ находятся по таблицам математической статистики, обычно находящимся в конце пособий по математической статистике или в отдельных сборниках.

Обозначим $\gamma = 1-\alpha$, тогда $t_1 = t_{\alpha/2} = -\left|t_{\alpha/2}\right|$ и в силу симметричности плотности стандартного нормального распределения $t_2 = -t_{\alpha/2} = \left|t_{\alpha/2}\right|$.

$$\mathrm{P}\left(t_{\alpha/2} < \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\overline{x}-\theta\right) < -t_{\alpha/2}\right) = \mathrm{P}\left(\frac{\sigma t_{\alpha/2}}{\sqrt{n}} < \left(\overline{x}-\theta\right) < -\frac{\sigma t_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$= \mathrm{P}\left(\underbrace{\overline{x} - \frac{\sigma\left|t_{\alpha/2}\right|}{\sqrt{n}}}_{\hat{\theta}_1} < \theta < \underbrace{\overline{x} + \frac{\sigma\left|t_{\alpha/2}\right|}{\sqrt{n}}}_{\hat{\theta}_2}\right) = \gamma = 1-\alpha .$$

Тогда $\left(\hat{\theta}_1; \hat{\theta}_2\right)$ - искомый доверительный интервал.

Заметим, что на практике представляет интерес поиск доверительных интервалов, наименьших по длине $\left|\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1\right|$. В данном случае мы нашли именно наименьший.

2) Рассмотрим случай выборки из нормального распределения с известным математическим ожиданием и неизвестной дисперсией: $\xi \sim \mathrm{N}\left(a, \theta\right)$
.

Рассмотрим статистику

$$S_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - a\right)^2$$

Функция $\frac{nS_0^2}{\theta} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - a}{\sqrt{\theta}}\right)^2$ равна сумме квадратов независимых случайных величин, имеющих стандартное нормальное распределение.

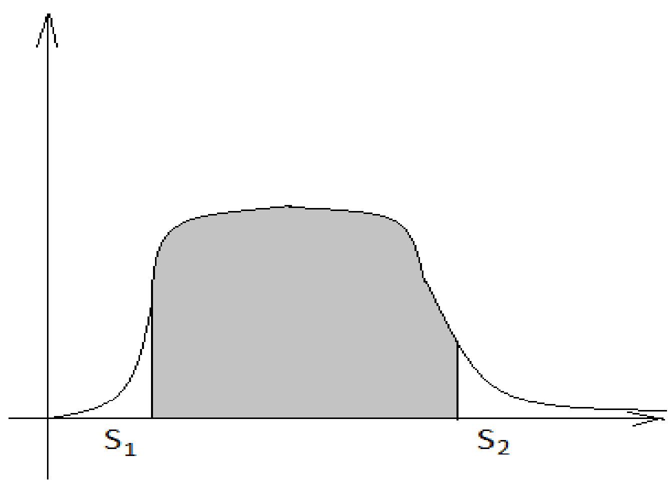
Следовательно, функция $\frac{nS_0^2}{\theta}$ имеет хи-квадрат распределение с n степенями свободы:

$$\frac{nS_0^2}{\theta} \sim \mathrm{X}_n^2.$$

Очевидно, что $\frac{nS_0^2}{\theta}$ является центральной статистикой.

$$\mathrm{P}\left(t_1 < \frac{nS_0^2}{\theta} < t_2\right) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{t^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}}} dt = \gamma$$

Рассмотрим график плотности хи-квадрат распределения:



Пусть площадь закрашенной области на графике равна γ, тогда сумма площадей $S_1 + S_2$ равна $1 - \gamma = \alpha$. Удобно выбрать, как и в предыдущем примере, что

$$S_1 = S_2 = \alpha / 2 .$$

Получаем, что t_1 - квантиль хи-квадрат распределения с n степенями свободы уровня $\alpha / 2$, что обозначается как $t_1 = \mathrm{X}^2_{n;\alpha/2}$, а t_2 - уровня $1-\alpha/2$, т. е. $t_2 = \mathrm{X}^2_{n;1-\alpha/2}$.

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{X}^2_{n;\alpha/2} < \frac{nS_0^2}{\theta} < \mathrm{X}^2_{n;1-\alpha/2}\right) =$$

$$= \mathrm{P}\left(\frac{1}{\mathrm{X}^2_{n;1-\alpha/2}} < \frac{\theta}{nS_0^2} < \frac{1}{\mathrm{X}^2_{n;\alpha/2}}\right) =$$

$$= \mathrm{P}\left(\underbrace{\frac{nS_0^2}{\mathrm{X}^2_{n;1-\alpha/2}}}_{\widehat{\theta}_1} < \theta < \underbrace{\frac{nS_0^2}{\mathrm{X}^2_{n;\alpha/2}}}_{\widehat{\theta}_2}\right) = \gamma = 1-\alpha .$$

Тогда $\left(\widehat{\theta}_1; \widehat{\theta}_2\right)$ - искомый доверительный интервал.

Но в данном случае он не является наименьшим по длине.

3) Теперь рассмотрим случай выборки из общей нормальной модели, т.е. из нормального распределения с неизвестным математическим ожиданием и неизвестной дисперсией: $\mathrm{N}\left(\theta_1, \theta_2\right)$.

Чтобы построить доверительный интервал для дисперсии θ_2, будем действовать аналогично примеру 2, но используя другую центральную статистику.

Согласно теореме Фишера,

$$\frac{nS^2}{\theta_2} \sim \mathrm{X}^2_{n-1} .$$

Проводя аналогичные предыдущему примеру рассуждения, получаем:

$t_1 = \mathrm{X}^2_{n-1,\alpha/2}$,

$t_2 = \mathrm{X}^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$,

$$\mathrm{P}\left(\underbrace{\frac{nS^2}{\mathrm{X}^2_{n-1;1-\alpha/2}}}_{\widehat{\theta}_{1,2}} < \theta < \underbrace{\frac{nS^2}{\mathrm{X}^2_{n-1;\alpha/2}}}_{\widehat{\theta}_{2,2}}\right) = \gamma = 1-\alpha$$

Тогда $\left(\widehat{\theta}_{1,2}; \widehat{\theta}_{2,2}\right)$ - γ-доверительный интервал для параметра θ_2.

Для того чтобы построить доверительный интервал для математического ожидания θ_1, сформулируем сперва утверждение.

Утверждение (*соотношение Стьюдента*). *Пусть случайные величины* ξ *и* η *независимы и имеют следующие распределения:*

$\xi \sim \mathrm{N}(0,1),\ \eta \sim \mathrm{X}_k^2.$

Тогда случайная величина $\dfrac{\xi}{\sqrt{\eta / k}}$ *имеет распределение Стьюдента с* k *степенями свободы, что обозначается как*

$$\frac{\xi}{\sqrt{\eta / k}} \sim st_k.$$

Из теоремы Фишера следует, что $\dfrac{\overline{x} - \theta_1}{\sqrt{\theta_2 / n}} \sim \mathrm{N}(0,1)$, $\dfrac{nS^2}{\theta_2} \sim \mathrm{X}_{n-1}^2$ и эти величины независимы. Следовательно,

$$\left(\frac{\overline{x} - \theta_1}{\sqrt{\theta_2 / n}}\right) / \left(\sqrt{\frac{nS^2 / \theta_2}{n-1}}\right) = \sqrt{n-1} \cdot \frac{\overline{x} - \theta_1}{\sqrt{S^2}} \sim st_{n-1}.$$

Очевидно, что функция

$$\sqrt{n-1} \cdot \frac{\overline{x} - \theta_1}{\sqrt{S^2}}$$

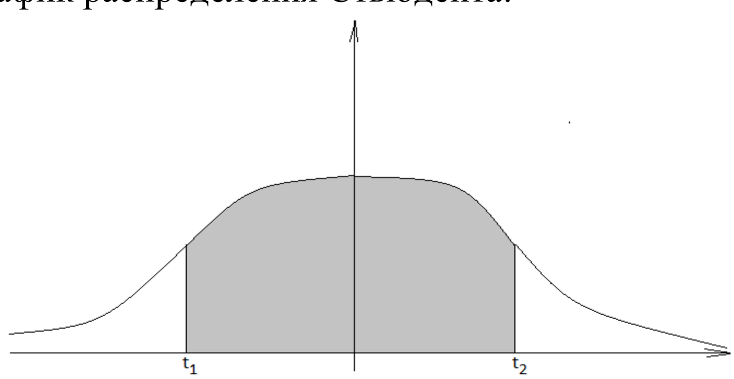
является центральной статистикой. Проводя рассуждения, аналогичные проделанным ранее, получаем, что верно равенство

$$\mathrm{P}\left(t_1 < \sqrt{n-1} \cdot \frac{\overline{x} - \theta_1}{\sqrt{S^2}} < t_2\right) =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\Gamma(n / 2)}{\Gamma((n-1) / 2)} \cdot \left(\pi(n-1)\right)^{-1/2} \times$$

$$\times \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-n/2} dt = \gamma = 1 - \alpha$$

Рассмотрим график распределения Стьюдента:



Как и в предыдущих пунктах полезно выбрать в качестве t_1 и t_2 квантили распределения Стьюдента уровня $\frac{\alpha}{2}$ и $1-\frac{\alpha}{2}$ соответственно, что обозначается как

$t_1 = st_{n-1;\alpha/2}$, $t_2 = st_{n-1;1-\alpha/2}$.

$$\mathrm{P}\left(st_{n-1;\alpha/2} < \sqrt{n-1}\cdot\frac{\overline{x}-\theta_1}{\sqrt{S^2}} < st_{n-1;1-\alpha/2}\right) =$$

$$= \mathrm{P}\left(\frac{st_{n-1;\alpha/2}\sqrt{S^2}}{\sqrt{n-1}} < \overline{x}-\theta_1 < \frac{st_{n-1;1-\alpha/2}\sqrt{S^2}}{\sqrt{n-1}}\right) =$$

$$= \mathrm{P}\left(\underbrace{\overline{x}-\frac{\sqrt{S^2}}{\sqrt{n-1}}st_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}}_{\widehat{\theta}_{1,1}} < \theta_1 < \underbrace{\overline{x}-\frac{\sqrt{S^2}}{\sqrt{n-1}}st_{n-1;\alpha/2}}_{\widehat{\theta}_{2,1}}\right) = \gamma .$$

Тогда $\left(\widehat{\theta}_{1,1};\widehat{\theta}_{2,1}\right)$ - искомый γ-доверительный интервал для параметра θ_1.

Использование центральной статистики не является единственным способом построения доверительных интервалов. Рассмотрим в качестве примера еще один из способов.

<u>Пример </u>(*построение доверительного интервала для дискретной модели с помощью неравенства Чебышева*).

Рассмотрим случай выборки $\left(x_1,...,x_n\right)$ из распределения Бернулли с неизвестной вероятностью успеха $\theta\in\left(0,1\right)$: $\xi\sim\mathrm{Bi}\left(1,\theta\right)$.

Пусть $\gamma\in\left(0,1\right)$ - заданная доверительная вероятность. Построим γ-доверительный интервал для неизвестного параметра θ.

Известно, что $\mathrm{E}\overline{x} = \mathrm{E}\xi = \theta$ и $\mathrm{D}\overline{x} = \frac{\mathrm{D}\xi}{n} = \frac{\theta\left(1-\theta\right)}{n}$.

Согласно классической форме неравенства Чебышева для любого $\varepsilon > 0$ выполняется $\mathrm{P}\left(\left|\overline{x}-\mathrm{E}\overline{x}\right|\geq\varepsilon\right)\leq\mathrm{D}\overline{x}\,/\,\varepsilon^2$.

Подставим в эту формулу найденные выше значения:

$$\mathrm{P}\left(\left|\overline{x}-\theta\right|\geq\varepsilon\right)\leq\theta\left(1-\theta\right)/\,\varepsilon^2 n,$$

$$1-\mathrm{P}\left(\left|\overline{x}-\theta\right|\geq\varepsilon\right)\geq 1-\theta\left(1-\theta\right)/\,\varepsilon^2 n,$$

$$\mathrm{P}\left(\left|\overline{x}-\theta\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\theta\left(1-\theta\right)/\,\varepsilon^2 n,$$

$$\mathrm{P}\left(\overline{x}-\varepsilon<\theta<\overline{x}+\varepsilon\right)\geq 1-\theta\left(1-\theta\right)/\,\varepsilon^2 n .$$

Так как для любого $\theta \in (0,1)$ выражение $\theta(1-\theta) \le \frac{1}{4}$, то $P\left(\overline{x} - \varepsilon < \theta < \overline{x} + \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{1}{4\varepsilon^2 n}$.

Подберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы правая часть неравенства была равна γ:

$1 - \frac{1}{4\varepsilon^2 n} = \gamma = 1 - \alpha$, $\varepsilon^2 = \frac{1}{4n\alpha}$, $\varepsilon = \frac{1}{2\sqrt{n\alpha}} > 0$.

Получили, что

$$P\left(\underbrace{\overline{x} - \frac{1}{2\sqrt{n\alpha}}}_{\widehat{\theta}_1} < \theta < \underbrace{\overline{x} + \frac{1}{2\sqrt{n\alpha}}}_{\widehat{\theta}_2}\right) \ge \gamma.$$

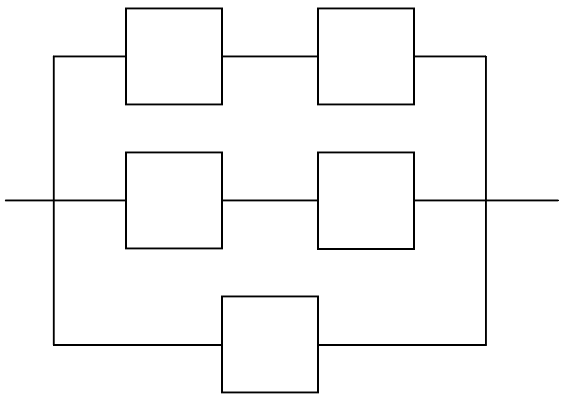
Следовательно, случайный интервал $\left(\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2\right)$ накрывает неизвестный параметр θ с вероятностью не меньшей, чем γ, и мы можем его рассматривать в качестве искомого γ-доверительного интервала.

.

Задания для контрольных работ.

Вариант 00

1. Электрическая цепь состоит из пяти элементов, выход из строя которых в заданный промежуток времени – независимые события, имеющие вероятности $p_i = 0{,}2$ каждый. Найти вероятность P отказа цепи за данный промежуток времени.



2. Дискретная случайная величина задана законом распределения $p_i(x_i)$. Найти величину a, построить график функции распределения данной случайной величины. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины.

x_i	0	2	4	6	8
p_i	0,1	0,2	0,3	0,2	a

3. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины задана выражением:

$$f(x) = \begin{cases} 0; & x \le 0 \\ ax^2; & 0 < x \le 6 \\ 0; & x > 6 \end{cases}$$

Найти величину коэффициента a, написать аналитическое выражение и простроить график функции распределения, найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины. Найти вероятности попадания данной случайной величины в интервалы $(0,\ 4)$ и $(4,\ 10)$.

4. Дана нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием $m = 5$ и дисперсией $\sigma^2 = 3$. Найти вероятность того, что абсолютная величина отклонения случайной величины от ее математического ожидания меньше 4.

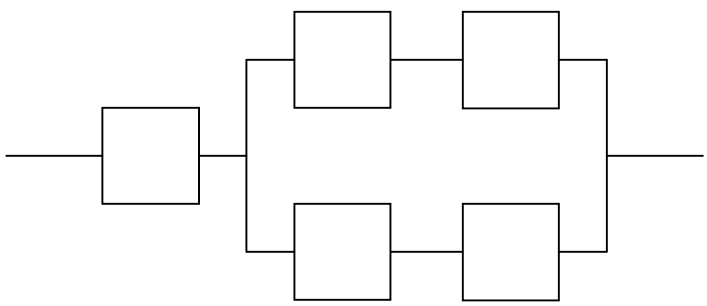
5. Дискретная случайная величина задана выборкой:

0, -1, 0, 1, 1, -1, -1, 0, 0, 0, -1, 0, 1, 1, 0, -1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, -1, 1, 1

Построить полигон частот и эмпирическую функцию распределения. Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Вариант 01

1. Электрическая цепь состоит из пяти элементов, безотказная работа которых в заданный промежуток времени – независимые события, имеющие вероятности $q_i = 0{,}9$ каждый. Найти вероятность Q безотказной работы цепи за данный промежуток времени.



2. Дискретная случайная величина задана законом распределения $p_i(x_i)$. Найти величину a, построить график функции распределения данной случайной величины. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины.

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,2	0,2	0,3	0,1	a

3. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины задана выражением:

$$f(x) = \begin{cases} 0; & x \le -3 \\ a; & -3 < x \le 1 \\ 0; & x > 1 \end{cases}$$

Найти величину коэффициента a, написать аналитическое выражение и простроить график функции распределения, найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной

случайной величины. Найти вероятности попадания данной случайной величины в интервалы $(-2,0)$ и $(0,\ 4)$.

4. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины с математическим ожиданием $m = 4$ в интервал (3; 5) равна 0,6. Найти дисперсии данной случайной величины.

5. Дискретная случайная величина задана выборкой:

0, -1, 0, 1, 1, -1, -1, 0, 0, 0, -1, 0, 1, 1, 0, -1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, -1, 1, 1

Построить полигон частот и эмпирическую функцию распределения. Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Вариант 02

1. Последовательность передаваемых сигналов состоит из независимо передаваемых точек и тире, причем количество точек в этом потоке в среднем в пять раз больше, чем тире. Вероятность правильного приема точки $p_1 = 0{,}7$, тире $p_2 = 0{,}8$. Найти вероятность того, что произвольно взятый сигнал будет принят с ошибкой.

2. Дискретная случайная величина задана законом распределения $p_i(x_i)$. Найти величину a, построить график функции распределения данной случайной величины. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины.

x_i	0	2	4	6	8
p_i	a	0,2	0,4	0,2	0,1

3. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины задана выражением:

$$f(x) = \begin{cases} 0; & x \le 0 \\ a; & 0 < x \le 6 \\ 0; & x > 6 \end{cases}$$

Найти величину коэффициента a, написать аналитическое выражение и простроить график функции распределения, найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины. Найти вероятности попадания данной случайной величины в интервалы $(2,\ 4)$ и $(4,\ 8)$.

4. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины с математическим ожиданием $m = 4$ в интервал (3; 5) равна 0,6. Найти дисперсии данной случайной величины.

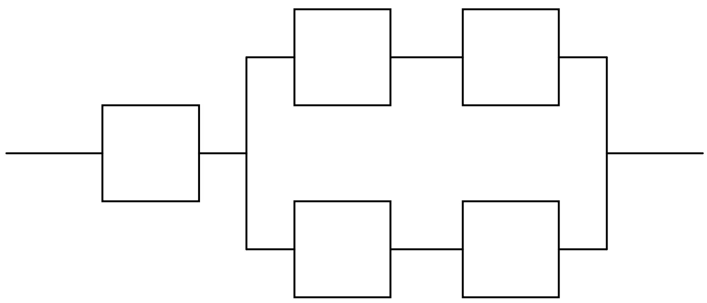
5. Непрерывная случайная величина задана упорядоченной выборкой.

$(x_{i-1};x_i)$	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)	[10; 12)	[12; 14]
n_i	30	30	70	40	30

Построить гистограмму и эмпирическую функцию распределения.
Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Вариант 03

1. Электрическая цепь состоит из пяти элементов, выход из строя которых в заданный промежуток времени – независимые события, имеющие вероятности $p_i = 0{,}1$ каждый. Найти вероятность P отказа цепи за данный промежуток времени.



2. Дискретная случайная величина задана законом распределения $p_i(x_i)$. Найти величину a, построить график функции распределения данной случайной величины. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины.

x_i	0	2	4	6	8
p_i	0,2	a	0,3	0,2	0,1

3. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины задана выражением:

$$f(x) = \begin{cases} 0; & x \le 0 \\ ax^3; & 0 < x \le 6 \\ 0; & x > 6 \end{cases}$$

Найти величину коэффициента a, написать аналитическое выражение и простроить график функции распределения, найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины. Найти вероятности попадания данной случайной величины в интервалы $(2, 4)$ и $(4, 10)$.

4. Дана нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием $m = 6$ и дисперсией $\sigma^2 = 4$. Найти вероятность попадания данной случайной величины в интервал (3;8).
5. Непрерывная случайная величина задана упорядоченной выборкой.

$(x_{i-1};x_i)$	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)	[10; 12)	[12; 14]
n_i	30	30	70	40	30

Построить гистограмму и эмпирическую функцию распределения.
Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Вариант 04

1. Сообщение состоит из пяти сигналов, причем вероятности безошибочного приема каждого сигнала одинаковы и равны $p = 0{,}6$. Сообщение будет принято, если из пяти сигналов принято хотя бы три. Найти вероятность того, что передаваемое сообщение не принято.
2. Дискретная случайная величина задана законом распределения $p_i(x_i)$. Найти величину a, построить график функции распределения данной случайной величины. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины.

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,2	0,2	a	0,2	0,1

3. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины задана выражением:

$$f(x) = \begin{cases} 0; & x \le -3 \\ a; & -3 < x \le 3 \\ 0; & x > 3 \end{cases}$$

Найти величину коэффициента a, написать аналитическое выражение и простроить график функции распределения, найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины. Найти вероятности попадания данной случайной величины в интервалы $(0,\ 2)$ и $(2,\ 5)$.
4. Дана нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием $m = 4$ и дисперсией $\sigma^2 = 3$. Найти вероятность того, что абсолютная величина отклонения случайной величины от ее математического ожидания меньше 1.
5. Найти выборочный коэффициент корреляции для пары случайных величин:

Y / X	-1	0	1
0	10	0	20
2	20	10	40

Вариант 05

1. Сообщение состоит из пяти сигналов, причем вероятности безошибочного приема каждого сигнала одинаковы и равны $p = 0{,}7$. Сообщение будет принято, если из пяти сигналов принято по крайней мере три. Найти вероятность того, что передаваемое сообщение не принято.

2. Дискретная случайная величина задана законом распределения $p_i(x_i)$. Найти величину a, построить график функции распределения данной случайной величины. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины.

x_i	-2	-1	0	1	2
p_i	0,1	0,2	0,2	0,2	a

3. Функция распределения непрерывной случайной величины задана выражением:

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x \le 0 \\ ax^3; & 0 < x \le 4 \\ 1; & x > 4 \end{cases}$$

Найти величину коэффициента a, написать аналитическое выражение и простроить графи плотности распределения вероятностей, найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины. Найти вероятности попадания данной случайной величины в интервалы $(0,\ 2)$ и $(2,\ 10)$.

4. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины с математическим ожиданием $m = 4$ в интервал (3; 5) равна 0,6. Найти дисперсии данной случайной величины.

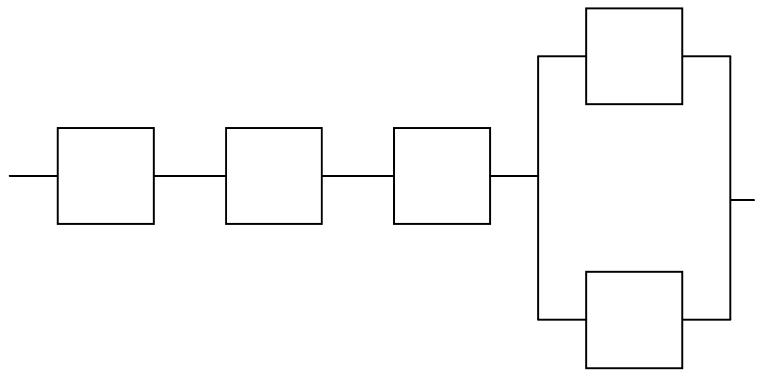
5. Непрерывная случайная величина задана упорядоченной выборкой.

$(x_{i-1};x_i)$	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)	[10; 12)	[12; 14]
n_i	5	20	50	20	5

Построить гистограмму и эмпирическую функцию распределения.
Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Вариант 06

1. Электрическая цепь состоит из пяти элементов, безотказная работа которых в заданный промежуток времени – независимые события, имеющие вероятности $q_i = 0{,}9$ каждый. Найти вероятность Q безотказной работы цепи за данный промежуток времени.



2. Дискретная случайная величина задана законом распределения $p_i(x_i)$. Найти величину a, построить график функции распределения данной случайной величины. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины.

x_i	0	2	4	6	8
p_i	a	0,2	0,4	0,2	0,1

3. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины задана выражением:

$$f(x) = \begin{cases} 0; & x \le -2 \\ a; & -2 < x \le 2 \\ 0; & x > 2 \end{cases}$$

Найти величину коэффициента a, написать аналитическое выражение и простроить график функции распределения, найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины. Найти вероятности попадания данной случайной величины в интервалы $(-1,\ 1)$ и $(1,\ 5)$.

4. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины с математическим ожиданием $m = 5$ в интервал (4; 6) равна 0,8. Найти дисперсии данной случайной величины.

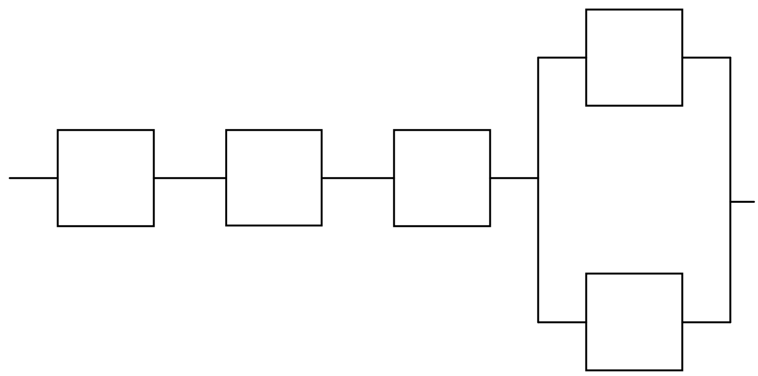
5. Дискретная случайная величина задана выборкой:

1, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 1, 1, 1, 1, 3, 3, 1, 1, 1, 2, 3, 1

Построить полигон частот и эмпирическую функцию распределения. Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Вариант 07

1. Электрическая цепь состоит из пяти элементов, выход из строя которых в заданный промежуток времени – независимые события, имеющие вероятности $p_i = 0{,}1$ каждый. Найти вероятность P отказа цепи за данный промежуток времени.



2. Дискретная случайная величина задана законом распределения $p_i(x_i)$. Найти величину a, построить график функции распределения данной случайной величины. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины.

x_i	1	3	5	7	9
p_i	0,1	0,2	0,3	a	0,1

3. Функция распределения непрерывной случайной величины задана выражением:

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x \le 0 \\ ax; & 0 < x \le 2 \\ 1; & x > 2 \end{cases}$$

Найти величину коэффициента a, написать аналитическое выражение и простроить графи плотности распределения вероятностей, найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины. Найти вероятности попадания данной случайной величины в интервалы $(0, 1)$ и $(1,\ 4)$.

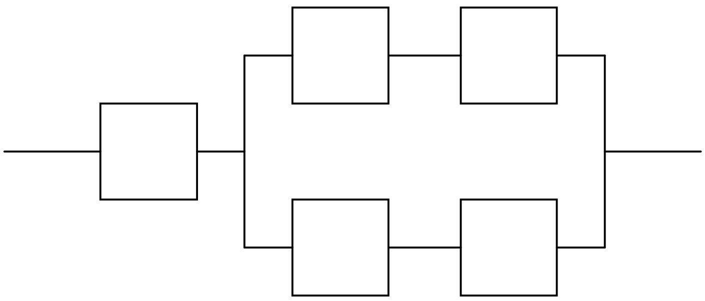
4. Дана нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием $m = 2$ и дисперсией $\sigma^2 = 3$. Найти вероятность попадания данной случайной величины в интервал (0; 4).

5. Дискретная случайная величина задана выборкой:

0, 1, 2, 1, 0, 2, 0, 1, 2, 0, 0, 0, 1, 1, 1,2, 0, 1, 0, 0, 2, 1, 2, 0, 0
Построить полигон частот и эмпирическую функцию распределения. Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Вариант 08

1. Электрическая цепь состоит из пяти элементов, вероятность безотказной работы которых – независимые события, имеющие вероятности $q_i = 0{,}9$ каждый. Найти вероятность P отказа цепи за данный промежуток времени.



2. Дискретная случайная величина задана законом распределения $p_i(x_i)$. Найти величину a, построить график функции распределения данной случайной величины. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины.

x_i	1	3	5	7	9
p_i	0,1	0,2	a	0,2	0,1

3. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины задана выражением:

$$f(x) = \begin{cases} 0; & x \le 0 \\ a; & 0 < x \le 6 \\ 0; & x > 6 \end{cases}$$

Найти величину коэффициента a, написать аналитическое выражение и простроить график функции распределения, найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины. Найти вероятности попадания данной случайной величины в интервалы $(0,\ 2)$ и $(2,\ 10)$.

4. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины с математическим ожиданием $m = 4$ в интервал (3; 5) равна 0,6. Найти дисперсии данной случайной величины.

5. Найти выборочный коэффициент корреляции для пары случайных величин:

Y \ X	-1	0	1
0	10	0	20
2	20	10	40

Вариант 09

1. Сообщение состоит из пяти сигналов, причем вероятности безошибочного приема каждого сигнала одинаковы и равны $p = 0{,}6$. Сообщение будет принято, если из пяти сигналов принято по крайней мере три. Найти вероятность того, что передаваемotсообщение не принято.

2. Дискретная случайная величина задана законом распределения $p_i(x_i)$. Найти величину a, построить график функции распределения данной случайной величины. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины.

x_i	0	2	4	6	8
p_i	a	0,2	0,4	0,2	0,1

3. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины задана выражением:

$$f(x) = \begin{cases} 0; & x \le 0 \\ a; & 0 < x \le 8 \\ 0; & x > 8 \end{cases}$$

Найти величину коэффициента a, написать аналитическое выражение и простроить график функции распределения, найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины. Найти вероятности попадания данной случайной величины в интервалы $(4,\ 6)$ и $(6,\ 10)$.

4. Дана нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием $m = 5$ и дисперсией $\sigma^2 = 4$. Найти вероятность попадания данной случайной величины в интервал (4; 7).

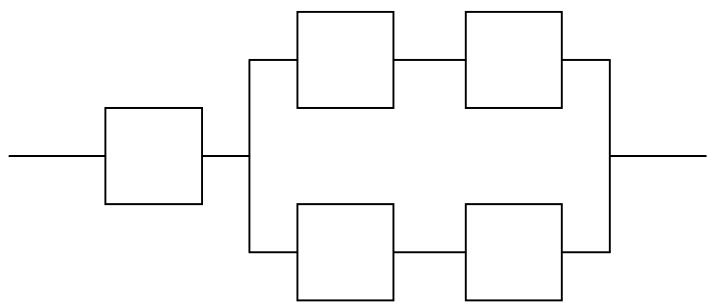
3. Непрерывная случайная величина задана упорядоченной выборкой.

$(x_{i-1};x_i)$	[0; 2)	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 12]
n_i	10	30	90	60	10

Построить гистограмму и эмпирическую функцию распределения.
Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Вариант 10

1. Электрическая цепь состоит из пяти элементов, выход из строя которых в заданный промежуток времени – независимые события, имеющие вероятности $p_i = 0{,}1$ каждый. Найти вероятность P отказа цепи за данный промежуток времени.



2. Дискретная случайная величина задана законом распределения $p_i(x_i)$. Найти величину a, построить график функции распределения данной случайной величины. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины.

x_i	0	0	2	3	4
p_i	0,3	0,1	a	0,1	0,2

3. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины задана выражением:

$$f(x) = \begin{cases} 0; & x \le 0 \\ ax^3; & 0 < x \le 4 \\ 0; & x > 4 \end{cases}$$

Найти величину коэффициента a, написать аналитическое выражение и простроить график функции распределения, найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины. Найти вероятности попадания данной случайной величины в интервалы $(0,\ 2)$ и $(2,\ 8)$.

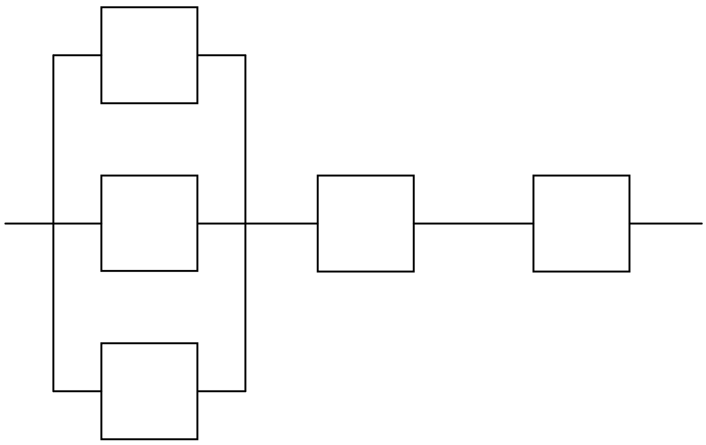
4. Дана нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием $m = 3$ и дисперсией $\sigma^2 = 2$. Найти вероятность попадания данной случайной величины в интервал (2; 5).

5. Найти выборочный коэффициент корреляции для пары случайных величин:

Y / X	-2	0	2
0	10	30	20
1	20	0	20

Вариант 11

1. Электрическая цепь состоит из пяти элементов, безотказная работа которых в заданный промежуток времени – независимые события, имеющие вероятности $q_i = 0{,}9$ каждый. Найти вероятность Q безотказной работы цепи за данный промежуток времени.



2. Дискретная случайная величина задана законом распределения $p_i(x_i)$. Найти величину a, построить график функции распределения данной случайной величины. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины.

x_i	-2	-1	0	1	2
p_i	0,2	0,2	a	0,2	0,1

3. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины задана выражением:

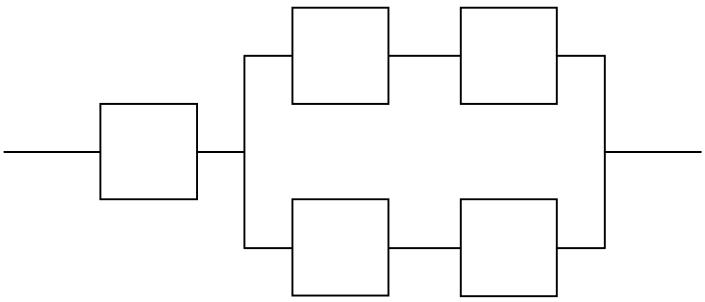
$$f(x) = \begin{cases} 0; & x \le -4 \\ a; & -4 < x \le 0 \\ 0; & x > 0 \end{cases}$$

Найти величину коэффициента a, написать аналитическое выражение и простроить график функции распределения, найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины. Найти вероятности попадания данной случайной величины в интервалы $(-3, -1)$ и $-1,\ 5)$

4. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины с математическим ожиданием $m=5$ в интервал (4; 6) равна 0,8. Найти дисперсии данной случайной величины.
5. Дискретная случайная величина задана выборкой:
0, 1, 2, 1, 0, 2, 0, 1, 2, 0, 0, 0, 1, 1, 1,2, 0, 1, 0, 0, 2, 1, 2, 0, 0
Построить полигон частот и эмпирическую функцию распределения. Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию

Вариант 12

1. Электрическая цепь состоит из пяти элементов, вероятность безотказной работы которых – независимые события, имеющие вероятности $q_i = 0{,}9$ каждый. Найти вероятность P отказа цепи за данный промежуток времени.



2. Дискретная случайная величина задана законом распределения $p_i(x_i)$. Найти величину a, построить график функции распределения данной случайной величины. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины.

x_i	0	2	4	6	8
p_i	a	0,2	0,4	0,2	0,1

3. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины задана выражением:

$$f(x) = \begin{cases} 0; & x \le 0 \\ a; & 0 < x \le 10 \\ 0; & x > 10 \end{cases}$$

Найти величину коэффициента a, написать аналитическое выражение и простроить график функции распределения, найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины. Найти вероятности попадания данной случайной величины в интервалы $(4,\ 6)$ и $(6,\ 12)$.

4. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины с математическим ожиданием $m = 6$ в интервал (4; 8) равна 0,8. Найти дисперсии данной случайной величины.
5. Найти выборочный коэффициент корреляции для пары случайных величин:

Y / X	-2	0	2
0	20	40	0
1	10	10	20

Вариант 13

1. Принимаются три сообщения, причем вероятность приема первого сообщения $p_1 = 0{,}7$, второго $p_2 = 0{,}8$ и третьего $p_3 = 0{,}9$. Случайные события

A={не принято ни одного сообщения};

B={ принято ровно одно сообщение}.

Найти вероятности указанных случайных событий.
2. Дискретная случайная величина задана законом распределения $p_i(x_i)$. Найти величину a, построить график функции распределения данной случайной величины. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины.

x_i	0	2	4	6	8
p_i	0,1	0,2	a	0,2	0,1

3. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины задана выражением:

$$f(x) = \begin{cases} 0; & x \le -4 \\ a; & -4 < x \le 4 \\ 0; & x > 4 \end{cases}$$

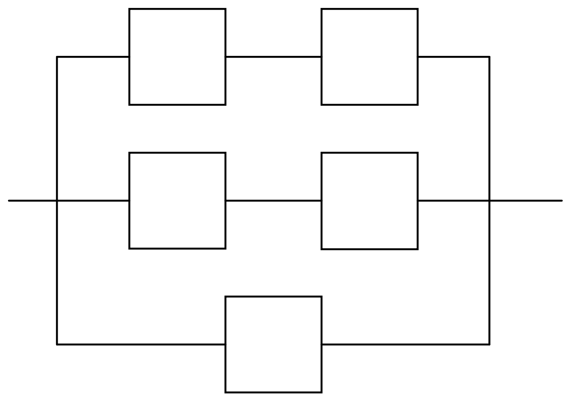
Найти величину коэффициента a, написать аналитическое выражение и простроить график функции распределения, найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины. Найти вероятности попадания данной случайной величины в интервалы $(-3, 1)$ и $(1,\ 6)$.

4. Дана нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием $m = 5$ и дисперсией $\sigma^2 = 4$. Найти вероятность того, что абсолютная величина отклонения случайной величины от ее математического ожидания меньше 4.
5. Дискретная случайная величина задана выборкой:

0, 1, 2, 1, 0, 2, 0, 1, 2, 0, 0, 0, 1, 1, 1,2, 0, 1, 0, 0, 2, 1, 2, 0, 0
Построить полигон частот и эмпирическую функцию распределения. Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Вариант 14

1. Электрическая цепь состоит из пяти элементов, выход из строя которых в заданный промежуток времени – независимые события, имеющие вероятности $p_i = 0{,}2$ каждый. Найти вероятность P отказа цепи за данный промежуток времени.



2. Дискретная случайная величина задана законом распределения $p_i(x_i)$. Найти величину a, построить график функции распределения данной случайной величины. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины.

x_i	0	2	4	6	8
p_i	0,1	0,2	a	0,2	0,1

3. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины задана выражением:

$$f(x) = \begin{cases} 0; & x \le 0 \\ ax^2; & 0 < x \le 6 \\ 0; & x > 6 \end{cases}$$

Найти величину коэффициента a, написать аналитическое выражение и простроить график функции распределения, найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины. Найти вероятности попадания данной случайной величины в интервалы $(0,\ 4)$ и $(4,\ 10)$.

4. Дана нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием $m = 5$ и дисперсией $\sigma^2 = 3$. Найти вероятность того, что абсолютная величина отклонения случайной величины от ее математического ожидания меньше 4.

5. Найти выборочный коэффициент корреляции для пары случайных величин:

Y X	0	2	4
-1	40	10	20
1	10	0	20

Вариант 15

1. Последовательность передаваемых сигналов состоит из независимо передаваемых точек и тире, причем количество точек в этом потоке в среднем в пять раз больше, чем тире. Вероятность правильного приема точки $p_1 = 0{,}7$, тире $p_2 = 0{,}8$. Найти вероятность того, что произвольно взятый сигнал будет принят с ошибкой.

2. Дискретная случайная величина задана законом распределения $p_i(x_i)$. Найти величину a, построить график функции распределения данной случайной величины. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины.

x_i	0	2	4	6	8
p_i	a	0,2	0,4	0,2	0,1

3. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины задана выражением:

$$f(x) = \begin{cases} 0; & x \le 0 \\ a; & 0 < x \le 6 \\ 0; & x > 6 \end{cases}$$

Найти величину коэффициента a, написать аналитическое выражение и простроить график функции распределения, найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины. Найти вероятности попадания данной случайной величины в интервалы $(2, 4)$ и $(4, 8)$.

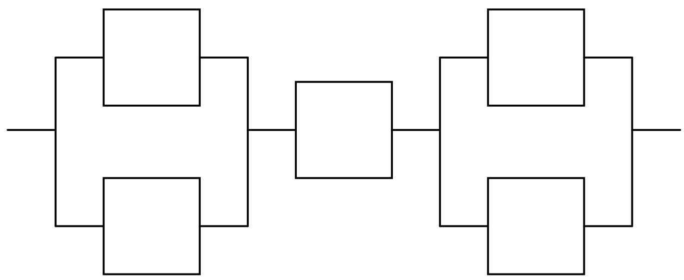
4. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины с математическим ожиданием $m = 4$ в интервал (3; 5) равна 0,6. Найти дисперсии данной случайной величины.

5. Дискретная случайная величина задана выборкой:

1, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 1, 1, 1, 1, 3, 3, 1, 1, 1, 2, 3, 1
Построить полигон частот и эмпирическую функцию распределения. Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Вариант 16

1. Электрическая цепь состоит из пяти элементов, безотказная работа которых за заданный промежуток времени – независимые события, имеющие вероятности $q_i = 0{,}8$ каждый. Найти вероятность Q безотказной работы цепи за данный промежуток времени.



2. Дискретная случайная величина задана законом распределения $p_i(x_i)$. Найти величину a, построить график функции распределения данной случайной величины. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины.

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,2	0,2	a	0,2	0,1

3. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины задана выражением:

$$f(x) = \begin{cases} 0; & x \le -3 \\ a; & -3 < x \le 3 \\ 0; & x > 3 \end{cases}$$

Найти величину коэффициента a, написать аналитическое выражение и простроить график функции распределения, найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины. Найти вероятности попадания данной случайной величины в интервалы $(0, 2)$ и $(2,\ 5)$.

4. Дана нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием $m = 4$ и дисперсией $\sigma^2 = 3$. Найти вероятность того, что абсолютная величина отклонения случайной величины от ее математического ожидания меньше 1.

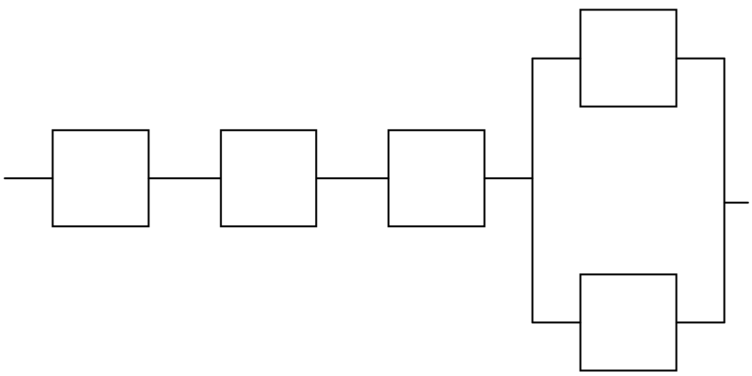
5. Непрерывная случайная величина задана упорядоченной выборкой.

$(x_{i-1};x_i)$	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)	[10; 12)	[12; 14]
n_i	5	30	50	10	5

Построить гистограмму и эмпирическую функцию распределения.
Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Вариант 17

1. Электрическая цепь состоит из пяти элементов, выход из строя которых в заданный промежуток времени – независимые события, имеющие вероятности $p_i = 0{,}1$ каждый. Найти вероятность P отказа цепи за данный промежуток времени.



2. Дискретная случайная величина задана законом распределения $p_i(x_i)$. Найти величину a, построить график функции распределения данной случайной величины. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины.

x_i	0	2	4	6	8
p_i	a	0,2	0,4	0,2	0,1

3. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины задана выражением:

$$f(x) = \begin{cases} 0; & x \le 0 \\ a; & 0 < x \le 8 \\ 0; & x > 8 \end{cases}$$

Найти величину коэффициента a, написать аналитическое выражение и простроить график функции распределения, найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной

случайной величины. Найти вероятности попадания данной случайной величины в интервалы $(4, 6)$ и $(6, 10)$.

4. Дана нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием $m = 5$ и дисперсией $\sigma^2 = 4$. Найти вероятность попадания данной случайной величины в интервал (4; 7).

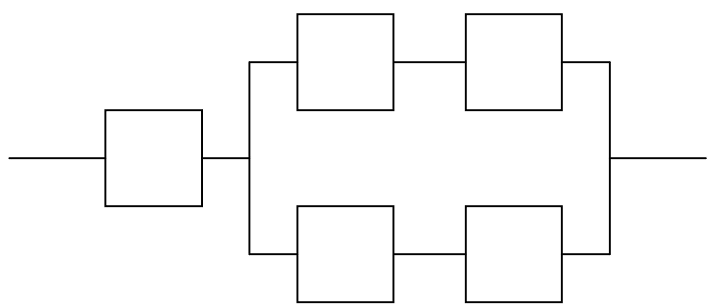
5. Дискретная случайная величина задана выборкой:

0, -1, 0, 1, 1, -1, -1, 0, 0, 0, -1, 0, 1, 1, 0, -1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, -1, 1, 1

Построить полигон частот и эмпирическую функцию распределения. Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Вариант 18

1. Электрическая цепь состоит из пяти элементов, вероятность безотказной работы которых – независимые события, имеющие вероятности $q_i = 0{,}9$ каждый. Найти вероятность P отказа цепи за данный промежуток времени.



2. Дискретная случайная величина задана законом распределения $p_i(x_i)$. Найти величину a, построить график функции распределения данной случайной величины. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины.

x_i	0	1	2	3	4
p_i	a	0,1	0,4	0,3	0,1

3. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины задана выражением:

$$f(x) = \begin{cases} 0; & x \le 0 \\ a; & 0 < x \le 10 \\ 0; & x > 10 \end{cases}$$

Найти величину коэффициента a, написать аналитическое выражение и простроить график функции распределения, найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной

случайной величины. Найти вероятности попадания данной случайной величины в интервалы $(4,6)$ и $(6,\ 12)$.

4. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины с математическим ожиданием $m=6$ в интервал (4; 8) равна 0,8. Найти дисперсии данной случайной величины.

5. Непрерывная случайная величина задана упорядоченной выборкой.

$(x_{i-1};x_i)$	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)	[10; 12)	[12; 14]
n_i	5	20	50	20	5

Построить гистограмму и эмпирическую функцию распределения.
Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Вариант 19

1. Принимаются три сообщения, причем вероятность приема первого сообщения $p_1=0{,}7$, второго $p_2=0{,}8$ и третьего $p_3=0{,}9$. Случайные события

A={не принято ни одного сообщения};

B={ принято ровно одно сообщение}.

Найти вероятности указанных случайных событий.

2. Дискретная случайная величина задана законом распределения $p_i(x_i)$. Найти величину a, построить график функции распределения данной случайной величины. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины.

x_i	0	2	4	6	8
p_i	0,1	0,2	a	0,2	0,1

3. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины задана выражением:

$$f(x)=\begin{cases}0; & x\le -4\\ a; & -4<x\le 4\\ 0; & x>4\end{cases}$$

Найти величину коэффициента a, написать аналитическое выражение и простроить график функции распределения, найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины. Найти вероятности попадания данной случайной величины в интервалы $(-3,1)$ и $(1,\ 6)$.

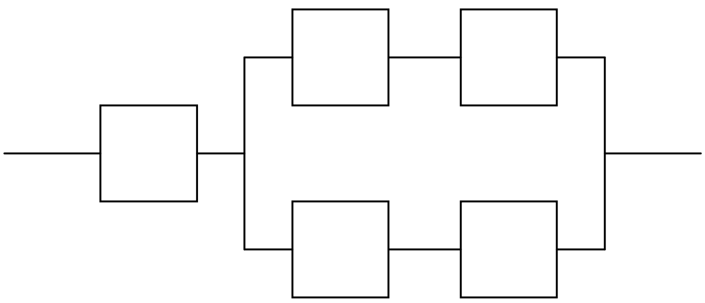
4. Дана нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием $m=5$ и дисперсией $\sigma^2=4$. Найти вероятность того, что абсолютная величина отклонения случайной величины от ее математического ожидания меньше 4.

5. Дискретная случайная величина задана выборкой:

-1, -2, 0, 0, 0, 0, -1, -2, -1, -2, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -2, -1, -2, 0, 0, 0, -1, -2, -1
Построить полигон частот и эмпирическую функцию распределения. Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Вариант 20

1. Электрическая цепь состоит из пяти элементов, выход из строя которых в заданный промежуток времени – независимые события, имеющие вероятности $p_i = 0{,}1$ каждый. Найти вероятность P отказа цепи за данный промежуток времени.



2. Дискретная случайная величина задана законом распределения $p_i(x_i)$. Найти величину a, построить график функции распределения данной случайной величины. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины.

x_i	0	2	4	6	8
p_i	0,2	a	0,3	0,2	0,1

3. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины задана выражением:

$$f(x) = \begin{cases} 0; & x \le 0 \\ ax^3; & 0 < x \le 6 \\ 0; & x > 6 \end{cases}$$

Найти величину коэффициента a, написать аналитическое выражение и простроить график функции распределения, найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины. Найти вероятности попадания данной случайной величины в интервалы $(2,\ 4)$ и $(4,\ 10)$.

4. Дана нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием $m = 6$ и дисперсией $\sigma^2 = 4$. Найти вероятность попадания данной случайной величины в интервал (3;8).

5. Непрерывная случайная величина задана упорядоченной выборкой.

$(x_{i-1};x_i)$	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)	[10; 12)	[12; 14]
n_i	30	30	70	40	30

Построить гистограмму и эмпирическую функцию распределения.
Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Вариант 21

1. Сообщение независимо передается до его первого правильного приема . Вероятность правильного приема при передаче каждого сообщения $p = 0{,}9$. Найти вероятности следующих случайных событий:

A={сообщение было передано два раза};
B={ сообщение было передано по крайней мере два раза}.

2. Дискретная случайная величина задана законом распределения $p_i(x_i)$. Найти величину a, построить график функции распределения данной случайной величины. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины.

x_i	0	2	4	6	8
p_i	a	0,2	0,4	0,2	0,1

3. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины задана выражением:

$$f(x) = \begin{cases} 0; & x \le -2 \\ a; & -2 < x \le 2 \\ 0; & x > 2 \end{cases}$$

Найти величину коэффициента a, написать аналитическое выражение и простроить график функции распределения, найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины. Найти вероятности попадания данной случайной величины в интервалы $(-1,\, 1)$ и $(1,\ 5)$.

4. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины с математическим ожиданием $m = 5$ в интервал (4; 6) равна 0,8. Найти дисперсии данной случайной величины.

5. Непрерывная случайная величина задана упорядоченной выборкой.

$(x_{i-1};x_i)$	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)	[10; 12)	[12; 14]
n_i	30	30	70	40	30

Построить гистограмму и эмпирическую функцию распределения.

Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Вариант 22

1. Последовательность передаваемых сигналов состоит из независимо передаваемых точек и тире, причем количество точек в этом потоке в среднем в два раза больше, чем тире. Вероятность правильного приема точки $p_1 = 0{,}6$, тире $p_2 = 0{,}9$. Найти вероятность того, что произвольно взятый сигнал будет принят с ошибкой.

2. Дискретная случайная величина задана законом распределения $p_i(x_i)$. Найти величину a, построить график функции распределения данной случайной величины. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины.

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,3	0,2	a	0,2	0,1

3. Функция распределения непрерывной случайной величины задана выражением:

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x \le 0 \\ ax^3; & 0 < x \le 6 \\ 1; & x > 6 \end{cases}$$

Найти величину коэффициента a, написать аналитическое выражение и простроить графи плотности распределения вероятностей, найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины. Найти вероятности попадания данной случайной величины в интервалы $(2,\,4)$ и $(4,\ 10)$.

4. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины с математическим ожиданием $m = 5$ в интервал (4; 6) равна 0,8. Найти дисперсии данной случайной величины.

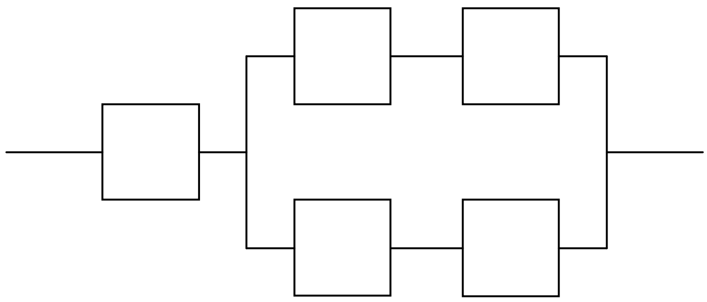
5. Найти выборочный коэффициент корреляции для пары случайных величин:

Y / X	0	1	2
0	30	10	10
2	10	20	20

Вариант 23

1. Электрическая цепь состоит из пяти элементов, безотказная работа которых в заданный промежуток времени – независимые события, имеющие

вероятности $q_i = 0{,}8$ каждый. Найти вероятность Q отказа цепи за данный промежуток времени.



2. Дискретная случайная величина задана законом распределения $p_i(x_i)$. Найти величину a, построить график функции распределения данной случайной величины. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины.

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,2	0,2	0,4	a	0,1

3. Функция распределения непрерывной случайной величины задана выражением:

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x \le 0 \\ ax^3; & 0 < x \le 2 \\ 1; & x > 2 \end{cases}$$

Найти величину коэффициента a, написать аналитическое выражение и простроить графи плотности распределения вероятностей, найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины. Найти вероятности попадания данной случайной величины в интервалы $(0,\ 1)$ и $(1,\ 4)$.

4. Дана нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием $m = 5$ и дисперсией $\sigma^2 = 4$. Найти вероятность того, что абсолютная величина отклонения случайной величины от ее математического ожидания меньше 2.

5. Дискретная случайная величина задана выборкой:

-1, -2, 0, 0, 0, 0, -1, -2, -1, -2, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -2, -1, -2, 0, 0, 0, -1, -2, -1

Построить полигон частот и эмпирическую функцию распределения. Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Вариант 24

1. Принимаются три сообщения, причем вероятность приема первого сообщения $p_1 = 0{,}7$, второго $p_2 = 0{,}8$ и третьего $p_3 = 0{,}6$. Случайные события

A={принято оба сообщения};

B={ принято хотя бы два сообщение}.

Найти вероятности указанных случайных событий.

2. Дискретная случайная величина задана законом распределения $p_i(x_i)$. Найти величину a, построить график функции распределения данной случайной величины. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины.

x_i	0	2	4	6	8
p_i	a	0,2	0,4	0,2	0,1

3. Функция распределения непрерывной случайной величины задана выражением:

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x \le 0 \\ ax^2; & 0 < x \le 6 \\ 1; & x > 6 \end{cases}$$

Найти величину коэффициента a, написать аналитическое выражение и простроить графи плотности распределения вероятностей, найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины. Найти вероятности попадания данной случайной величины в интервалы $(2, 3)$ и $(3,\ 7)$.

4. Дана нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием $m = 5$ и дисперсией $\sigma^2 = 4$. Найти вероятность попадания данной случайной величины в интервал (4; 7).

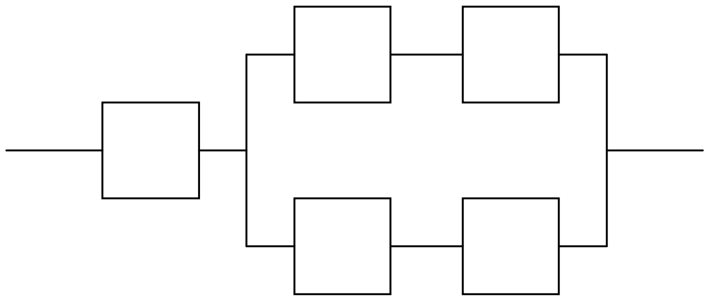
5. Дискретная случайная величина задана выборкой:

0, -1, 0, 1, 1, -1, -1, 0, 0, 0, -1, 0, 1, 1, 0, -1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, -1, 1, 1

Построить полигон частот и эмпирическую функцию распределения. Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Вариант 25

1. Электрическая цепь состоит из пяти элементов, выход из строя которых в заданный промежуток времени – независимые события, имеющие вероятности $p_i = 0{,}1$ каждый. Найти вероятность P отказа цепи за данный промежуток времени.



2. Дискретная случайная величина задана законом распределения $p_i(x_i)$. Найти величину a, построить график функции распределения данной случайной величины. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины.

x_i	0	2	4	6	8
p_i	a	0,2	0,4	0,2	0,1

3. Функция распределения непрерывной случайной величины задана выражением:

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x \le 0 \\ ax; & 0 < x \le 8 \\ 1; & x > 8 \end{cases}$$

Найти величину коэффициента a, написать аналитическое выражение и простроить графи плотности распределения вероятностей, найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины. Найти вероятности попадания данной случайной величины в интервалы $(4, 6)$ и $(6, 12)$.

4. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины с математическим ожиданием $m = 5$ в интервал (4; 6) равна 0,8. Найти дисперсии данной случайной величины.

5. Непрерывная случайная величина задана упорядоченной выборкой.

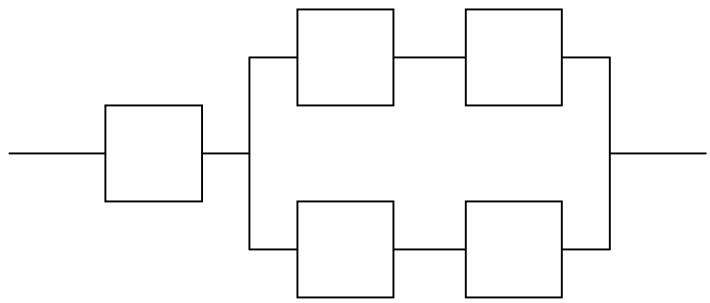
$(x_{i-1};x_i)$	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)	[10; 12)	[12; 14]
n_i	5	30	50	10	5

Построить гистограмму и эмпирическую функцию распределения.
Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Вариант 26

1. Электрическая цепь состоит из пяти элементов, выход из строя которых в заданный промежуток времени – независимые события, имеющие

вероятности $p_i = 0{,}1$ каждый. Найти вероятность P отказа цепи за данный промежуток времени.



2. Дискретная случайная величина задана законом распределения $p_i(x_i)$. Найти величину a, построить график функции распределения данной случайной величины. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины.

x_i	0	2	4	6	8
p_i	a	0,2	0,4	0,2	0,1

3. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины задана выражением:

$$f(x) = \begin{cases} 0; & x \le 0 \\ ax; & 0 < x \le 8 \\ 0; & x > 8 \end{cases}$$

Найти величину коэффициента a, написать аналитическое выражение и простроить график функции распределения, найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины. Найти вероятности попадания данной случайной величины в интервалы $(0,\ 6)$ и $(6,\ 10)$.

4. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины с математическим ожиданием $m = 5$ в интервал (4; 6) равна 0,8. Найти дисперсии данной случайной величины.

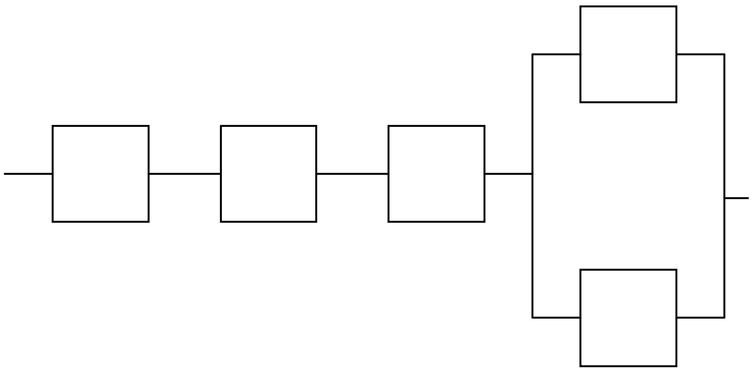
5. Дискретная случайная величина задана выборкой:

1, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 1, 1, 1, 1, 3, 3, 1, 1, 1, 2, 3, 1

Построить полигон частот и эмпирическую функцию распределения. Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Вариант 27

1. Электрическая цепь состоит из пяти элементов, выход из строя которых в заданный промежуток времени – независимые события, имеющие вероятности $p_i = 0{,}1$ каждый. Найти вероятность P отказа цепи за данный промежуток времени.



2. Дискретная случайная величина задана законом распределения $p_i(x_i)$. Найти величину a, построить график функции распределения данной случайной величины. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины.

x_i	0	2	4	6	8
p_i	a	0,2	0,4	0,2	0,1

3. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины задана выражением:

$$f(x) = \begin{cases} 0; & x \le 0 \\ ax; & 0 < x \le 10 \\ 0; & x > 10 \end{cases}$$

Найти величину коэффициента a, написать аналитическое выражение и простроить график функции распределения, найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины. Найти вероятности попадания данной случайной величины в интервалы $(2,\ 4)$ и $(4,\ 14)$.

4. Дана нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием $m = 5$ и дисперсией $\sigma^2 = 4$. Найти вероятность попадания данной случайной величины в интервал (4; 7).

5. Дискретная случайная величина задана выборкой:

1, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 1, 1, 1, 1, 3, 3, 1, 1, 1, 2, 3, 1

Построить полигон частот и эмпирическую функцию распределения. Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Вариант 28

1. Принимаются три сообщения, причем вероятность приема первого сообщения $p_1 = 0{,}7$, второго $p_2 = 0{,}8$ и третьего $p_3 = 0{,}9$. Случайные события

A={не принято ни одного сообщения};

B={ принято ровно одно сообщение}.

Найти вероятности указанных случайных событий.

2. Дискретная случайная величина задана законом распределения $p_i(x_i)$. Найти величину a, построить график функции распределения данной случайной величины. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины.

x_i	0	2	4	6	8
p_i	a	0,2	0,4	0,2	0,1

3. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины задана выражением:

$$f(x) = \begin{cases} 0; & x \le 0 \\ ax^2; & 0 < x \le 8 \\ 0; & x > 8 \end{cases}$$

Найти величину коэффициента a, написать аналитическое выражение и простроить график функции распределения, найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины. Найти вероятности попадания данной случайной величины в интервалы $(2,\ 8)$ и $(4,\ 12)$.

4. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины с математическим ожиданием $m = 5$ в интервал (4; 6) равна 0,8. Найти дисперсии данной случайной величины.

5. Дискретная случайная величина задана выборкой:

1, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 1, 1, 1, 1, 3, 3, 1, 1, 1, 2, 3, 1

Построить полигон частот и эмпирическую функцию распределения. Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Вариант 29

1. Сообщение независимо передается до его первого правильного приема. Вероятность правильного приема при передаче каждого сообщения $p = 0{,}7$. Найти вероятности следующих случайных событий:

A={сообщение принято хотя бы три раза};

B={ сообщение надо передавать третий раз}.

2. Дискретная случайная величина задана законом распределения $p_i(x_i)$. Найти величину a, построить график функции распределения данной случайной величины. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины.

x_i	0	2	4	6	8
p_i	a	0,2	0,4	0,2	0,1

3. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины задана выражением:

$$f(x) = \begin{cases} 0; & x \le 0 \\ a; & 0 < x \le 10 \\ 0; & x > 10 \end{cases}$$

Найти величину коэффициента a, написать аналитическое выражение и простроить график функции распределения, найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины. Найти вероятности попадания данной случайной величины в интервалы $(0,\ 6)$ и $(6,\ 12)$.

4. Дана нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием $m = 5$ и дисперсией $\sigma^2 = 4$. Найти вероятность того, что абсолютная величина отклонения случайной величины от ее математического ожидания меньше 2.

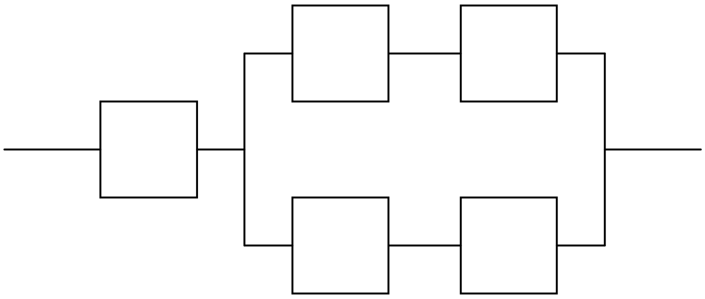
5.Непрерывная случайная величина задана упорядоченной выборкой.

$(x_{i-1};x_i)$	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)	[10; 12)	[12; 14]
n_i	30	30	70	40	30

Построить гистограмму и эмпирическую функцию распределения.
Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Вариант 30

1. Электрическая цепь состоит из пяти элементов, безотказная работа которых в заданный промежуток времени – независимые события, имеющие вероятности $q_i = 0{,}9$ каждый. Найти вероятность Q безотказной работы цепи за данный промежуток времени.



2. Дискретная случайная величина задана законом распределения $p_i(x_i)$. Найти величину a, построить график функции распределения данной случайной величины. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины.

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,2	0,2	0,3	0,1	a

3. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины задана выражением:

$$f(x)=\begin{cases}0; & x\le -3\\ a; & -3<x\le 1\\ 0; & x>1\end{cases}$$

Найти величину коэффициента a, написать аналитическое выражение и простроить график функции распределения, найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины. Найти вероятности попадания данной случайной величины в интервалы $(-2,0)$ и $(0,\ 4)$.

4. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины с математическим ожиданием $m=4$ в интервал (3; 5) равна 0,6. Найти дисперсии данной случайной величины.

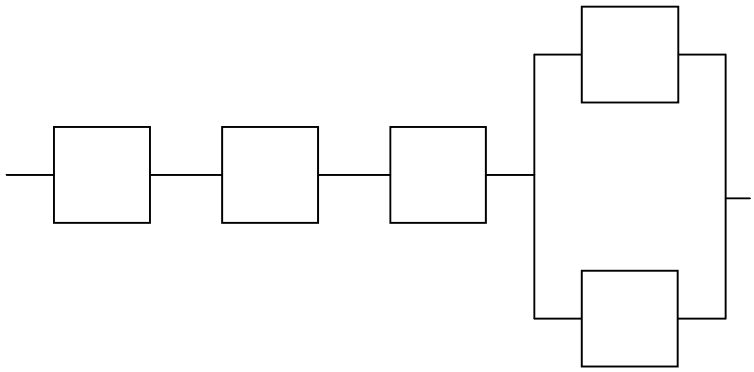
5. Дискретная случайная величина задана выборкой:

0, -1, 0, 1, 1, -1, -1, 0, 0, 0, -1, 0, 1, 1, 0, -1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, -1, 1, 1

Построить полигон частот и эмпирическую функцию распределения. Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Вариант 31

1. Электрическая цепь состоит из пяти элементов, безотказная работа которых в заданный промежуток времени – независимые события, имеющие вероятности $q_i = 0{,}9$ каждый. Найти вероятность Q безотказной работы цепи за данный промежуток времени.



2. Дискретная случайная величина задана законом распределения $p_i(x_i)$. Найти величину a, построить график функции распределения данной случайной величины. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины.

x_i	0	2	4	6	8
p_i	a	0,2	0,4	0,2	0,1

3. Функция распределения непрерывной случайной величины задана выражением:

$$F(x)=\begin{cases}0; & x\le 0\\ ax^2; & 0<x\le 4\\ 1; & x>4\end{cases}$$

Найти величину коэффициента a, написать аналитическое выражение и простроить графи плотности распределения вероятностей, найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины. Найти вероятности попадания данной случайной величины в интервалы $(2,3)$ и $(1,\ 5)$.

4. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины с математическим ожиданием $m=5$ в интервал (4; 6) равна 0,8. Найти дисперсии данной случайной величины.

5. Дискретная случайная величина задана выборкой:

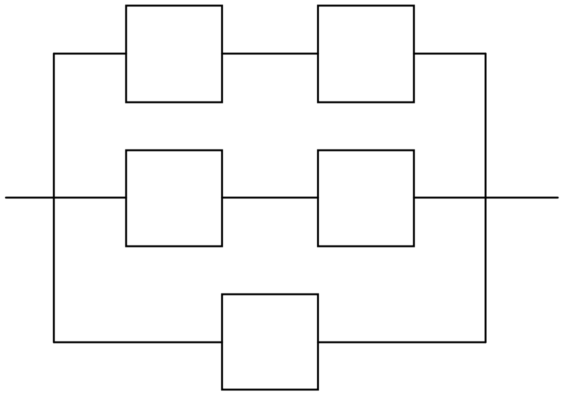
0, -1, 0, 1, 1, -1, -1, 0, 0, 0, -1, 0, 1, 1, 0, -1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, -1, 1, 1

Построить полигон частот и эмпирическую функцию распределения. Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Вариант 32

1. Электрическая цепь состоит из пяти элементов, выход из строя которых в заданный промежуток времени – независимые события, имеющие

вероятности $p_i = 0,2$ каждый. Найти вероятность P отказа цепи за данный промежуток времени.



2. Дискретная случайная величина задана законом распределения $p_i(x_i)$. Найти величину a, построить график функции распределения данной случайной величины. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины.

x_i	0	1	2	3	4
p_i	a	0,2	0,3	0,1	0,1

3. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины задана выражением:

$$f(x) = \begin{cases} 0; & x \le 0 \\ ax^3; & 0 < x \le 8 \\ 0; & x > 8 \end{cases}$$

Найти величину коэффициента a, написать аналитическое выражение и простроить график функции распределения, найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины. Найти вероятности попадания данной случайной величины в интервалы $(0, 4)$ и $(4, 10)$.

4. Дана нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием $m = 6$ и дисперсией $\sigma^2 = 4$. Найти вероятность того, что абсолютная величина отклонения случайной величины от ее математического ожидания меньше 3.

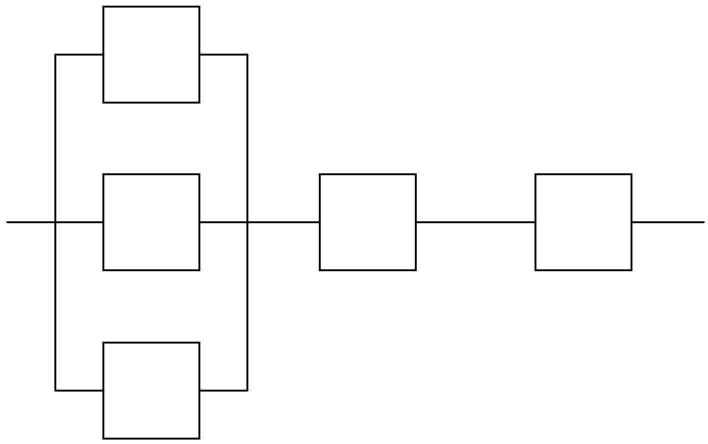
5. Дискретная случайная величина задана выборкой:

0, 1, 2, 1, 0, 2, 0, 1, 2, 0, 0, 0, 1, 1, 1,2, 0, 1, 0, 0, 2, 1, 2, 0, 0

Построить полигон частот и эмпирическую функцию распределения. Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Вариант 33

1. Электрическая цепь состоит из пяти элементов, безотказная работа которых в заданный промежуток времени – независимые события, имеющие вероятности $q_i = 0{,}9$ каждый. Найти вероятность Q безотказной работы цепи за данный промежуток времени.



2. Дискретная случайная величина задана законом распределения $p_i(x_i)$. Найти величину a, построить график функции распределения данной случайной величины. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины.

x_i	-2	-1	0	1	2
p_i	0,2	0,2	a	0,2	0,1

3. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины задана выражением:

$$f(x) = \begin{cases} 0; & x \le -4 \\ a; & -4 < x \le 0 \\ 0; & x > 0 \end{cases}$$

Найти величину коэффициента a, написать аналитическое выражение и простроить график функции распределения, найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины. Найти вероятности попадания данной случайной величины в интервалы $(-3, -1)$ и $-1, \ 5)$

4. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины с математическим ожиданием $m = 5$ в интервал (4; 6) равна 0,8. Найти дисперсии данной случайной величины.

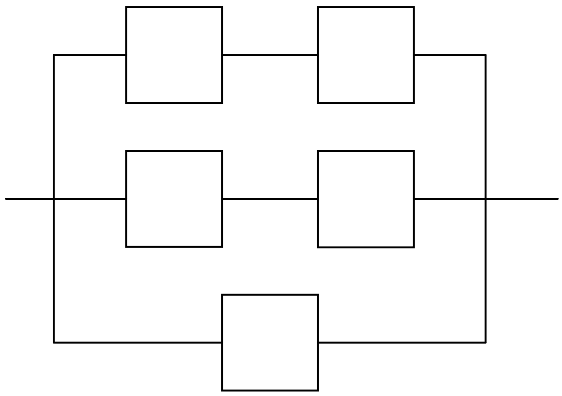
5. Дискретная случайная величина задана выборкой:

0, 1, 2, 1, 0, 2, 0, 1, 2, 0, 0, 0, 1, 1, 1,2, 0, 1, 0, 0, 2, 1, 2, 0, 0

Построить полигон частот и эмпирическую функцию распределения. Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Вариант 34

1. Электрическая цепь состоит из пяти элементов, выход из строя которых в заданный промежуток времени – независимые события, имеющие вероятности $p_i = 0{,}2$ каждый. Найти вероятность P отказа цепи за данный промежуток времени.



2. Дискретная случайная величина задана законом распределения $p_i(x_i)$. Найти величину a, построить график функции распределения данной случайной величины. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины.

x_i	0	1	2	3	4
p_i	a	0,2	0,3	0,1	0,1

3. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины задана выражением:

$$f(x) = \begin{cases} 0; & x \le 0 \\ ax^3; & 0 < x \le 8 \\ 0; & x > 8 \end{cases}$$

Найти величину коэффициента a, написать аналитическое выражение и простроить график функции распределения, найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины. Найти вероятности попадания данной случайной величины в интервалы $(0,\ 4)$ и $(4,\ 10)$.

4. Дана нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием $m = 6$ и дисперсией $\sigma^2 = 4$. Найти вероятность того, что

абсолютная величина отклонения случайной величины от ее математического ожидания меньше 3.
5. Дискретная случайная величина задана выборкой:
0, 1, 2, 1, 0, 2, 0, 1, 2, 0, 0, 0, 1, 1, 1,2, 0, 1, 0, 0, 2, 1, 2, 0, 0
Построить полигон частот и эмпирическую функцию распределения. Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Вариант 35

1. Сообщение состоит из пяти сигналов, причем вероятности безошибочного приема каждого сигнала одинаковы и равны $p = 0{,}8$. Сообщение будет принято, если из пяти сигналов принято по крайней мере три. Найти вероятность того, что передаваемо сообщение не принято.
2. Дискретная случайная величина задана законом распределения $p_i(x_i)$. Найти величину a, построить график функции распределения данной случайной величины. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины.

x_i	0	2	4	6	8
p_i	a	0,2	0,4	0,2	0,1

3. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины задана выражением:

$$f(x) = \begin{cases} 0; & x \le 0 \\ ax; & 0 < x \le 6 \\ 0; & x > 6 \end{cases}$$

Найти величину коэффициента a, написать аналитическое выражение и простроить график функции распределения, найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины. Найти вероятности попадания данной случайной величины в интервалы $(0,\,4)$ и $(4,\;8)$.
4. Дана нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием $m = 5$ и дисперсией $\sigma^2 = 4$. Найти вероятность попадания данной случайной величины в интервал (4; 7).
5. Дискретная случайная величина задана выборкой:
1, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 1, 1, 1, 1, 3, 3, 1, 1, 1, 2, 3, 1
Построить полигон частот и эмпирическую функцию распределения. Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Вариант 36

1. Принимаются три сообщения, причем вероятность приема первого сообщения $p_1 = 0{,}7$, второго $p_2 = 0{,}8$ и третьего $p_3 = 0{,}9$. Случайные события

A={принято оба сообщения};
B={ принято хотя бы одно сообщение}.

Найти вероятности указанных случайных событий.

2. Дискретная случайная величина задана законом распределения $p_i(x_i)$. Найти величину a, построить график функции распределения данной случайной величины. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины.

x_i	0	2	4	6	8
p_i	a	0,2	0,4	0,2	0,1

3. Функция распределения непрерывной случайной величины задана выражением:

$$F(x)=\begin{cases}0; & x\le 0\\ ax^3; & 0<x\le 10\\ 1; & x>10\end{cases}$$

Найти величину коэффициента a, написать аналитическое выражение и простроить графи плотности распределения вероятностей, найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины. Найти вероятности попадания данной случайной величины в интервалы $(4,\ 6)$ и $(6,\ 12)$.

4. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины с математическим ожиданием $m=5$ в интервал (4; 6) равна 0,8. Найти дисперсии данной случайной величины.

5. Дискретная случайная величина задана выборкой:

0, 1, 2, 1, 0, 2, 0, 1, 2, 0, 0, 0, 1, 1, 1,2, 0, 1, 0, 0, 2, 1, 2, 0, 0

Построить полигон частот и эмпирическую функцию распределения. Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию

Вариант 37

1. Сообщение независимо передается до его первого правильного приема . Вероятность правильного приема при передаче каждого сообщения $p=0{,}6$. Найти вероятности следующих случайных событий:

A={сообщение было передано хотя бы три раза};
B={ сообщение надо передавать третий раз}.

2. Дискретная случайная величина задана законом распределения $p_i(x_i)$. Найти величину a, построить график функции распределения данной случайной величины. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины.

x_i	0	2	4	6	8
p_i	a	0,2	0,4	0,2	0,1

3. Функция распределения непрерывной случайной величины задана выражением:

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x \le 0 \\ ax^3; & 0 < x \le 8 \\ 1; & x > 8 \end{cases}$$

Найти величину коэффициента a, написать аналитическое выражение и простроить графи плотности распределения вероятностей, найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины. Найти вероятности попадания данной случайной величины в интервалы $(2,4)$ и $(4,\ 10)$.

4. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины с математическим ожиданием $m = 5$ в интервал (4; 6) равна 0,8. Найти дисперсии данной случайной величины.

5.Непрерывная случайная величина задана упорядоченной выборкой.

$(x_{i-1};x_i)$	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)	[10; 12)	[12; 14]
n_i	5	20	50	20	5

Построить гистограмму и эмпирическую функцию распределения.
Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Вариант 38

1. Сообщение состоит из пяти сигналов, причем вероятности безошибочного приема каждого сигнала одинаковы и равны $p = 0{,}7$. Сообщение будет принято, если из пяти сигналов принято по крайней мере три. Найти вероятность того, что передаваемое сообщение не принято.

2. Дискретная случайная величина задана законом распределения $p_i(x_i)$. Найти величину a, построить график функции распределения данной случайной величины. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины.

x_i	-2	-1	0	1	2
p_i	0,1	0,2	0,2	0,2	a

3. Функция распределения непрерывной случайной величины задана выражением:

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x \le 0 \\ ax^3; & 0 < x \le 4 \\ 1; & x > 4 \end{cases}$$

Найти величину коэффициента a, написать аналитическое выражение и простроить графи плотности распределения вероятностей, найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины. Найти вероятности попадания данной случайной величины в интервалы $(0,\ 2)$ и $(2,\ 10)$.

4. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины с математическим ожиданием $m=4$ в интервал (3; 5) равна 0,6. Найти дисперсии данной случайной величины.

5. Непрерывная случайная величина задана упорядоченной выборкой.

$(x_{i-1};x_i)$	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)	[10; 12)	[12; 14]
n_i	5	20	50	20	5

Построить гистограмму и эмпирическую функцию распределения.
Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Вариант 39

1. Сообщение состоит из пяти сигналов, причем вероятности безошибочного приема каждого сигнала одинаковы и равны $p=0{,}6$. Сообщение будет принято, если из пяти сигналов принято по крайней мере три. Найти вероятность того, что передаваемое сообщение не принято.

2. Дискретная случайная величина задана законом распределения $p_i(x_i)$. Найти величину a, построить график функции распределения данной случайной величины. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины.

x_i	0	2	4	6	8
p_i	a	0,2	0,4	0,2	0,1

3. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины задана выражением:

$$f(x)=\begin{cases}0; & x\le 0\\ ax; & 0<x\le 4\\ 0; & x>4\end{cases}$$

Найти величину коэффициента a, написать аналитическое выражение и простроить график функции распределения, найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины. Найти вероятности попадания данной случайной величины в интервалы $(0,1)$ и $(1,\ 5)$.

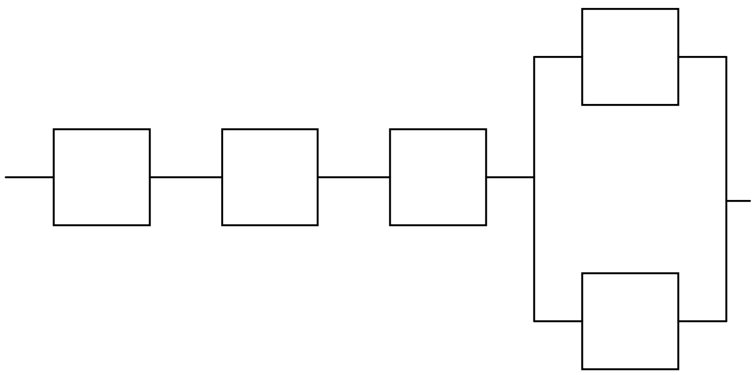
4. Дана нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием $m=5$ и дисперсией $\sigma^2=4$. Найти вероятность попадания данной случайной величины в интервал (4; 7).

5. Дискретная случайная величина задана выборкой:

1, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 1, 1, 1, 1, 3, 3, 1, 1, 1, 2, 3, 1
Построить полигон частот и эмпирическую функцию распределения. Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию

Вариант 40

1. Электрическая цепь состоит из пяти элементов, выход из строя которых в заданный промежуток времени – независимые события, имеющие вероятности $p_i = 0{,}1$ каждый. Найти вероятность P отказа цепи за данный промежуток времени.



2. Дискретная случайная величина задана законом распределения $p_i(x_i)$. Найти величину a, построить график функции распределения данной случайной величины. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины.

x_i	0	2	4	6	8
p_i	a	0,2	0,4	0,2	0,1

3. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины задана выражением:

$$f(x) = \begin{cases} 0; & x \le 0 \\ ax; & 0 < x \le 10 \\ 0; & x > 10 \end{cases}$$

Найти величину коэффициента a, написать аналитическое выражение и простроить график функции распределения, найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины. Найти вероятности попадания данной случайной величины в интервалы $(2,\ 4)$ и $(4,\ 14)$.

4. Дана нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием $m = 5$ и дисперсией $\sigma^2 = 4$. Найти вероятность попадания данной случайной величины в интервал (4; 7).

5. Дискретная случайная величина задана выборкой:

1, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 1, 1, 1, 1, 3, 3, 1, 1, 1, 2, 3, 1

Построить полигон частот и эмпирическую функцию распределения. Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию

Вариант 41

1. Сообщение независимо передается до его первого правильного приема . Вероятность правильного приема при передаче каждого сообщения $p = 0{,}8$. Найти вероятности следующих случайных событий:

A={сообщение было передано ровно четыре раза};
B={ сообщение было передано более четырех раз}.

2. Дискретная случайная величина задана законом распределения $p_i(x_i)$. Найти величину a, построить график функции распределения данной случайной величины. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины.

x_i	-1	0	1	2	3
p_i	a	0,2	0,4	0,2	0,1

3. Функция распределения непрерывной случайной величины задана выражением:

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x \le 0 \\ ax; & 0 < x \le 6 \\ 1; & x > 6 \end{cases}$$

Найти величину коэффициента a, написать аналитическое выражение и простроить графи плотности распределения вероятностей, найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины. Найти вероятности попадания данной случайной величины в интервалы $(4, 6)$ и $(3, 10)$.

4. Дана нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием $m = 5$ и дисперсией $\sigma^2 = 4$. Найти вероятность того, что абсолютная величина отклонения случайной величины от ее математического ожидания меньше 2.

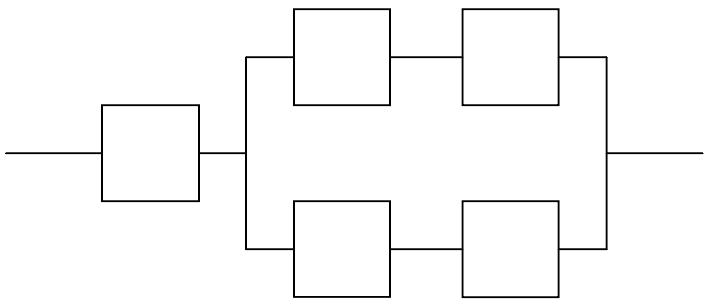
5. Непрерывная случайная величина задана упорядоченной выборкой.

$(x_{i-1};x_i)$	[0; 2)	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 12]
n_i	10	30	90	60	10

Построить гистограмму и эмпирическую функцию распределения.
Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию

Вариант 42

1. Электрическая цепь состоит из пяти элементов, безотказная работа которых в заданный промежуток времени – независимые события, имеющие вероятности $q_i = 0{,}9$ каждый. Найти вероятность Q безотказной работы цепи за данный промежуток времени.



2. Дискретная случайная величина задана законом распределения $p_i(x_i)$. Найти величину a, построить график функции распределения данной случайной величины. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины.

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,2	0,2	0,3	0,1	a

3. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины задана выражением:

$$f(x) = \begin{cases} 0; & x \le -3 \\ a; & -3 < x \le 1 \\ 0; & x > 1 \end{cases}$$

Найти величину коэффициента a, написать аналитическое выражение и простроить график функции распределения, найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины. Найти вероятности попадания данной случайной величины в интервалы $(-2, 0)$ и $(0,\ 4)$.

4. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины с математическим ожиданием $m = 4$ в интервал (3; 5) равна 0,6. Найти дисперсии данной случайной величины.
5. Дискретная случайная величина задана выборкой:
0, -1, 0, 1, 1, -1, -1, 0, 0, 0, -1, 0, 1, 1, 0, -1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, -1, 1, 1
Построить полигон частот и эмпирическую функцию распределения. Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Вариант 43

1. Сообщение состоит из пяти сигналов, причем вероятности безошибочного приема каждого сигнала одинаковы и равны $p = 0{,}6$. Сообщение будет принято, если из пяти сигналов принято по крайней мере три. Найти вероятность того, что передаваемотсообщение не принято.
2. Дискретная случайная величина задана законом распределения $p_i(x_i)$. Найти величину a, построить график функции распределения данной случайной величины. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины.

x_i	0	2	4	6	8
p_i	a	0,2	0,4	0,2	0,1

3. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины задана выражением:

$$f(x) = \begin{cases} 0; & x \le 0 \\ a; & 0 < x \le 8 \\ 0; & x > 8 \end{cases}$$

Найти величину коэффициента a, написать аналитическое выражение и простроить график функции распределения, найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины. Найти вероятности попадания данной случайной величины в интервалы $(4, 6)$ и $(6, 10)$.
4. Дана нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием $m = 5$ и дисперсией $\sigma^2 = 4$. Найти вероятность попадания данной случайной величины в интервал (4; 7).
5. Непрерывная случайная величина задана упорядоченной выборкой.

$(x_{i-1};x_i)$	[0; 2)	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 12]
n_i	10	30	90	60	10

Построить гистограмму и эмпирическую функцию распределения.
Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию

Вариант 44

1. Принимаются три сообщения, причем вероятность приема первого сообщения $p_1 = 0{,}7$, второго $p_2 = 0{,}8$ и третьего $p_3 = 0{,}9$. Случайные события

A={принято ровно два сообщения};

B={ не принято ни одного сообщения}.

Найти вероятности указанных случайных событий.

2. Дискретная случайная величина задана законом распределения $p_i(x_i)$. Найти величину a, построить график функции распределения данной случайной величины. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины.

x_i	0	2	4	6	8
p_i	0,1	0,2	0,3	a	0,1

3. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины задана выражением:

$$f(x) = \begin{cases} 0; & x \le -1 \\ a; & -1 < x \le 5 \\ 0; & x > 5 \end{cases}$$

Найти величину коэффициента a, написать аналитическое выражение и простроить график функции распределения, найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины. Найти вероятности попадания данной случайной величины в интервалы $(0,\ 2)$ и $(2,\ 8)$.

4. Дана нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием $m = 5$ и дисперсией $\sigma^2 = 3$. Найти вероятность того, что абсолютная величина отклонения случайной величины от ее математического ожидания меньше 4.

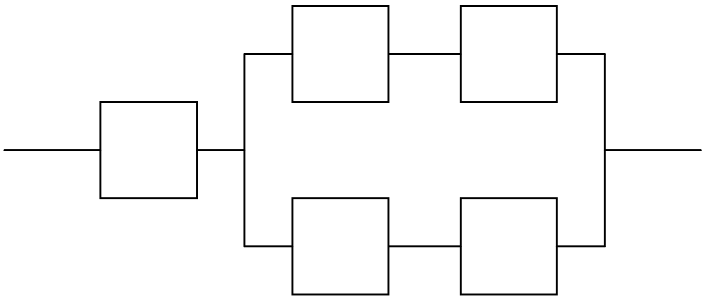
5. Непрерывная случайная величина задана упорядоченной выборкой.

$(x_{i-1};x_i)$	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)	[10; 12)	[12; 14]
n_i	10	20	20	40	10

Построить гистограмму и эмпирическую функцию распределения.
Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию

Вариант 45

1. Электрическая цепь состоит из пяти элементов, выход из строя которых в заданный промежуток времени – независимые события, имеющие вероятности $p_i = 0{,}1$ каждый. Найти вероятность P отказа цепи за данный промежуток времени.



2. Дискретная случайная величина задана законом распределения $p_i(x_i)$. Найти величину a, построить график функции распределения данной случайной величины. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины.

x_i	0	2	4	6	8
p_i	a	0,2	0,4	0,2	0,1

3. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины задана выражением:

$$f(x)=\begin{cases}0; & x\le 0\\ ax; & 0<x\le 8\\ 0; & x>8\end{cases}$$

Найти величину коэффициента a, написать аналитическое выражение и простроить график функции распределения, найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины. Найти вероятности попадания данной случайной величины в интервалы $(0,\ 6)$ и $(6,\ 10)$.

4. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины с математическим ожиданием $m=5$ в интервал (4; 6) равна 0,8. Найти дисперсии данной случайной величины.

5. Дискретная случайная величина задана выборкой:

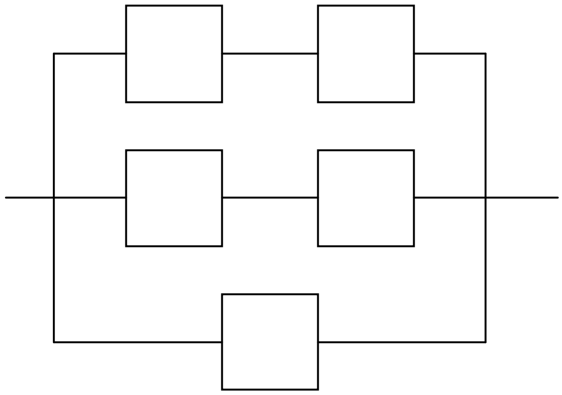
1, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 1, 1, 1, 1, 3, 3, 1, 1, 1, 2, 3, 1

Построить полигон частот и эмпирическую функцию распределения. Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Вариант 46

1. Электрическая цепь состоит из пяти элементов, выход из строя которых в заданный промежуток времени – независимые события, имеющие

вероятности $p_i = 0{,}2$ каждый. Найти вероятность P отказа цепи за данный промежуток времени.



2. Дискретная случайная величина задана законом распределения $p_i(x_i)$. Найти величину a, построить график функции распределения данной случайной величины. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины.

x_i	0	1	2	3	4
p_i	a	0,2	0,3	0,1	0,1

3. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины задана выражением:

$$f(x) = \begin{cases} 0; & x \le 0 \\ ax^3; & 0 < x \le 8 \\ 0; & x > 8 \end{cases}$$

Найти величину коэффициента a, написать аналитическое выражение и простроить график функции распределения, найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины. Найти вероятности попадания данной случайной величины в интервалы $(0,\ 4)$ и $(4,\ 10)$.

4. Дана нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием $m = 6$ и дисперсией $\sigma^2 = 4$. Найти вероятность того, что абсолютная величина отклонения случайной величины от ее математического ожидания меньше 3.

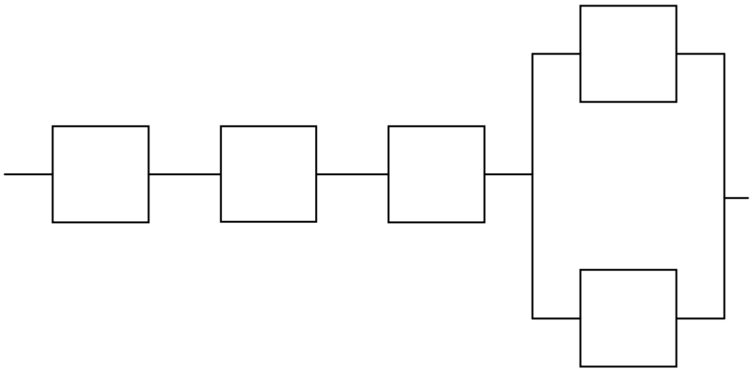
5. Дискретная случайная величина задана выборкой:

0, 1, 2, 1, 0, 2, 0, 1, 2, 0, 0, 0, 1, 1, 1,2, 0, 1, 0, 0, 2, 1, 2, 0, 0

Построить полигон частот и эмпирическую функцию распределения. Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Вариант 47

1. Электрическая цепь состоит из пяти элементов, выход из строя которых в заданный промежуток времени – независимые события, имеющие вероятности $p_i = 0{,}1$ каждый. Найти вероятность P отказа цепи за данный промежуток времени.



2. Дискретная случайная величина задана законом распределения $p_i(x_i)$. Найти величину a, построить график функции распределения данной случайной величины. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины.

x_i	0	2	4	6	8
p_i	a	0,2	0,4	0,2	0,1

3. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины задана выражением:

$$f(x) = \begin{cases} 0; & x \le 0 \\ ax^3; & 0 < x \le 10 \\ 0; & x > 10 \end{cases}$$

Найти величину коэффициента a, написать аналитическое выражение и простроить график функции распределения, найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины. Найти вероятности попадания данной случайной величины в интервалы $(4,\ 6)$ и $(6,\ 12)$.

4. Дана нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием $m = 5$ и дисперсией $\sigma^2 = 4$. Найти вероятность того, что абсолютная величина отклонения случайной величины от ее математического ожидания меньше 2.

5. Дискретная случайная величина задана выборкой:
0, 1, 2, 1, 0, 2, 0, 1, 2, 0, 0, 0, 1, 1, 1,2, 0, 1, 0, 0, 2, 1, 2, 0, 0
Построить полигон частот и эмпирическую функцию распределения. Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Вариант 48

1. Принимаются три сообщения, причем вероятность приема первого сообщения $p_1 = 0{,}7$, второго $p_2 = 0{,}8$ и третьего $p_3 = 0{,}9$. Случайные события

A={принято оба сообщения};

B={ принято хотя бы одно сообщение}.

Найти вероятности указанных случайных событий.
2. Дискретная случайная величина задана законом распределения $p_i(x_i)$. Найти величину a, построить график функции распределения данной случайной величины. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины.

x_i	0	2	4	6	8
p_i	a	0,2	0,4	0,2	0,1

3. Функция распределения непрерывной случайной величины задана выражением:

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x \le 0 \\ ax^3; & 0 < x \le 10 \\ 1; & x > 10 \end{cases}$$

Найти величину коэффициента a, написать аналитическое выражение и простроить графи плотности распределения вероятностей, найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины. Найти вероятности попадания данной случайной величины в интервалы $(4,\ 6)$ и $(6,\ 12)$.
4. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины с математическим ожиданием $m = 5$ в интервал (4; 6) равна 0,8. Найти дисперсии данной случайной величины.
5. Дискретная случайная величина задана выборкой:
0, 1, 2, 1, 0, 2, 0, 1, 2, 0, 0, 0, 1, 1, 1,2, 0, 1, 0, 0, 2, 1, 2, 0, 0
Построить полигон частот и эмпирическую функцию распределения. Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Вариант 49

1. Сообщение состоит из пяти сигналов, причем вероятности безошибочного приема каждого сигнала одинаковы и равны $p = 0{,}6$. Сообщение будет

принято, если из пяти сигналов принято хотя бы три. Найти вероятность того, что передаваемое сообщение не принято.

2. Дискретная случайная величина задана законом распределения $p_i(x_i)$. Найти величину a, построить график функции распределения данной случайной величины. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины.

x_i	-2	-1	0	1	2
p_i	0,2	0,2	a	0,2	0,1

3. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины задана выражением:

$$f(x)=\begin{cases}0; & x\le 0\\ ax; & 0<x\le 8\\ 0; & x>8\end{cases}$$

Найти величину коэффициента a, написать аналитическое выражение и простроить график функции распределения, найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины. Найти вероятности попадания данной случайной величины в интервалы $(0,\ 6)$ и $(6,\ 10)$..

4. Дана нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием $m=5$ и дисперсией $\sigma^2=4$. Найти вероятность попадания данной случайной величины в интервал (4; 7).

5. Непрерывная случайная величина задана упорядоченной выборкой.

$(x_{i-1};x_i)$	[0; 2)	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 12]
n_i	10	30	90	60	10

Построить гистограмму и эмпирическую функцию распределения.
Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Учебно-методическое пособие
по курсу

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

для студентов-заочников 2 курса
(направления: 15.03.04, 27.03.04)

4 семестр

Подписано в печать __.__.2020г. Формат 60х90 1/16.
Объём 3,2 усл.п.л. Тираж экз. Изд. № . Заказ

ООО «ТР-принт». Москва, ул. Правды, д. 24, стр. 5.
www.tirazhy.ru. +7 (499) 519-01-24