СИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ АКАДЕМИКА М. Ф. РЕШЕТНЕВА

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

Методические указания
к выполнению контрольной работы
для студентов всех экономических специальностей
и направлений заочной формы обучения

КРАСНОЯРСК 2011

УДК 330.4:519.2

Рецензент:
кандидат технических наук, доцент А. В. ЗИНЕНКО
(Сибирский государственный аэрокосмический университет
имени академика М. Ф. Решетнева)

Печатается по решению методической комиссии ФЭФ

Экономико-математические методы и модели : метод. указания к выполнению контрольной работы для студентов всех экон. спец. и направлений заочной формы обучения / сост. : Ю. В. Ерыгин, Е. Ю. Алексеева, В. Е. Герасимова ; Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т. – Красноярск, 2011. – 68 с.

Оглавление

Общие сведения

В последние годы значительный вес в экономических исследованиях приобрели экономико-математические методы и модели. Математические методы, с одной стороны, используются для исследования операций в больших природных и технических системах, а с другой стороны, находят широкое применение в финансово-экономической сфере. Содержательно экономико-математические методы опираются на традиционные математические дисциплины, математический анализ, дифференциальное и интегральное исчисление, линейную алгебру, дискретный анализ, теорию вероятности и др.

Цель контрольной работы – проверить знания, полученные студентами в процессе самостоятельного изучения учебного материала, а также закрепить умения применять на практике методы экономико-математического моделирования. Студент должен в установленный срок выполнить контрольную работу по семи темам. По каждой теме необходимо решить свой вариант задания. Номер варианта задания выбирается в соответствии с первой буквой фамилии.

При выполнении контрольной работы рекомендуется придерживаться определенной последовательности действий.

На первом этапе необходимо познакомиться с теоретическим материалом по каждой теме контрольной работы. С этой целью следует изучить теоретический материал, изложенный как в приведенном библиографическом списке, так и на лекциях.

На втором этапе необходимо познакомиться с примерами решения задач, приведенных по каждой теме.

На третьем этапе полученные теоретические и практические представления по каждой теме контрольной работы закрепляются посредством решения своего варианта задания (номера задачи).

При выполнении контрольной работы необходимо руководствоваться следующими требованиями:

1. В начале работы должен быть указан номер варианта.
2. Перед решением задачи следует привести ее условие.
3. Решение задач нужно сопровождать формулами, развернутыми расчетами и выводами по их результатам.
4. Задачи, по которым даются ответы без развернутых расчетов, пояснений, выводов, считаются нерешенными.
5. Контрольная работа должна быть оформлена аккуратно, написана разборчиво.

Выполненная контрольная работа по каждой теме сдается на проверку преподавателю и защищается на итоговом экзамене по курсу «Экономико-математические методы и модели».

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЫГОДНОГО ПУТИ

Граф – это совокупность двух конечных множеств: множества точек, которые называются вершинами, и множества пар вершин, которые называются ребрами (или дугами).

Многие практические задачи могут быть решены с помощью теории графов, например, задача размещения, задача почтальона, задача строительства дорог.

Пример задачи

Требуется перевезти груз из города A в город B. Сеть дорог, связывающих A и B, показана на рис. 1.1. Стоимость перевозки груза из города S в город J проставлена над соответствующими дугами сети.

Задание. Необходимо найти маршрут, связывающий A и B, для которого суммарные затраты на перевозку груза были бы наименьшими.

Условие. Вершинам сети соответствуют города, а дугам – транспортные магистрали (рис. 1.1).

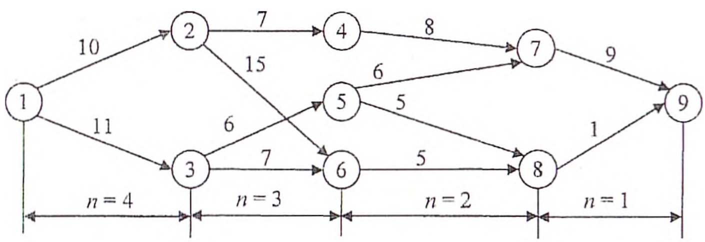

Рис. 1.1

Алгоритм решения

1. Задача разбивается на шаги искусственным образом. В качестве шага выбирается некоторое подмножество городов, на которое разбивается все множество в соответствии с заданной сетью транспортной магистрали. Сеть, изображенную на рис. 1.1, удобно разбить на четыре части. Процесс решения задачи разбивается на четыре шага.

2. В качестве параметра, характеризующего состояние управляемой системы, перед каждым шагом выберем номер города, из которого нужно выехать, и обозначим его S.

3. В качестве параметра шагового управления x_n для каждого шага выберем номер города, через который нужно ехать из города S, и обозначим его J.

4. Выигрыш $W_n(x_n)$, который приносит на n шаге управление x_n, будет C_{SJ} – стоимость перевозки груза из S в J.

Пусть $f_n(S)$ – минимальные затраты на перевозку груза от города S до конечного города, если осталось n шагов.

5. Обозначим через $J_n(S)$ состояние, в которое должна перейти система под влиянием управления J на n шаге.

6. Основное рекуррентное уравнение для данной задачи имеет вид

$$f_n(S) = \min_{S,J}\left[C_{SJ} + f_{n-1}(S)\right]. \quad (1.1)$$

Решение задачи

Выполняем *первый этап* – оптимизацию в условном направлении. Оптимизация в условном направлении выполнятся с последнего шага $n=1$. Рекуррентное уравнение для $n=1$ в соответствии с уравнением (1.1) имеет вид

$$f_1(S) = \min\left[C_{SJ} + f_0(S)\right].$$

Состояние системы S на данном шаге может иметь значение 7 или 8 (номера городов, из которых можно выехать на данном шаге). Шаговое управление $J = 9$ (номер города, через который следует ехать из города S).

Выигрыш C_{SJ} (затраты по перевозке из S в J) определяется по рис. 1.1 для всех возможных на данном шаге значений S и J: $C_{79} = 9$; $C_{89} = 8$. Значение $f_0(S) = 0$, так как из города 9 груз вывозить не надо. Таким образом, затраты на перевозку из 7 и 8 в конечный город определяются суммами:

$$f_1(7) = C_{79} + f_0(9) = 9 + 0 = 9,$$
$$f_1(8) = C_{89} + f_0(9) = 8 + 0 = 8.$$

Оформим решение в виде табл. 1.1.

Таблица 1.1

Решение для первого шага

S/J	9	$f_1(S)$	$J_1(S)$
7	9 + 0	9	9
8	8 + 0	8	9

В первом столбце таблицы расположены возможные значения состояния системы S на шаге n. В первой строке – возможные значения шагового управления J. В каждой клетке – сумма $C_{SJ} + f_{n+1}(S)$ для соответствующих значений S и J на данном шаге. Значения $f_{n-1}(S)$ для последующих шагов при $n > 1$ берутся из предыдущей таблицы. Для $n = 1$ $f_0(S) = 0$. В предпоследнем столбце вычисляются минимальные затраты по перевозке груза из города S, если до конца маршрута осталось n шагов – $f_n(S)$ (наименьшее значение из сумм в строке). В последнем столбце фиксируется номер города $J_n(S)$, через который следует ехать, чтобы достичь минимальных затрат $f_n(S)$.

Рекуррентное уравнение для $n = 2$ будет иметь вид $f_2(S)=\min\left[C_{SJ} - f_1(S)\right]$. Результат оформим в виде табл. 1.2.

Таблица 1.2

Решение для второго шага

S/J	7	8	$f_2(S)$	$J_2(S)$
4	8 + 9	–	17	7
5	6 + 9	5 + 8	13	8
6	–	5 + 8	13	8

Рекуррентное соотношение для $n = 3$ имеет вид $f_3(S) = \min\left[C_{SJ} + f_2(S)\right]$. Вычисления для третьего шага оформим в виде табл. 1.3.

Таблица 1.3

Решение для третьего шага

S/J	4	5	6	$f_3(S)$	$J_3(S)$
2	17 + 7	–	15 + 13	24	4
3	–	6 + 13	8 + 13	19	5

Для последнего шага, $n = 4$, вычисления оформим в виде табл. 1.4.

Таблица 1.4

Решение для четвертого шага

S/J	2	3	$f_4(S)$	$J_4(S)$
1	10 + 24	11 + 19	30	3

Второй этап – безусловная оптимизация.

В табл. 1.4 $f_4(S) = W^* = 30$ – искомые минимальные затраты по перевозке груза из города *А* в конечный город *В*. Для того чтобы получить эти затраты, груз из города $S = 1$ должен быть доставлен в город $J_4(S) = 3$.

Находим новое состояние системы на втором шаге $(n = 3)$:

$$S = J_4(S) = 3.$$

По новому состоянию $S = 3$ из табл. 1.3 определяем $J_3(S) = 5$ – город, в который нужно ехать из города 3, чтобы получить минимальные затраты $W^* = 30$. Состояние системы на третьем шаге $S = J_3(S) = 5(n = 2)$.

Находим (для $S = 5$) номер города, в который нужно ехать из города $S = 5$, это $J_2(S) = 8$ из табл. 1.2. Состояние системы на четвертом шаге $S = J_2(S) = 8 (n = 1)$. В табл. 1.1 этому состоянию соответствует город $J_1(S) = 9$. Двигаясь от последней таблицы к первой, определяем оптимальный маршрут $M = (1 - 3 - 5 - 8 - 9)$, затраты на перевозку груза по которому составляют $f_4(1) = 11 + 6 + 5 + 8 = 30$.

Задача для самостоятельного решения

Найти маршрут, связывающий города A (1) и B (10), для которого суммарные затраты на перевозку груза были бы наименьшими (рис. 1.2).

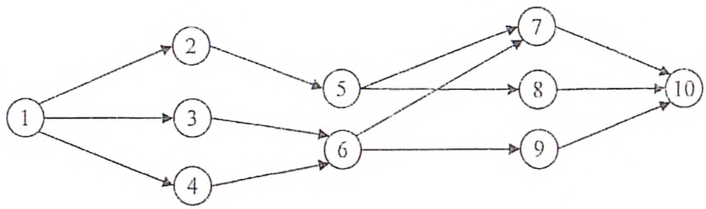

Рис. 1.2

Стоимость перевозки груза по всем направлениям приводится ниже для каждого варианта (в скобках указывается буква, в соответствии с которой выбирается вариант).

Варианты задания

Вариант 1 (А)

направления		затраты
1	2	9
1	3	10
1	4	14
2	5	8
3	6	7
4	6	7
5	7	6
5	8	5
6	7	14
6	9	9
7	10	12
8	10	10
9	10	7

Вариант 2 (Б)

направления		затраты
1	2	8
1	3	11
1	4	13
2	5	7
3	6	6
4	6	8
5	7	7
5	8	14
6	7	13
6	9	8
7	10	11
8	10	11
9	10	6

Вариант 3 (В)

направления		затраты
1	2	7
1	3	12
1	4	12
2	5	6
3	6	5
4	6	9
5	7	8
5	8	13
6	7	12
6	9	7
7	10	10
8	10	12
9	10	5

Вариант 4 (Г)

направления		затраты
1	2	6
1	3	13
1	4	11
2	5	5
3	6	14
4	6	10
5	7	9
5	8	12
6	7	11
6	9	6
7	10	9
8	10	13
9	10	14

Вариант 5 (Д)

направления		затраты
1	2	5
1	3	14
1	4	10
2	5	14
3	6	13
4	6	11
5	7	10
5	8	11
6	7	10
6	9	5
7	10	8
8	10	14
9	10	13

Вариант 6 (Е, Ё)

направления		затраты
1	2	14
1	3	15
1	4	9
2	5	13
3	6	12
4	6	12
5	7	11
5	8	10
6	7	9
6	9	14
7	10	7
8	10	15
9	10	12

Вариант 7 (Ж)

направления		затраты
1	2	13
1	3	16
1	4	8
2	5	12
3	6	11
4	6	13
5	7	12
5	8	11
6	7	8
6	9	13
7	10	6
8	10	16
9	10	11

Вариант 8 (З)

направления		затраты
1	2	12
1	3	17
1	4	7
2	5	11
3	6	10
4	6	14
5	7	13
5	8	12
6	7	7
6	9	12
7	10	5
8	10	17
9	10	10

Вариант 9 (**И**)

направления		затраты
1	2	11
1	3	18
1	4	6
2	5	10
3	6	11
4	6	15
5	7	14
5	8	13
6	7	6
6	9	11
7	10	14
8	10	18
9	10	11

Вариант 10 (**К**)

направления		затраты
1	2	10
1	3	19
1	4	5
2	5	11
3	6	12
4	6	16
5	7	15
5	8	14
6	7	5
6	9	10
7	10	13
8	10	19
9	10	12

Вариант 11 (**Л**)

направления		затраты
1	2	11
1	3	20
1	4	14
2	5	12
3	6	13
4	6	17
5	7	16
5	8	5
6	7	14
6	9	11
7	10	12
8	10	20
9	10	13

Вариант 12 (**М**)

направления		затраты
1	2	12
1	3	21
1	4	13
2	5	13
3	6	14
4	6	13
5	7	17
5	8	6
6	7	13
6	9	12
7	10	11
8	10	21
9	10	14

Вариант 13 (**Н**)

направления		затраты
1	2	13
1	3	22
1	4	12
2	5	14
3	6	5
4	6	19
5	7	18
5	8	7
6	7	12
6	9	13
7	10	10
8	10	22
9	10	5

Вариант 14 (**О**)

направления		затраты
1	2	14
1	3	23
1	4	11
2	5	5
3	6	6
4	6	20
5	7	19
5	8	8
6	7	11
6	9	14
7	10	11
8	10	23
9	10	6

Вариант 15 (**П**)

направления		затраты
1	2	5
1	3	24
1	4	10
2	5	6
3	6	7
4	6	21
5	7	20
5	8	9
6	7	10
6	9	5
7	10	12
8	10	24
9	10	7

Вариант 16 (**Р**)

направления		затраты
1	2	6
1	3	25
1	4	11
2	5	7
3	6	8
4	6	22
5	7	21
5	8	10
6	7	11
6	9	8
7	10	13
8	10	25
9	10	8

Вариант 17 (**С**)

направления		затраты
1	2	7
1	3	26
1	4	12
2	5	8
3	6	9
4	6	23
5	7	22
5	8	11
6	7	12
6	9	7
7	10	14
8	10	26
9	10	9

Вариант 18 (**Т**)

направления		затраты
1	2	8
1	3	27
1	4	13
2	5	9
3	6	10
4	6	24
5	7	23
5	8	12
6	7	13
6	9	8
7	10	5
8	10	27
9	10	10

Вариант 19 (**У**)

направления		затраты
1	2	9
1	3	28
1	4	14
2	5	10
3	6	11
4	6	25
5	7	24
5	8	13
6	7	14
6	9	9
7	10	8
8	10	28
9	10	11

Вариант 20 (**Ф**)

направления		затраты
1	2	10
1	3	29
1	4	5
2	5	11
3	6	12
4	6	28
5	7	25
5	8	14
6	7	5
6	9	10
7	10	7
8	10	29
9	10	12

Вариант 21 (Х)

направления		затраты
1	2	11
1	3	30
1	4	6
2	5	12
3	6	13
4	6	27
5	7	26
5	8	15
6	7	6
6	9	11
7	10	8
8	10	30
9	10	13

Вариант 22 (Ц)

направления		затраты
1	2	12
1	3	31
1	4	7
2	5	13
3	6	14
4	6	28
5	7	27
5	8	16
6	7	7
6	9	12
7	10	9
8	10	31
9	10	14

Вариант 23 (Ч)

направления		затраты
1	2	13
1	3	32
1	4	8
2	5	14
3	6	15
4	6	29
5	7	28
5	8	17
6	7	8
6	9	13
7	10	10
8	10	32
9	10	15

Вариант 24 (Ш, Щ)

направления		затраты
1	2	14
1	3	33
1	4	9
2	5	15
3	6	16
4	6	30
5	7	29
5	8	18
6	7	9
6	9	14
7	10	11
8	10	33
9	10	16

Вариант 25 (Э, Ю)

направления		затраты
1	2	15
1	3	34
1	4	10
2	5	16
3	6	17
4	6	31
5	7	30
5	8	19
6	7	10
6	9	15
7	10	12
8	10	34
9	10	17

Вариант 26 (Я)

направления		затраты
1	2	16
1	3	35
1	4	11
2	5	17
3	6	18
4	6	32
5	7	31
5	8	20
6	7	11
6	9	16
7	10	13
8	10	35
9	10	18

2. ПЛАНИРОВАНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ПРОГРАММЫ

Пример задачи

Предприятие изготовляет машины X_t, спрос на которые в каждом из месяцев равен $D_t\left(t=\overline{1,T}\right)$ единиц. Запас машин на складе предприятия на начало планируемого периода i_0 единиц. Общие затраты $C\left(X_t,i_t\right)$ состоят из затрат $C\left(X_t\right)$ на производство машин и затрат h_i на их содержание до отправки потребителю, т. е.

$$C\left(X_t,i_t\right)=C\left(X_t\right)+hi_t, \tag{2.1}$$

где h – затраты на хранение единицы продукции. Затраты $C\left(X_t\right)$ складываются из условно-постоянных K и пропорциональных LX (L денежных единиц на каждую единицу продукции) т. е.

$$C\left(X_t\right)=K+LX_t. \tag{2.2}$$

Складские площади предприятия ограничены, и хранить можно не более M единиц продукции. Производственные мощности также ограничены, и в каждом месяце можно изготовлять не более B единиц продукции.

Требуется определить производственную программу изготовления машин X_t, удовлетворяющую спрос в каждом из месяцев планируемого периода $D_t\left(t=\overline{1,T}\right)$ и обеспечивающую минимальные затраты на производство продукции и содержание запасов. Запас продукции на складе в конце планируемого периода должен быть равен 0.

Алгоритм решения

Данную задачу будем решать методом динамического программирования.

Составим основное рекуррентное уравнение для данной задачи.

1. Планируемый период T разбиваем на шаги по месяцам. Обозначим через n $D_t\left(n=\overline{1,T}\right)$ номер планового отрезка времени (соответствует обратной нумерации месяцев, так как планирование выполняется с конца периода T).

2. Состояние системы перед каждым шагом будет характеризоваться параметром i – уровнем запасов на начало отрезка n (шага).

3. Параметром шагового управления задачи будет переменная x_n – количество производимой продукции на отрезке n.

4. Выигрыш (эффект) на каждом шаге n определяется общими затратами $C\left(X_n,J_n\right)$, связанными с выпуском x_n единиц продукции на n отрезке и с содержанием запасов на конец n-го отрезка J_n.

5. Состояние, в которое переходит система под влиянием управления x_n на шаге n:

$$J_n = i_n + x_n - d_n = i_{n-1},$$

где d_n – спрос на продукцию на n-м отрезке:

$$\left(d_1 = D_T, d_2 = D_{T-1}, \ldots, d_n = D_i\right).$$

Обозначим через $f_n(i)$ условно-оптимальный накопленный эффект за n шагов, т. е. минимальные затраты на производство и хранение продукции за n последних месяцев при условии, что уровень запасов на начало n-го месяца равен i единиц; $X_n(i)$ – производство продукции на n-м отрезке, если уровень запасов на начало отрезка равен i (объем выпуска).

6. Основное рекуррентное уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} f_n(i) &= \min\left[C\left(X_n, J_n\right) + f_{n-1}\left(J_n\right)\right] = \\ &= \min\left[C(X) + h\left(i + x - d_n\right) + f_{n-1}\left(i + x - d_n\right)\right]. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Параметры i и x удовлетворяют следующим ограничениям:

$$x \geq d_n - i, \tag{2.4}$$

так как спрос на данном отрезке должен быть удовлетворен;

$$x \leq \min\left(\sum_{k=1}^{n} d_k - i, B\right), \tag{2.5}$$

так как запас на конец планового периода равен 0 и производство продукции на любом отрезке не превышает B;

$$i = \min\left(\sum_{k=1}^{n} d_k, M\right), \tag{2.6}$$

так как уровень запасов не должен превышать ограничений на складские площади предприятия.

Решение задачи

Исходные данные: $T = 3$, $D_1 = 4$, $D_2 = 3$, $D_3 = 3$, $h = 2$, $B = 6$, $M = 4$, $i = 1$, $K = 10$, $L = 2$.

Условная оптимизация. Планируемый период разбиваем на три отрезка, так как $T = 3$. Вычисления удобно оформлять в виде таблиц, в первом столбце таблицы записываются возможные значения переменной i (состояние системы – уровень запаса), удовлетворяющие ограничению (2.6).

В первой строке – возможные значения объема выпуска X, удовлетворяющие ограничениям (2.4), (2.5). Каждая клетка таблицы заполняется значениями трех слагаемых:

$$C(X)+h(i+x-d_n)+f_{n-1}(i+x-d_n). \qquad (2.7)$$

Если сочетания i и x недопустимы, то в соответствующей клетке ставится «–».

Для последующих шагов при $n>1$ значение $f_{n-1}(i)$ выписывается из предыдущей таблицы. Для $n=1$ $f_0(i)=0$.

В столбце $X_n(i)$ фиксируется соответствующий оптимальный выпуск продукции.

Вычислим затраты на производство машин $C(X)$ по формуле (2.2) (табл. 2.1).

Таблица 2.1

Затраты на производство машин

C(0)	C(1)	C(2)	C(3)	C(4)	C(5)	C(6)
0	12	14	16	18	20	22

Отметим, что, как правило, задачи динамического программирования на этапе условной оптимизации решаются от конца к началу. Например, если весь плановый период в четверть года разбивается на отрезки по месяцам, то в решении первым отрезком (n = 1) из трех (T = 3) является месяц март (конец планового периода, самый последний по времени месяц), вторым (n = 2) – февраль, и последним, третьим (n = 3), соответственно, январь (начало планового периода, самый первый по времени месяц).

Для $n=1$ (март) значение i не превышает $\min(d_1=4, M=4)$, т. е. i = 0, 1, 2, 3, 4; $4-i \le x \le \min(4-i, B)$, $X=0,1,2,3,4$.

Так как $f_0(0)=0$ (нулевым месяцем здесь является апрель, который мы не рассматриваем, накопленный эффект равен нулю) и запас на складе в конце планируемого периода по условию равен 0, то из трех слагаемых в выражении (2.7) остается $C(X)$, которое выписывается из табл. 2.1 для каждого X (табл. 2.2).

Таблица 2.2

Оптимизация затрат за март

i	X						
	0	1	2	3	4	$X_1(i)$	$f_1(i)$
0	–	–	–	–	18 + 0 + 0	4	18
1	–	–	–	16 + 0 + 0	–	3	16
2	–	–	14 + 0 + 0	–	–	2	14
3	–	12 + 0 + 0				1	12
4	0 + 0 + 0					0	0

Для $n = 2$(февраль) i – уровень запасов на начало второго отрезка – не превышает $\min(d_1 + d_2 = 7, M = 4)$, т. е. $i = 0, 1, 2, 3, 4$.

Значения $X_2(i)$ должны быть не меньше, чем $(d_2 - i)$ (спрос на данном отрезке должен быть удовлетворен), так как запас на конец планового периода равен 0 и производство продукции в любом отрезке не превышает B.

Минимальные суммарные затраты на производство и хранение продукции за два последних месяца определяются по формуле

$$f_2(i) = \min\left[C(X) + h(i + x - d_2) + f_1(i + x - d_2)\right].$$

Все возможные значения сумм трех слагаемых приведены в табл. 2.3:

1. $C(X) = K + LX$ – значения затрат на производство машин (выбираются из табл. 2.1).

2. $h(i + x - d_2)$ – затраты на содержание запасов на конец данного периода ($n = 2$(февраль)), равные уровню запасов на конец отрезка $(i + x - d_2)$, умноженному на затраты на хранение единицы продукции ($h = 2$).

3. $f_1(i + x - d_2)$ – это накопленный эффект на предыдущих отрезках, т. е. минимальные затраты на производство и хранение продукции за март месяц ($n = 1$) при условии, что уровень запасов на конец февраля составляет $(i + x - d_2)$. Отметим, что уровень запасов на конец февраля $(i + x - d_2)$ – это есть уровень запасов на начало марта (i), таким образом значения функции $f_1(i + x - d_2)$ выбираются из табл. 2.2; $(i + x - d_2)$ в феврале равно i в таблице за март.

Таблица 2.3

Оптимизация затрат за февраль и март

i	X								
	0	1	2	3	4	5	6	$X_2(i)$	$f_2(i)$
0	–	–	–	16 + 0 + 18	18 + 2 + 16	20 + 4 + 14	22 + 6 + 12	3	34
1	–	–	14 + 0 + 18	16 + 2 + 16	18 + 4 + 14	20 + 6 + 12	22 + 8 + 0	6	30
2	–	12 + 0 + 18	14 + 2 + 16	16 + 4 + 14	18 + 6 + 12	20 + 8 + 0	–	5	28
3	0 + 0 + 18	12 + 2 + 16	14 + 4 + 14	16 + 6 + 12	18 + 8 + 0	–	–	0	18
4	0 + 2 + 16	12 + 4 + 14	14 + 6 + 12	16 + 8 + 0	–	–	–	0	18

При $n = 3$ (январь) рекуррентное соотношение имеет вид $f_3(i) = \min[C(X) + h(i + x - d_3) + f_2(i + x - d_3)]$, $i = i_0 = 1$ по условию задачи. Ограничения для параметра $x - 3 - i_0 \le x \le \min(10 - i_0, B)$.

Вычисления приводятся в табл. 2.4.

При вычислении $f_3(i)$ использовалось $f_2(i + x - d_3)$ (табл. 2.3).

Минимальные затраты, связанные с производством и хранением продукции за три месяца, равны 44.

Таблица 2.4

Оптимизация затрат за январь, февраль и март

i	X								
	0	1	2	3	4	5	6	$X_3(i)$	$f_3(i)$
1	–	–	14 + 0 + 34	16 + 2 + 30	18 + 4 + 28	20 + 6 + 18	22 + 8 + 18	5	44

Безусловное оптимальное управление. Из табл. 2.4 выбираем оптимальное решение $X_3 = 5$. В столбце, соответствующем $X_3 = 5$, записана сумма 20 + 6 + 18, здесь $ih = 6$, следовательно $i = 3$.

Параметру $i = 3$ в табл. 2.3 соответствует оптимальное решение $x_2 = 0$. В столбце $x_2 = 0$ записана сумма 0 + 0 + 18. Второе слагаемое $ih = 0$, т. е. $i = 0$.

Параметру $i = 0$ в табл. 2.2 соответствует решение $X_1 = 4$.

Таким образом, получаем следующее оптимальное решение:

$$X_3 = 5,\ \ X_2 = 0,\ \ X_1 = 4.$$

Полученный результат интерпретируется следующим образом: для того чтобы суммарные затраты за три месяца были минимальными (44), в январе предприятию необходимо произвести 5 машин, в феврале – 0 (не производить вообще), в марте – 4 машины.

Задача для самостоятельного решения

Условие задания совпадает с условием рассмотренной задачи. Значения параметров приведены в табл. 2.5 для каждого варианта ($T = 4$).

Варианты заданий

Варианты	$D1$	$D2$	$D3$	$D4$	L	H	B	M	K
Вариант 1 **(А)**	4	3	3	1	2	1	6	4	7
Вариант 2 **(Б)**	4	4	3	3	1	1	5	4	6
Вариант 3 **(В)**	4	3	4	3	1	1	6	4	8
Вариант 4 **(Г)**	4	4	2	2	2	2	6	4	8
Вариант 5 **(Д)**	4	3	3	4	2	2	5	4	9
Вариант 6 **(Е, Ё)**	4	3	4	1	2	1	6	4	6
Вариант 7 **(Ж)**	4	4	3	1	2	1	6	4	7
Вариант 8 **(З)**	4	4	2	1	2	1	5	4	9
Вариант 9 **(И)**	4	4	4	2	2	2	6	4	8
Вариант 10 **(К)**	4	4	3	4	2	2	6	4	6
Вариант 11 **(Л)**	4	3	2	1	2	1	6	4	8

Окончание таблицы

Варианты	$D1$	$D2$	$D3$	$D4$	L	H	B	M	K
Вариант 12 (**М**)	4	4	4	2	2	2	6	4	10
Вариант 13 (**Н**)	4	3	2	2	2	1	4	4	9
Вариант 14 (**О**)	4	4	3	3	1	1	5	4	9
Вариант 15 (**П**)	4	3	3	2	1	2	6	4	7
Вариант 16 (**Р**)	4	4	4	4	1	1	5	4	8
Вариант 17 (**С**)	4	3	4	1	2	1	4	4	7
Вариант 18 (**Т**)	4	3	2	1	1	2	5	4	10
Вариант 19 (**У**)	4	3	4	1	2	1	5	4	8
Вариант 20 (**Ф**)	4	4	2	4	2	1	6	4	6
Вариант 21 (**Х**)	4	3	2	4	2	1	4	4	8
Вариант 22 (**Ц**)	4	3	3	4	1	2	5	4	8
Вариант 23 (**Ч**)	4	3	4	3	1	1	6	4	7
Вариант 24 (**Ш, Щ**)	4	4	2	4	1	2	5	4	11
Вариант 25 (**Э, Ю**)	4	4	2	1	2	1	6	4	6
Вариант 26 (**Я**)	4	4	3	3	2	2	4	4	9

3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СРЕДСТВ НА РАСШИРЕНИЕ ПРОИЗВОДСТВА

Пример задачи

Пусть группе предприятий выделяют дополнительные средства на реконструкцию и модернизацию производства. По каждому из n предприятий известен возможный прирост $g_i(x)$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$ выпуска продукции в зависимости от выделенной ему суммы X. Требуется так распределить между предприятиями средства C, чтобы общий прирост $f_n(C)$ выпуска продукции был максимальным.

Алгоритм решения

Составим основное рекуррентное уравнение задачи.

1. Задача разбивается на шаги искусственным образом. В качестве n-го шага принимается вложение средств в n предприятий.

2. Параметр, характеризующий состояние системы перед каждым шагом, – запас невложенных средств C.

3. Параметры «шагового управления» данной задачи – средства $x_1, x_2, ..., x_n$, выделяемые предприятиям.

4. Выигрыш на шаге n определяется приростом выпуска продукции $g_n(x)$ n-го предприятия в зависимости от вложенных в него средств x (шагового управления).

5. Под действием шагового управления x система переходит в новое состояние $C_n = C_{n-1} + x_n$, где C_n – запас невложенных средств на шаге n, которые можно вложить в n предприятий; x_n – те средства из C_n, которые вложили на данном шаге в n-е предприятие; C_{n-1} – соответственно, оставшиеся невложенные средства на предыдущем шаге $(n-1)$ для распределения по оставшимся $(n-1)$ предприятиям.

Обозначим через $f_n(C)$ максимальное значение прироста продукции при распределении суммы C между n предприятиями.

6. Рекуррентное соотношение для этой задачи имеет вид

$$f_n(C) = \max[g_n(x) + f_{n-1}(C - X)], \tag{3.1}$$

где $f_{n-1}(C-X)$ – максимальное значение прироста продукции на предыдущем шаге $(n-1)$, при распределении суммы $C_{n-1} = C_n - x_n$ между $(n-1)$ предприятиями, $0 \le x \le C$.

Решение задачи

Пусть имеются четыре предприятия, между которыми необходимо распределить 100 тыс. у. е. Значения $g_i(x)$ прироста выпуска продукции на предприятиях в зависимости от выделенной суммы X указаны в табл. 3.1.

Задание

Составить план распределения средств, максимизирующий общий прирост выпуска продукции.

Таблица 3.1

Прирост выпуска каждого предприятия в зависимости от выделенной ему суммы

Средства X, тыс. у. е.	1	2	3	4
	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	$g_4(x)$
20	8	10	9	14
40	20	24	23	28
60	36	33	34	34
80	45	46	48	47
100	59	59	62	60

Условная оптимизация. Результаты вычислений будем оформлять в виде таблиц. В первом столбце – возможные значения состояния системы C (наличный запас еще невложенных средств). В первой строке шаговое управление X – средства, выделяемые предприятиям. Для упрощения вычислений значения X и C будем принимать кратными 20 тыс. у. е. В каждой клетке таблицы записывается значение сумм $g_n(x)+f_{n-1}(C-X)$ для соответствующих X и $C-X$. Значения $g_n(x)$ выбираются из табл. 3.1, значения $f_{n-1}(C-X)$ для последующих шагов при $n>1$ берутся из предыдущей таблицы, для $n=1$ $f_0(C-X)=0$. В двух последних столбцах записываются максимальный по строке прирост продукции $f_n(C)$ и оптимальная сумма средств $X_n(C)$, выделенная n-му предприятию.

Заполнять таблицу наиболее удобно по столбцам. Незаполненные клетки соответствуют недопустимым сочетаниям C и X, $n=1$ (все средства выделяются на реконструкцию и модернизацию одного предприятия) (табл. 3.2).

В соответствии с формулой (3.1) $f_1(C)$ – максимально возможный прирост выпуска продукции – при выделении средств только первому предприятию определяется выражением

$$f_1(C)=\max[g_1(x)+f_0(C-X)]=\max g_1(x). \tag{3.2}$$

Если $n=2$, т. е. средства вкладываются в два предприятия, то

$$f_2(C)=\max[g_2(x)+f_1(C-X)]. \tag{3.3}$$

Таблица 3.2

Прирост выпуска продукции при распределении средств по одному предприятию ($n = 1$)

C	X							
	0	20	40	60	80	100	$f_1(C)$	$X_1(C)$
20	–	8 + 0	–	–	–	–	8	20
40	–	–	20 + 0	–	–	–	20	40
60	–	–	–	36 + 0	–	–	36	60
80	–	–	–	–	45 + 0	–	45	80
100	–	–	–	–	–	59 + 0	59	100

Основная задача заключается в том, чтобы найти значения функции $f_2(C)$ по формуле (3.3) для всех допустимых комбинаций C и X. Значения $g_2(x)$ выбираются из табл. 3.1, $f_1(C-X)$ – из табл. 3.2. Например, в клетке на пересечении строки $C=80$, $X=20$ (средства, выделенные второму пред-приятию) $C=80-20=60$ (средства, выделяемые первому предприятию) записывается сумма $10+36$, так как $g_2(20)=10$, $f_1(60)=36$. Результаты оформим в виде табл. 3.3.

Таблица 3.3

Прирост выпуска продукции при распределении средств по двум предприятиям ($n = 2$)

C	X							
	0	20	40	60	80	100	$F_2(C)$	$X_2(C)$
20	0 + 8	10 + 0	–	–	–	–	10	20
40	0 + 20	10 + 8	24 + 0	–	–	–	24	40
60	0 + 36	10 + 20	24 + 8	33 + 0	–	–	36	0
80	0 + 45	10 + 36	24 + 20	33 + 8	46 + 0	–	46	20, 80
100	0 + 59	10 + 45	24 + 36	33 + 20	46 + 8	59 + 0	60	40

Если $n=3$, то $f_3(C)=\max[g_3(x)+f_2(C-X)]$. Расчет значений $f_3(C)$ представлен в табл. 3.4.

Первое слагаемое выбирается из табл. 3.1, второе – из табл. 3.3.

Аналогичный образом находятся значения $f_4(C)$ (табл. 3.5).

Таблица 3.4

Прирост выпуска продукции при распределении средств по трем предприятиям ($n = 3$)

C	X							
	0	20	40	60	80	100	$F_3(C)$	$X_3(C)$
20	0 + 10	9 + 0	–	–	–	–	10	0
40	0 + 24	9 + 10	23 + 0	–	–	–	24	0
60	0 + 36	9 + 24	23 + 10	34 + 0	–	–	36	0
80	0 + 46	9 + 36	23 + 24	34 + 10	48 + 0	–	48	80
100	0 + 60	9 + 46	23 + 36	34 + 24	48 + 10	62 + 0	62	100

Таблица 3.5

Прирост выпуска продукции при распределении средств по четырем предприятиям ($n = 4$)

C	X							
	0	20	40	60	80	100	$f_4(C)$	$X_4(C)$
20	0 + 10	14 + 0	–	–	–	–	14	20
40	0 + 24	14 + 10	28 + 0	–	–	–	28	40
60	0 + 36	14 + 24	28 + 10	34 + 0	–	–	38	20, 40
80	0 + 48	14 + 36	28 + 24	34 + 10	47 + 0	–	52	40
100	0 + 62	14 + 48	28 + 36	34 + 24	47 + 10	60 + 0	64	40

Безусловная оптимизация. В табл. 3.5 $f_4(C) = 64$ – максимальный прирост продукции. Такой прирост можно получить, если в четвертое предприятие вложить $x_4(C) = 40$ тыс. у. е. (оптимальное управление на 4 шаге). Новое состояние системы C (наличный запас еще невложенных средств) $C' = 100 - 40 = 60$. Значению $C = 60$ соответствует оптимальное значение $x_3(C) = 0$ (табл. 3.4) – средства, вкладываемые в третье предприятие. Очередное состояние системы – $C' = 60 - 0 = 60$. Значению $C = 60$ соответствует оптимальное значение $x_2(C) = 0$ (табл. 3.3). Состояние системы при этом принимает значение $C' = 60 - 0 = 60$.

Итак, максимальный прирост выпуска продукции на четырех предприятиях при распределении между ними 100 тыс. у. е. составляет 64 и будет получен, если первому предприятию выделить 60 тыс. у. е., второму – 0 тыс. у. е., третьему – 0 тыс. у. е., четвертому – 40 тыс. у. е., т. е. $X = (60, 0, 0, 40)$.

Задача для самостоятельного решения

Задание. Составить план распределения средств $C = 100$ тыс. у. е. между четырьмя предприятиями, который максимизирует общий прирост выпуска продукции. Значения $g_i(x)$ прироста выпуска продукции на предприятиях $\left(i = \overline{1,4}\right)$ в зависимости от выделенной суммы X приводятся по каждому варианту задания.

Варианты задания

Вариант 1 **(А)**

C	$g(1)$	$g(2)$	$g(3)$	$g(4)$
20	10	14	14	19
40	34	27	37	38
60	42	40	48	48
80	66	55	64	67
100	78	80	79	83

Вариант 2 **(Б)**

C	$g(1)$	$g(2)$	$g(3)$	$g(4)$
20	15	17	14	17
40	31	31	39	39
60	43	42	48	50
80	67	59	60	66
100	77	81	78	82

Вариант 3 **(В)**

C	$g(1)$	$g(2)$	$g(3)$	$g(4)$
20	16	24	12	23
40	42	29	46	46
60	53	38	48	49
80	70	54	60	71
100	83	86	88	81

Вариант 4 **(Г)**

C	$g(1)$	$g(2)$	$g(3)$	$g(4)$
20	16	17	12	22
40	39	26	39	38
60	49	48	47	50
80	65	55	70	70
100	91	86	84	90

Вариант 5 **(Д)**

C	$g(1)$	$g(2)$	$g(3)$	$g(4)$
20	16	14	15	32
40	49	32	36	53
60	51	52	47	66
80	72	64	72	79
100	61	79	80	84

Вариант 6 **(Е, Ё)**

C	$g(1)$	$g(2)$	$g(3)$	$g(4)$
20	12	26	31	32
40	49	30	45	45
60	45	59	60	56
80	85	58	83	85
100	86	89	91	95

Вариант 7 **(Ж)**

C	$g(1)$	$g(2)$	$g(3)$	$g(4)$
20	29	28	20	21
40	33	45	48	45
60	47	56	56	59
80	81	70	61	72
100	79	88	82	86

Вариант 8 **(З)**

C	$g(1)$	$g(2)$	$g(3)$	$g(4)$
20	25	44	15	34
40	61	33	64	61
60	72	41	54	55
80	83	55	61	86
100	95	99	106	82

Вариант 9 (**И**)

C	$g(1)$	$g(2)$	$g(3)$	$g(4)$
20	24	24	14	29
40	49	27	42	39
60	59	64	48	55
80	68	55	83	78
100	109	97	93	103

Вариант 10 (**К**)

C	$g(1)$	$g(2)$	$g(3)$	$g(4)$
20	22	17	18	48
40	67	39	36	68
60	61	68	49	85
80	81	75	85	96
100	85	79	84	88

Вариант 11 (**Л**)

C	$g(1)$	$g(2)$	$g(3)$	$g(4)$
20	14	37	48	45
40	64	33	52	51
60	47	77	73	64
80	104	61	102	103
100	94	98	103	108

Вариант 12 (**М**)

C	$g(1)$	$g(2)$	$g(3)$	$g(4)$
20	42	40	26	24
40	34	58	57	51
60	51	70	64	68
80	94	82	62	79
100	80	95	86	90

Вариант 13 (**Н**)

C	$g(1)$	$g(2)$	$g(3)$	$g(4)$
20	34	63	17	46
40	79	38	81	76
60	91	44	59	61
80	97	55	61	100
100	107	112	125	84

Вариант 14 (**О**)

C	$g(1)$	$g(2)$	$g(3)$	$g(4)$
20	32	31	15	36
40	60	28	45	40
60	68	79	50	59
80	71	56	96	86
100	127	107	102	116

Вариант 15 (**П**)

C	$g(1)$	$g(2)$	$g(3)$	$g(4)$
20	32	31	15	36
40	60	26	45	40
60	68	79	50	59
80	71	56	96	86
100	127	107	102	116

Вариант 16 (**Р**)

C	$g(1)$	$g(2)$	$g(3)$	$g(4)$
20	28	19	22	64
40	84	45	36	84
60	70	85	51	105
80	91	85	97	112
100	90	80	87	91

Вариант 17 (**С**)

C	$g(1)$	$g(2)$	$g(3)$	$g(4)$
20	16	48	65	58
40	79	38	59	57
60	49	96	85	73
80	124	64	120	122
100	103	107	115	120

Вариант 18 (**Т**)

C	$g(1)$	$g(2)$	$g(3)$	$g(4)$
20	56	52	33	27
40	35	72	65	56
60	54	84	72	77
80	108	93	63	85
100	82	103	89	94

Вариант 19 (**У**)

C	$g(1)$	$g(2)$	$g(3)$	$g(4)$
20	43	83	19	57
40	98	42	98	91
60	109	47	64	66
80	110	56	62	114
100	119	124	143	86

Вариант 20 (**Ф**)

C	$g(1)$	$g(2)$	$g(3)$	$g(4)$
20	40	38	17	43
40	70	28	48	41
60	77	94	52	64
80	74	57	109	94
100	146	117	111	129

Вариант 21 (**Х**)

C	$g(1)$	$g(2)$	$g(3)$	$g(4)$
20	34	22	25	79
40	102	51	37	99
60	79	101	54	124
80	100	96	109	128
100	94	81	90	95

Вариант 22 (**Ц**)

C	$g(1)$	$g(2)$	$g(3)$	$g(4)$
20	18	59	81	72
40	94	39	66	64
60	52	115	98	81
80	143	67	139	140
100	111	116	126	133

Вариант 23 (**Ч**)

C	$g(1)$	$g(2)$	$g(3)$	$g(4)$
20	69	63	39	31
40	36	85	74	62
60	58	99	79	86
80	122	105	63	92
100	84	109	93	98

Вариант 24 (**Ш, Щ**)

C	$g(1)$	$g(2)$	$g(3)$	$g(4)$
20	53	103	21	69
40	116	47	115	106
60	128	50	69	72
80	123	56	62	128
100	131	137	161	87

Вариант 25 (**Э, Ю**)

C	$g(1)$	$g(2)$	$g(3)$	$g(4)$
20	20	71	98	85
40	109	42	74	70
60	54	134	111	89
80	162	70	158	158
100	120	125	138	145

Вариант 26 (**Я**)

C	$g(1)$	$g(2)$	$g(3)$	$g(4)$
20	83	75	45	34
40	37	98	82	68
60	62	113	87	95
80	135	116	64	99
100	86	116	97	102

4. ПРОИЗВОДСТВО И ЗАТРАТЫ

Для решения задач по данной теме необходимо знать следующие формулы:

$FC = TC$ при $Q = 0$, где FC – постоянные затраты; TC – общие затраты; Q – общий выпуск в единицу времени.

$VC = TC - FC$, где VC – переменные затраты.

$MC = VC_{i+1} - VC_i$, где MC – предельные затраты; VC_i, VC_{i+1} – переменные затраты при производстве, соответственно, i и $i+1$ единиц продукции.

$ATC = \frac{TC}{Q}$, где ATC – средние общие затраты.

$AFC = \frac{FC}{Q}$, где AFC – средние постоянные затраты.

$AVC = \frac{VC}{Q}$, где AVC – средние переменные затраты.

При построении изоквант следует ориентироваться на формулу производственной функции $Q = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, где Q – максимальный выпуск продукции, который можно получить при использовании 1-го ресурса в объеме x_1, 2-го ресурса в объеме x_2 и т. д.

Примеры задач

Задача 4.1

Заполнить пропуски в таблице (табл. 4.1).

Таблица 4.1

Экономические показатели по объему выпуска продукции в зависимости от объема используемых ресурсов

Объем применения переменного ресурса x_1	Общий выпуск продукции Q	Предельный продукт переменного ресурса MP_1	Средний продукт переменного ресурса AP_1
3	90	30	...
4	...		...
5	140	...	...
6	...	...	25

Решение задачи

При решении этой задачи следует помнить, что средний продукт переменного ресурса x определяется как $AP_1 = \frac{Q}{x_1}$, предельный продукт MP_1 переменного ресурса x_1 определяется как прирост общего выпуска в результате увеличения применения переменного ресурса на одну единицу.

При применении переменного ресурса в объеме 3 ед. выпуск продукции составляет 90 ед. Следовательно, средний продукт равен 90 : 3 = 30 ед.

При увеличении объема использования переменного ресурса с 3 до 4 ед. предельный продукт составляет 30 ед., следовательно, выпуск продукции при использовании 4 ед. переменного ресурса составляет: 90 + 30 = 120 ед.

Это позволяет определить средний продукт при использовании 4 ед. переменного ресурса: 120 : 4 = 30 ед. Теперь определяем предельный продукт при увеличении применения переменного ресурса с 4 до 5 ед.: 140 – 120 = 20 ед.

Средний продукт при использовании 5 ед. переменного ресурса равен 140 : 5 = 28 ед. Общий выпуск продукции при увеличении переменного ресурса равен 25 · 6 = 150 ед.

Предельный продукт при увеличении переменного ресурса с 5 до 6 ед. равен 150 – 140 = 10 ед.

Заполним таблицу (табл. 4.2).

Таблица 4.2

Результаты решения задачи

Объем применения переменного ресурса x_1	Общий выпуск продукции Q	Предельный продукт переменного ресурса MP_1	Средний продукт переменного ресурса AP_1
3	90		30
4	120	30	30
5	140	20	28
6	150	10	25

Задача 4.2

Процесс производства на некотором предприятии описывается производственной функцией $Q = 2x_1^{2/3} \cdot x_2^{1/3}$, где Q – объем производства; x_1 – размеры используемых трудовых ресурсов; x_2 – объем используемого оборудования. Найти алгебраическое выражение для изокванты при Q = 4. Нарисовать изокванту.

Ставка арендной платы за оборудование вдвое выше ставки оплаты труда. Предприятие использует две единицы оборудования и две единицы труда. Может ли предприятие, изменив комбинацию используемых ресурсов, уменьшить затраты, не уменьшая выпуск продукции?

Решение задачи

$Q = 2x_1^{2/3} \cdot x_2^{1/3}$ при $Q = 4$, отсюда $x_2^{1/3} = \dfrac{Q}{2x_1^{2/3}} = \dfrac{4}{2x_1^{2/3}} = \dfrac{2}{x_1^{2/3}}$, $x_2 = \dfrac{8}{x_1^2}$,

в этом случае изокванта примет вид линии AB (рис. 4.1).

Каждая точка изокванты соответствует комбинации ресурсов x_1 и x_2, при которой выпуск продукции равен 4 ед. Предприятие использует комбинацию ресурсов, соответствующую точке K. Через точку K проведем линию цен (изокосту). Поскольку ставка арендной платы за оборудование вдвое выше ставки оплаты труда, тангенс угла изокосты равен –0,5.

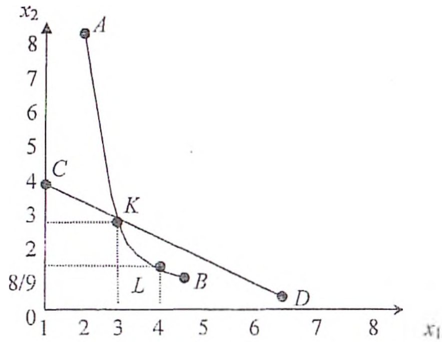

Рис. 4.1

Таким образом, изокоста занимает положение CD. Как видно из рисунка, в точке K изокванта и изокоста пересекаются. Следовательно, существует такая комбинация ресурсов (например, точка L с координатами $x_1 = 4$, $x_2 = 8/9$), которая обеспечивает тот же объем производства, что и комбинация K, но при которой денежные затраты меньше.

Задача 4.3

Зависимость общих затрат предприятия от выпуска продукции в показана табл. 4.3.

Таблица 4.3

Зависимость общих затрат от выпуска продукции

Выпуск в единицу времени Q, шт.	Общие затраты TC, руб.
0	60
1	140
2	180
3	240
4	420

Задание

Рассчитать постоянные затраты, переменные затраты, средние постоянные затраты, средние переменные затраты, средние общие затраты. Последние четыре величины изобразить графически.

Для решения этой задачи следует воспользоваться формулами, приведенными выше, а результаты решения внести в табл. 4.4. При этом надо учитывать, что при выпуске продукции, равном 0, общие затраты равны постоянным затратам ($TC = FC$), поскольку переменные затраты в этом случае отсутствуют.

Таблица 4.4

Результаты решения задачи

Выпуск Q	Затраты общие TC	Затраты постоянные FC	Затраты переменные VC	Затраты предельные MC	Средние общие затраты ATC	Средние постоянные затраты AFC	Средние переменные затраты AVC
0	60	60	0		–	–	–
1	140	60	80	80	140	60	80
2	180	60	120	40	90	30	60
3	240	60	180	60	80	20	60
4	420	60	360	180	105	15	90

При построении графика следует учесть, что предельные затраты являются приростными, и, следовательно, их следует отнести к середине интервала между двумя соседними значениями объема производства.

Решение задачи

Как отмечалось:

– $FC = TC$ при $Q = 0$, отсюда $FC = 60$;

– $VC = TC - FC$, отсюда VC при $Q = 1$ равны 140 – 60 = 80;

– $MC = VC_{i+1} - VC_i$, отсюда MC при увеличении выпуска от 0 до 1 равны 80 – 0 = 80 и т. д.;

– $ATC = \dfrac{TC}{Q}$, отсюда ATC при $Q = 1$ равны $\dfrac{140}{1} = 140$ и т. д.;

– $AFC = \dfrac{FC}{Q}$, отсюда AFC при $Q = 1$ равны $\dfrac{60}{1} = 60$ и т. д.;

– $AVC = \dfrac{VC}{Q}$, отсюда AVC при $Q = 1$ равны $\dfrac{80}{1} = 80$ и т. д.

Графическое изображение последних четырех величин (MC, ATC, AFC, AVC) будет иметь следующий вид (рис. 4.2).

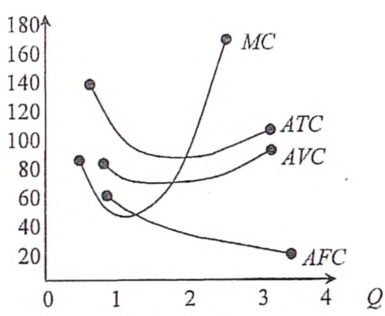

Рис. 4.2

Задачи для самостоятельного решения

Задача 4.4. Вариант 1 (**А**). Процесс производства на некотором предприятии описывается производственной функцией $Q = 3x_1^{1/3} \cdot x_2^{2/3}$, где x_1 – объем используемых трудовых ресурсов; x_2 – объем используемого оборудования.

Найти алгебраическое выражение для изокванты $Q = 6$. Нарисовать эту изокванту.

Ставка арендной платы за оборудование вдвое выше ставки оплаты труда. Предприятие использует две единицы оборудования и две единицы труда. Может ли предприятие, изменив комбинацию используемых ресурсов, уменьшить затраты, не сокращая выпуск?

Задача 4.5. Вариант 2 (**Б**). Предприятие производит обмен продукции Q, используя такие объемы ресурсов, при которых предельный продукт оборудования превышает предельный продукт труда в два раза. Ставка платы за аренду единицы оборудования превышает ставку оплаты труда в 3 раза.

Может ли предприятие уменьшить затраты, не сокращая объема выпуска?

Если да, то в каком направлении следует изменить соотношение между объемами использования оборудования и труда. Объясните с помощью изокванты и линии цен x_2.

Задача 4.6. Вариант 3 (**В**). Две изокванты, предполагающие одно и то же количество продукции, изображены на рис. 4.3.

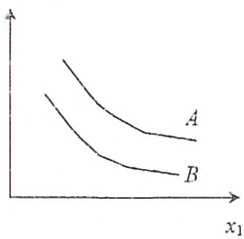

Рис. 4.3

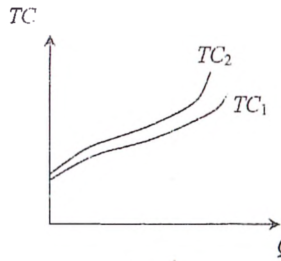

Рис. 4.4

Указать, какая из них характеризует процесс производства до внедрения новой технологии и какая после.

Задача 4.7. Вариант 4 (**Г**). Линии общих затрат в коротком периоде одного и того же предприятия изображены на рис. 4.4.

Укажите, какая из них предполагает более высокие цены на потребляемые данным предприятием ресурсы при неизменной технологии.

Задача 4.8. Вариант 5 (Д). Процесс производства на некотором предприятии можно описать с помощью производственной функции $Q = 2x_1^{1/2} \cdot x_2^{1/2}$.

Найти алгебраическое выражение для изоквант и изобразить их для следующих вариантов объема выпуска:

$$Q_1 = 2 \qquad Q_1 = 1$$
$$Q_2 = 4 \qquad Q_2 = 3$$

Задача 4.9. Вариант 6 (Е, Ё). Заполнить пропуски в таблице:

Объем применения переменного ресурса x_1	Общий выпуск продукции Q	Предельный продукт переменного ресурса MP_1	Средний продукт переменного ресурса AP_1
3	...		30
		20	
4	...		...
		...	
5	130		...
		5	
6	...		...
		...	
7	...		19,5

Задача 4.10. Вариант 7 (Ж). Заполнить пропуски в таблице:

Объем применения переменного ресурса x_1	Общий выпуск продукции Q	Предельный продукт переменного ресурса MP_1	Средний продукт переменного ресурса AP_1
3	...		20
		10	
4	...		...
		...	
5	100		...
		5	
6	...		...
		...	
7	...		10, 5

Задача 4.11. Вариант 8 (З). Заполнить пропуски в таблице:

Объем применения переменного ресурса x_1	Общий выпуск продукции Q	Предельный продукт переменного ресурса MP_1	Средний продукт переменного ресурса AP_1
3	90		...
		10	
4	...		...
		...	
5	110		...
		...	
6	...		18,5
		...	
7	115,5		...

Задача 4.12. Вариант 9 **(И)**. Заполнить пропуски в таблице:

Объем применения переменного ресурса x_1	Общий выпуск продукции Q	Предельный продукт переменного ресурса MP_1	Средний продукт переменного ресурса AP_1
3	…		20
4	80	…	…
5	…	10	…
6	95	…	…

Задача 4.13. Вариант 10 **(К)**. Заполнить пропуски в таблице:

Объем применения переменного ресурса x_1	Общий выпуск продукции Q	Предельный продукт переменного ресурса MP_1	Средний продукт переменного ресурса AP_1
3	90		…
4	…	10	…
5	…	8	…
6	…	6	…
7	…	5	…

Задача 4.14. Вариант 11 **(Л)**. Заполнить пропуски в таблице:

Объем применения переменного ресурса x_1	Общий выпуск продукции Q	Предельный продукт переменного ресурса MP_1	Средний продукт переменного ресурса AP_1
3	30		…
4	…	6	…
5	…	…	8
6	42	…	…

Задача 4.15. Вариант 12 **(М)**. Объединение имеет два завода – А и Б, каждый из которых производит половину общего объема продукции объединения. Предельные затраты на заводе А – 10 руб., на Б – 8 руб. Общий объем продукции объединения остается неизменным.

Можно ли сократить общую сумму затрат, переместив часть выпуска с одного завода на другой? Если да, то на каком заводе выпуск должен увеличиться?

Задача 4.16. Варианты 13–24 **(Н–Щ)**. Рассчитать постоянные, переменные, предельные, средние, общие средние постоянные и средние переменные затраты. Последние четыре величины изобразить графически.

Зависимость общих затрат предприятия по вариантам представлена в табл. 4.5, 4.6 по вариантам.

Таблица 4.5

Зависимость общих затрат

Выпуск в ед. времени, шт.	Затраты общие по вариантам, руб.					
	Вариант 13 **(Н)**	Вариант 14 **(О)**	Вариант 15 **(П)**	Вариант 16 **(Р)**	Вариант 17 **(С)**	Вариант 18 **(Т)**
0	40	50	50	0	100	50
1	120	115	75	15	150	100
2	160	135	100	20	180	125
3	220	145	125	25	210	150
4	300	150	150	30	250	225
5	400	175	210	40	315	325
6	520	225	275	55	400	450
7	660	320	360	75	500	590
8	820	420	460	100	620	740

Таблица 4.6

Зависимость общих затрат

Выпуск в ед. времени, шт.	Затраты общие по вариантам, руб.					
	Вариант 19 **(У)**	Вариант 20 **(Ф)**	Вариант 21 **(Х)**	Вариант 22 **(Ц)**	Вариант 23 **(Ч)**	Вариант 24 **(Ш, Щ)**
0	20	30	50	80	10	10
1	40	55	100	100	20	15
2	60	85	130	120	30	25
3	90	135	165	140	40	40
4	130	195	250	180	60	60
5	200	265	360	260	85	85
6	280	350	500	360	120	120
7	400	450	650	500	175	160
8	550	570	850	650	275	210

Задача 4.17. Вариант 25 (**Э, Ю, Я**). Функция общих затрат предприятия имеет вид $TC = 100 + 4Q + 0{,}25Q^2$.

Определить выражения для FC, VC, ATC, AVC, MC как функции от Q. При каком значении Q средние общие затраты достигают минимума?

5. ПРЕДПРИЯТИЕ И РЫНОК

Решение задач по этой теме основывается на том, что предприятие, работающее в условиях как совершенной, так и несовершенной конкуренции, старается определить такой объем производства, чтобы максимизировать получаемую прибыль. В условиях совершенной конкуренции и монополии как формы несовершенной конкуренции, возможности и результаты деятельности у предприятий различны. Следует учитывать, что в обоих случаях затраты включают в себя нормальный уровень прибыли.

При определении объема производства, при котором предприятие, находящееся в условиях совершенной конкуренции, максимизирует прибыль, следует исходить из того, что в этом случае предельная выручка (MR) равна предельным затратам (MC) и равна цене (P). Причем, если цена оказывается ниже минимума средних переменных затрат (AVC), то предприятие может прекратить производство данного товара.

При определении цены и объема выпуска продукции предприятием-монополистом следует учитывать, что оно максимизирует прибыль при условии равенства предельной выручки предельным затратам.

Примеры задач

Задача 5.1

Предприятие находится в условиях совершенной конкуренции. Зависимость общих затрат предприятия (TC) от выпуска представлена в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Зависимость общих затрат от выпуска продукции

Выпуск продукции в ед. времени Q, шт.	Общие затраты TC, руб.
0	4
1	8
2	10
3	14
4	20
5	28

Если цена товара 5 руб., какой объем производства выберет предприятие? Ниже какого уровня должна быть цена, чтобы предприятие прекратило производство данного товара?

Решение задачи

В ходе решения этой задачи следует определить такой объем производства, при котором $MC = P = 5$ руб., а также рассчитать средние переменные затраты. Если цена опускается ниже минимума средних переменных затрат, предприятие прекращает производство. Проверка правильности решения производится путем расчета общей выручки ($TR = P \cdot Q$) и прибыли ($\Pi = TR - TC$), максимум которой должен быть достигнут при выбранном нами объеме производства. Предельные затраты, переменные и средние переменные затраты определим по формулам, приводимым в предыдущей теме.

Результаты решения оформим в виде табл. 5.2.

Таблица 5.2

Результаты решения задачи

Выпуск продукции Q, шт.	Затраты общие TC, руб.	Предельные затраты MC, руб.	Переменные затраты VC, руб.	Средние переменные затраты AVC, руб.	Общая выручка TR, руб.	Прибыль П, руб.
0	4		0	–	0	–4
1	8	4	4	4	5	–3
2	10	2	6	3	10	0
3	14	4	10	3,3	15	1
4	20	6	16	4	20	0
5	28	8	24	4,8	25	–3

Как видно из табл. 5.2, минимум AVC составляет 3 руб., т. е. цена должна быть больше 3 руб. за единицу продукции, чтобы предприятие не прекратило производство. Из таблицы видно, что при увеличении выпуска с 2 до 3 ед. предельные затраты равны 4 руб., что ниже цены продукции 5 руб.

При увеличении выпуска с 3 до 4 ед. продукции предельные затраты равны 6 руб., что уже выше цены продукции. Следовательно, можно считать, что условие максимума прибыли $MC = P$ выполняется при объеме производства 3 ед.

Проверка показывает, что при выпуске 3 ед. прибыль составляет 1 руб., т. е. она максимальная в данных условиях.

Задача 5.2

Фирма находится в условиях совершенной конкуренции. Функция общих затрат в коротком периоде представлена в табл. 5.3.

Таблица 5.3

Общие затраты в зависимости от объема выпуска

Выпуск продукции в единицу времени Q, шт.	Общие затраты TC, руб.
0	9
1	11
2	15
3	21
4	29
5	39

В отрасли занято 1 000 одинаковых фирм. Кривая рыночного спроса представлена в табл. 5.4.

Таблица 5.4

Объем спроса в зависимости от цены

Цена P, руб.	Объем спроса Q_D, шт.
3	3000
5	2000
7	1500
9	1000

Задания

1. Определить равновесную цену.
2. Определить выпуск продукции каждой фирмы.
3. Определить, как будут вести себя фирмы в длительном периоде: переходить в данную отрасль или уходить из нее?

Решение задачи

Ход решения этой задачи сначала аналогичен предыдущей: определяются средние переменные затраты, фиксирующие минимальный уровень цены, и предельные затраты (табл. 5.5).

Таблица 5.5

Различные виды затрат в зависимости от объема выпуска

Выпуск ед. Q, шт.	Затраты общие TC, руб.	Переменные затраты VC, руб.	Средние переменные затраты AVC, руб.	Предельные затраты MC, руб.
0	9	0	–	
1	11	2	2	2
2	15	6	3	4
3	21	12	4	6
4	29	20	5	8
5	39	30	6	10

Из табл. 5.5 видно, что для того, чтобы фирма не прекратила производство, цена должна быть выше 2 руб. за единицу товара.

На втором этапе решения надо вывести функцию предложения, функция спроса при этом представлена в табличной форме, и путем их сопоставления найти равновесную цену.

Функция предложения строится в соответствии с данными, приведенными в табл. 5.5.

Для того, чтобы можно было сопоставить объем спроса и объем предложения, определим для тех же значений цены, для которых мы располагаем данными об объемах спроса, т. е. для 3, 5, 7 и 9 руб. Анализ предельных затрат в табл. 5.5 показывает, что при цене 3 руб. оптимальный для фирмы объем производства составляет 1 ед. продукции, при цене 5 руб. – 2 ед., при цене 7 руб. – 3 ед., при цене 9 руб. – 4 ед.

Сведем полученные результаты в табл. 5.6.

Таблица 5.6

Сопоставление функций спроса и предложения

Функция спроса		Функция предложения		
Цена P, руб.	Объем спроса Q_D, ед.	Цена P, руб.	Объем предложения Q_S, ед.	
			на 1 предприятии	на 1 000 предприятий
3	3000	3	1	1000
5	2000	5	2	2000
7	1500	7	3	3000
9	1000	9	4	4000

Как следует из табл. 5.6, объем спроса равен объему предложения ($Q_D = Q_S$) при цене 5 руб. за единицу, а выпуск продукции каждой фирмой определяется размере 2 ед. В заключение определяем тенденцию изменения количества предприятий на рынке. Для этого нужно определить величину прибыли от выпуска данной продукции ($\Pi = TR - TC$). При цене 5 руб. и объеме 2 ед. общая выручка одного предприятия составит $TR = P \cdot Q = 5 \cdot 2 = 10$ руб., а общие затраты (TC), согласно исходным данным, при выпуске 2 ед., составят 15 руб. Отсюда $\Pi = 10 - 15 = -5$ руб., а следовательно, в длительном периоде предприятия будут уходить из данной отрасли.

Задачи для самостоятельного решения

Вариант 1 **(А, Б, В, Г)**. Предприятие находится в условиях совершенной конкуренции. Зависимость общих затрат от выпуска продукции представлена в таблице:

Выпуск продукции в единицу времени Q, шт.	Общие затраты TC, руб.
0	16
1	24
2	34
3	46
4	60
5	76

Если цена товара 9 руб., какой объем производства следует выбрать? Ниже какого уровня должна снизиться цена, чтобы прекратилось производство?

Вариант 2 **(Д, Е, Ё, Ж)**. Предприятие находится в условиях совершенной конкуренции. Зависимость общих затрат от выпуска продукции представлена в таблице:

Выпуск продукции в единицу времени Q, шт.	Общие затраты TC, руб.
0	4
1	8
2	14
3	16
4	20
5	26

Если цена товара 5 руб., какой объем производства следует выбрать? Ниже какого уровня должна снизиться цена, чтобы остановилось производство?

Вариант 3 **(З, И, К)**. Предприятие находится в условиях совершенной конкуренции. Зависимость общих затрат от выпуска продукции представлена в таблице:

Выпуск продукции в единицу времени Q, шт.	Общие затраты TC, руб.
0 1 2 3 4 5	16 9 11 15 21 29 39

Если цена товара 9 руб., какой объем производства следует выбрать? Ниже какого уровня должна опуститься цена, чтобы прекратилось производство?

Вариант 4 **(Л, М, Н)**. Предприятие находится в условиях совершенной конкуренции. Зависимость общих затрат от выпуска продукции представлена в таблице:

Выпуск продукции в единицу времени Q, шт.	Общие затраты TC, руб.
0	9
1	11
2	15
3	21
4	29
5	39

Если цена товара 9 руб., какой объем производства следует выбрать? Ниже какого уровня должна опуститься цена, чтобы прекратилось производство?

Вариант 5 **(О, П, Р)**. Предприятие находится в условиях совершенной конкуренции. Зависимость общих затрат от выпуска продукции представлена в таблице:

Выпуск продукции в единицу времени Q, шт.	Общие затраты TC, руб.
0	16
1	10
2	14
3	16
4	20
5	26
	34

Если цена товара 7 руб., какой объем производства следует выбрать? Ниже какого уровня должна опуститься цена, чтобы прекратилось производство?

Вариант 6 **(С, Т, У, Ф)**. Предприятие находится в условиях совершенной конкуренции. Функция общих затрат в коротком периоде представлена в таблице:

Выпуск продукции в единицу времени Q, шт.	Общие затраты TC, руб.
0	20
1	22
2	26
3	32
4	40
5	50

В отрасли занято 100 предприятий. Кривая рыночного спроса представлена в таблице:

Цена P, руб.	Объем спроса Q_D, ед.
3	600
5	400
7	300
9	200

1. Какова будет равновесная цена?
2. Каков будет выпуск продукции каждым предприятием?
3. Какова тенденция изменения числа предприятий в длительном периоде?

Вариант 7 **(Х, Ц, Ч)**, 8 **(Ш, Щ, Э, Ю, Я)**. Найти функцию предложения в коротком периоде для предприятия, находящегося в условиях совершенной конкуренции, если функция общих затрат следующая:

– *вариант 7*: $TC = 0{,}04Q^3 - 0{,}8Q^2 + 10Q + 5$;

– *вариант 8*: $TC = 0{,}1Q^3 - 2Q^2 + 15Q + 10$.

6. ЭКСПЕРТНЫЕ МЕТОДЫ

Пример задачи

Цель решения задачи – использование полученной информации для определения путей качественного совершенствования продукции, оценки технического уровня, конкурентоспособности холодильников на рынке, обоснования цен, надбавок (скидок) с цен с учетом технического уровня продукции, выявления новых секторов рынка холодильников.

Задание

Произвести экспертную оценку технических параметров холодильников по степени значимости их для потребителей.

Исходные данные

Технические параметры холодильников:
1) объем камеры, м^3;
2) количество камер, шт.;
3) энергопотребление, Вт;
4) наличие системы Hoy Frost;
5) дизайн;
6) бренд.
Число факторов $n = 6$.
Число экспертов $m = 4$.

Решение задачи

1 этап. Создание экспертной комиссии.

В экспертную группу вошло 4 эксперта. Требования к ее оформлению изложены в лекциях.

2 этап. Сбор мнений специалистов путем анкетного опроса.

Оценку степени значимости технических параметров холодильника для потребителей эксперты производят путем присвоения им рангового номера. Фактору, которому эксперт дает наивысшую оценку, присваивается ранг 1. Если эксперт признает несколько факторов равнозначными, то им присваивается одинаковый ранговый номер. На основе данных анкетного опроса составляется сводная матрица рангов.

3 этап. Составление сводной матрицы рангов (табл. 6.1).

Так как в матрице имеются связанные ранги (одинаковый ранговый номер) в оценках 3-го и 4-го экспертов, произведем их переформирование. Переформирование рангов производится без изменения мнения эксперта, т. е. между ранговыми номерами должны сохраниться соответствующие соотношения (больше, меньше или равно). Также не рекомендуется ставить ранг выше 1 и ниже значения, равного количеству параметров (в данном случае $n = 6$).

Таблица 6.1

Матрица рангов

№ п/п	Технические параметры холодильника	Единица измерения	Эксперты			
			1	2	3	4
1	Объем камеры (x_1)	м^3	3	4	5	4
2	Бренд (x_2)	–	5	6	3	4
3	Количество камер (x_3)	шт.	4	3	1	3
4	Наличие систем Ноу Frost (x_4)	–	1	1	3	1
5	Энергопотребление (x_5)	Вт	6	5	6	6
6	Дизайн (x_6)	–	2	2	2	2

Переформирование рангов представлено в табл. 6.2, 6.3.

Таблица 6.2

Переформирование рангов для третьего эксперта

Номера мест в упорядоченном ряду	1	2	3	4	5	6
Расположение факторов по оценке эксперта	1 x_3	2 x_6	3 x_2	3 x_4	5 x_1	6 x_5
Новые ранги	1	2	3,5	3,5	5	6

Таблица 6.3

Переформирование рангов для четвертого эксперта

Номера мест в упорядоченном ряду	1	2	3	4	5	6
Расположение факторов по оценке эксперта	1 x_4	2 x_6	3 x_3	4 x_1	4 x_2	6 x_5
Новые ранги	1	2	3	4,5	4,5	6

На основании переформирования рангов строится новая матрица рангов (табл. 6.4).

Таблица 6.4

Матрица рангов

Факторы	Эксперты				Сумма рангов	Δ	Δ^2
	1	2	3	4			
x_1	3	4	5	4,5	16,5	2,5	6,25
x_2	5	6	3,5	4,5	19	5	25
x_3	4	3	1	3	11	–3	9
x_4	1	1	3,5	1	6,5	–7,5	56,25
x_5	6	5	6	6	23	9	81
x_6	2	2	2	2	8	–6	36
Σ	21	21	21	21	84	S = 213,5	

Проверяем правильность составления матрицы на основе исчисления контрольной суммы:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \frac{(1+n)n}{2} = \frac{(1+6)6}{2} = 21.$$

Суммы по столбцам матрицы равны контрольной сумме и между собой, значит матрица составлена правильно.

4 этап. Анализ значимости исследуемых факторов.

В данной задаче факторы по значимости распределились следующим образом (табл. 6.5).

Таблица 6.5

Расположение факторов по значимости

Факторы	x_4	x_6	x_3	x_1	x_2	x_5
Сумма рангов	6,5	8	11	16,5	19	23

Для наглядности полученных результатов оценок факторов построим гистограмму и полигон распределения сумм рангов по степени их значимости для потребителей (рис. 6.1), проведем классификацию факторов по сумме рангов.

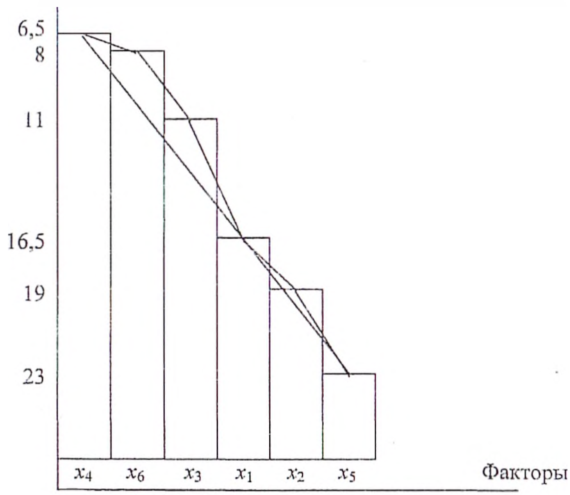

Рис. 6.1

Гистограмма (рис. 6.1) позволяет сделать следующие выводы:

1. Наибольшее значение для потребителей имеют фактор x_4 (наличие системы Hoy Frost) и фактор x_6 (дизайн).

2. Вторая группа по значимости включает в себя один фактор x_3 (количество камер).

3. Третья группа включает в себя факторы x_1 (объем камеры), x_2 (бренд), x_5 (энергопотребление).

Итак, важнейшими для потребителей являются следующие технические параметры холодильников: x_4, x_6, x_3.

5 этап. Оценка средней степени согласованности мнений всех экспертов.

Воспользуемся коэффициентом конкордации для случая, когда имеются связанные ранги (одинаковые значения рангов в оценках одного эксперта):

$$W = \frac{S}{\frac{1}{12}m^2(n^3-n) - m\sum_{i=1}^{m} T_i},$$

где $T_i = \frac{1}{12}\sum_{l=1}^{L_i}(t_l^3 - t_l)$; L_i – число связок (видов повторяющихся элементов) в оценках i-го эксперта; t_l – количество элементов в l-й связке для i-го эксперта (количество повторяющихся элементов); $S = 213{,}5$ (см. табл. 6.4); $n = 6$; $m = 4$.

Для данного случая расчет коэффициента конкордации будет следующим:

$T_3 = \frac{1}{12}(2^3 - 2) = 0{,}5$ (в оценках 3-го эксперта одна связка, повторяется ранг «3,5» 2 раза);

$T_4 = \frac{1}{12}(2^3 - 2) = 0{,}5$ (в оценках 4-го эксперта одна связка, повторяется ранг «4,5» 2 раза);

$\sum_{i=1}^{m} T_i = 0{,}5 + 0{,}5 = 1$ (если нет связанных рангов, то T_i равно нулю);

$$W = \frac{213{,}5}{\frac{1}{12}\cdot 4^2(6^3-6) - 4\cdot 1{,}0} = \frac{213{,}5}{276{,}0} = 0{,}774.$$

Коэффициент $W = 0{,}774$ говорит о наличии высокой степени согласованности мнений экспертов. На высокую степень согласованности мнений экспертов указывает и полигон распределения сумм рангов (см. рис. 6.1). Ломаная и прямая линии близко расположены друг к другу.

6 этап. Оценка значимости коэффициента конкордации.

Для этой цели вычислим критерий согласования Пирсона:

$$\chi^2 = \frac{S}{\frac{1}{12}mn(n+1) + \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{m} T_i}, \quad \chi^2 = \frac{213{,}5}{\frac{1}{12}\cdot 4\cdot 6(6+1) - \frac{1}{6-1}1} = 15{,}471.$$

Вычисленный $\chi^2 = 15,471$ сравним с табличным значением для числа степеней свободы $K = n - 1 = 6 - 1 = 5$ и при заданном уровне значимости $\alpha = 0,05$.

Так как χ^2 расчетный 15,471 > χ^2 табличного, равного 11,07, то $W = 0,774$ – величина неслучайная, а поэтому полученные результаты по оценке качественных свойств холодильников по степени их значимости для потребителей имеют смысл и могут использоваться в дальнейших исследованиях.

7 этап. Подготовка решения экспертной комиссии.

Была поставлена задача выяснить, какие технические параметры холодильников в наибольшей степени интересуют потребителей. В результате проведенного исследования на основе экспертных оценок выяснилось, что важнейшими качественными свойствами являются наличие систем, дизайн и количество камер.

Следовательно, качественное совершенствование холодильников должно идти по пути улучшения этих свойств (исходя из требований НТП).

Себестоимость, цены, доплата к ценам на изделия улучшенного качества и скидки с цен на холодильники должны строиться с учетом вышеперечисленных качественных свойств.

На основе получения суммы рангов (см. табл. 6.4) можно вычислить показатели весомости рассмотренных технических параметров холодильников для потребителя с тем, чтобы их можно было учитывать при оценке технического уровня холодильников. Для этого произведем следующие вычисления. Сначала по каждому параметру вычислим величины, обратные сумме рангов, т. е.:

$$x_1 = \frac{1}{16,5} = 0,06; \qquad x_2 = \frac{1}{19} = 0,05; \qquad x_3 = \frac{1}{11} = 0,09;$$

$$x_4 = \frac{1}{6,5} = 0,15; \qquad x_5 = \frac{1}{23} = 0,04; \qquad x_6 = \frac{1}{8} = 0,12.$$

Это делается для того, чтобы привести в соответствие содержание сумм рангов коэффициентам весомости. Расположим полученные числа по мере убывания, сложим их, взвесим каждое число в полученной сумме, которую примем равной 1 (табл. 6.6).

Таблица 6.6

Показатели весомости параметров холодильников

Технические параметры	Величины, обратные сумме рангов	Коэффициенты весомости параметров
x_4	0,15	0,29
x_6	0,12	0,23
x_3	0,09	0,18
x_1	0,06	0,12
x_2	0,05	0,10
x_5	0,04	0,08

Задача для самостоятельного решения

Произвести экспертную оценку технических параметров холодильников по степени значимости их для потребителей, используя свой вариант задачи.

Вариант 1 (**А**)

№ п/п	Технические параметры холодильника	Единица измерения	Эксперты			
			1	2	3	4
1	Объем камеры (x_1)	м^3	1	4	2	4
2	Бренд (x_2)	–	3	6	6	4
3	Количество камер (x_3)	шт.	2	3	3	3
4	Наличие системы Hoy Frost (x_4)	–	5	1	1	1
5	Энергопотребление (x_5)	Вт	4	5	4	6
6	Дизайн (x_6)	–	6	2	5	2

Вариант 2 (**Б**)

№ п/п	Технические параметры холодильника	Единица измерения	Эксперты			
			1	2	3	4
1	Объем камеры (x_1)	м^3	1	1	2	2
2	Бренд (x_2)	–	3	2	6	6
3	Количество камер (x_3)	шт.	2	4	3	3
4	Наличие системы Hoy Frost (x_4)	–	5	6	1	4
5	Энергопотребление (x_5)	Вт	4	5	4	2
6	Дизайн (x_6)	–	6	4	5	1

Вариант 3 (**В**)

№ п/п	Технические параметры холодильника	Единица измерения	Эксперты			
			1	2	3	4
1	Объем камеры (x_1)	м^3	3	4	2	4
2	Бренд (x_2)	–	2	6	3	4
3	Количество камер (x_3)	шт.	1	3	6	1
4	Наличие системы Hoy Frost (x_4)	–	6	1	1	3
5	Энергопотребление (x_5)	Вт	5	5	4	6
6	Дизайн (x_6)	–	4	2	5	2

Вариант 4 (**Г**)

№ п/п	Технические параметры холодильника	Единица измерения	Эксперты			
			1	2	3	4
1	Объем камеры (x_1)	м^3	1	4	2	5
2	Бренд (x_2)	–	3	6	2	5
3	Количество камер (x_3)	шт.	2	3	3	3
4	Наличие системы Hoy Frost (x_4)	–	5	1	1	1
5	Энергопотребление (x_5)	Вт	4	5	4	6
6	Дизайн (x_6)	–	6	2	5	2

Вариант 5 (Д)

№ п/п	Технические параметры холодильника	Единица измерения	Эксперты			
			1	2	3	4
1	Объем камеры (x_1)	м^3	3	4	2	6
2	Бренд (x_2)	–	2	6	6	1
3	Количество камер (x_3)	шт.	2	3	3	2
4	Наличие системы Hoy Frost (x_4)	–	5	1	1	3
5	Энергопотребление (x_5)	Вт	4	2	4	5
6	Дизайн (x_6)	–	6	5	5	5

Вариант 6 (Е, Ё)

№ п/п	Технические параметры холодильника	Единица измерения	Эксперты			
			1	2	3	4
1	Объем камеры (x_1)	м^3	1	3	5	4
2	Бренд (x_2)	–	3	2	2	4
3	Количество камер (x_3)	шт.	2	6	1	3
4	Наличие системы Hoy Frost (x_4)	–	5	5	4	1
5	Энергопотребление (x_5)	Вт	4	4	6	6
6	Дизайн (x_6)	–	6	4	2	2

Вариант 7 (Ж)

№ п/п	Технические параметры холодильника	Единица измерения	Эксперты			
			1	2	3	4
1	Объем камеры (x_1)	м^3	3	2	5	6
2	Бренд (x_2)	–	3	6	6	4
3	Количество камер (x_3)	шт.	2	5	1	3
4	Наличие системы Hoy Frost (x_4)	–	5	1	1	1
5	Энергопотребление (x_5)	Вт	4	5	4	6
6	Дизайн (x_6)	–	6	2	5	2

Вариант 8 (З)

№ п/п	Технические параметры холодильника	Единица измерения	Эксперты			
			1	2	3	4
1	Объем камеры (x_1)	м^3	1	6	2	6
2	Бренд (x_2)	–	3	5	6	2
3	Количество камер (x_3)	шт.	2	4	3	3
4	Наличие системы Hoy Frost (x_4)	–	5	3	1	4
5	Энергопотребление (x_5)	Вт	4	1	4	1
6	Дизайн (x_6)	–	6	2	5	2

Вариант 9 (**И**)

№ п/п	Технические параметры холодильника	Единица измерения	Эксперты			
			1	2	3	4
1	Объем камеры (x_1)	$м^3$	2	5	2	4
2	Бренд (x_2)	–	3	6	6	4
3	Количество камер (x_3)	шт.	5	3	3	3
4	Наличие системы Hoy Frost (x_4)	–	6	2	1	1
5	Энергопотребление (x_5)	Вт	4	4	4	6
6	Дизайн (x_6)	–	1	4	5	2

Вариант 10 (**К**)

№ п/п	Технические параметры холодильника	Единица измерения	Эксперты			
			1	2	3	4
1	Объем камеры (x_1)	$м^3$	1	2	2	3
2	Бренд (x_2)	–	3	3	6	2
3	Количество камер (x_3)	шт.	2	5	3	5
4	Наличие системы Hoy Frost (x_4)	–	5	6	1	6
5	Энергопотребление (x_5)	Вт	4	4	4	6
6	Дизайн (x_6)	–	6	1	5	4

Вариант 11 (**Л**)

№ п/п	Технические параметры холодильника	Единица измерения	Эксперты			
			1	2	3	4
1	Объем камеры (x_1)	$м^3$	1	5	3	4
2	Бренд (x_2)	–	3	6	6	4
3	Количество камер (x_3)	шт.	2	2	3	3
4	Наличие системы Hoy Frost (x_4)	–	5	2	1	1
5	Энергопотребление (x_5)	Вт	4	3	4	6
6	Дизайн (x_6)	–	6	4	5	2

Вариант 12 (**М**)

№ п/п	Технические параметры холодильника	Единица измерения	Эксперты			
			1	2	3	4
1	Объем камеры (x_1)	$м^3$	3	4	2	3
2	Бренд (x_2)	–	1	6	6	4
3	Количество камер (x_3)	шт.	2	3	3	3
4	Наличие системы Hoy Frost (x_4)	–	5	5	1	1
5	Энергопотребление (x_5)	Вт	4	2	4	6
6	Дизайн (x_6)	–	6	2	5	2

Вариант 13 (Н)

№ п/п	Технические параметры холодильника	Единица измерения	Эксперты			
			1	2	3	4
1	Объем камеры (x_1)	$м^3$	2	4	2	4
2	Бренд (x_2)	–	5	3	2	5
3	Количество камер (x_3)	шт.	1	3	3	3
4	Наличие системы Hoy Frost (x_4)	–	6	1	1	1
5	Энергопотребление (x_5)	Вт	1	5	4	6
6	Дизайн (x_6)	–	4	2	5	2

Вариант 14 (О)

№ п/п	Технические параметры холодильника	Единица измерения	Эксперты			
			1	2	3	4
1	Объем камеры (x_1)	$м^3$	1	6	2	1
2	Бренд (x_2)	–	3	5	6	3
3	Количество камер (x_3)	шт.	2	2	3	5
4	Наличие системы Hoy Frost (x_4)	–	5	4	1	6
5	Энергопотребление (x_5)	Вт	4	3	4	4
6	Дизайн (x_6)	–	6	1	5	2

Вариант 15 (П)

№ п/п	Технические параметры холодильника	Единица измерения	Эксперты			
			1	2	3	4
1	Объем камеры (x_1)	$м^3$	2	4	3	4
2	Бренд (x_2)	–	1	6	2	4
3	Количество камер (x_3)	шт.	3	3	5	3
4	Наличие системы Hoy Frost (x_4)	–	5	1	6	1
5	Энергопотребление (x_5)	Вт	4	5	4	6
6	Дизайн (x_6)	–	6	2	1	2

Вариант 16 (Р)

№ п/п	Технические параметры холодильника	Единица измерения	Эксперты			
			1	2	3	4
1	Объем камеры (x_1)	$м^3$	3	1	2	4
2	Бренд (x_2)	–	2	2	6	4
3	Количество камер (x_3)	шт.	5	3	3	3
4	Наличие системы Hoy Frost (x_4)	–	6	4	1	1
5	Энергопотребление (x_5)	Вт	4	5	4	6
6	Дизайн (x_6)	–	1	6	5	2

Вариант 17 (С)

№ п/п	Технические параметры холодильника	Единица измерения	Эксперты			
			1	2	3	4
1	Объем камеры (x_1)	$м^3$	1	4	6	1
2	Бренд (x_2)	–	3	6	5	3
3	Количество камер (x_3)	шт.	2	3	3	5
4	Наличие системы Hoy Frost (x_4)	–	5	1	4	2
5	Энергопотребление (x_5)	Вт	4	5	1	4
6	Дизайн (x_6)	–	6	2	1	6

Вариант 18 (Т)

№ п/п	Технические параметры холодильника	Единица измерения	Эксперты			
			1	2	3	4
1	Объем камеры (x_1)	$м^3$	2	4	5	4
2	Бренд (x_2)	–	2	6	5	4
3	Количество камер (x_3)	шт.	5	3	6	3
4	Наличие системы Hoy Frost (x_4)	–	6	1	2	1
5	Энергопотребление (x_5)	Вт	4	5	3	6
6	Дизайн (x_6)	–	3	2	1	2

Вариант 19 (У)

№ п/п	Технические параметры холодильника	Единица измерения	Эксперты			
			1	2	3	4
1	Объем камеры (x_1)	$м^3$	1	2	2	1
2	Бренд (x_2)	–	3	5	6	5
3	Количество камер (x_3)	шт.	2	6	3	6
4	Наличие системы Hoy Frost (x_4)	–	5	4	1	3
5	Энергопотребление (x_5)	Вт	4	5	4	1
6	Дизайн (x_6)	–	6	3	5	4

Вариант 20 (Ф)

№ п/п	Технические параметры холодильника	Единица измерения	Эксперты			
			1	2	3	4
1	Объем камеры (x_1)	$м^3$	1	1	5	3
2	Бренд (x_2)	–	3	2	6	4
3	Количество камер (x_3)	шт.	2	5	3	3
4	Наличие системы Hoy Frost (x_4)	–	5	4	1	1
5	Энергопотребление (x_5)	Вт	4	5	4	6
6	Дизайн (x_6)	–	6	6	5	2

Вариант 21 **(Х)**

№ п/п	Технические параметры холодильника	Единица измерения	Эксперты			
			1	2	3	4
1	Объем камеры (x_1)	$м^3$	5	4	2	5
2	Бренд (x_2)	–	2	6	6	2
3	Количество камер (x_3)	шт.	3	3	3	4
4	Наличие системы Hoy Frost (x_4)	–	1	1	1	6
5	Энергопотребление (x_5)	Вт	4	5	4	1
6	Дизайн (x_6)	–	6	2	5	3

Вариант 22, 23 **(Ц, Ч)**

№ п/п	Технические параметры холодильника	Единица измерения	Эксперты			
			1	2	3	4
1	Объем камеры (x_1)	$м^3$	1	4	2	5
2	Бренд (x_2)	–	3	6	3	2
3	Количество камер (x_3)	шт.	2	3	6	1
4	Наличие системы Hoy Frost (x_4)	–	5	1	1	4
5	Энергопотребление (x_5)	Вт	4	5	4	6
6	Дизайн (x_6)	–	6	2	2	2

Вариант 24 **(Ш, Щ)**

№ п/п	Технические параметры холодильника	Единица измерения	Эксперты			
			1	2	3	4
1	Объем камеры (x_1)	$м^3$	1	2	3	4
2	Бренд (x_2)	–	3	6	6	4
3	Количество камер (x_3)	шт.	5	6	2	3
4	Наличие системы Hoy Frost (x_4)	–	5	1	1	1
5	Энергопотребление (x_5)	Вт	4	5	4	6
6	Дизайн (x_6)	–	6	2	5	2

Вариант 25, 26 **(Э, Ю, Я)**

№ п/п	Технические параметры холодильника	Единица измерения	Эксперты			
			1	2	3	4
1	Объем камеры (x_1)	$м^3$	1	2	5	4
2	Бренд (x_2)	–	3	1	6	4
3	Количество камер (x_3)	шт.	5	5	4	3
4	Наличие системы Hoy Frost (x_4)	–	5	6	1	1
5	Энергопотребление (x_5)	Вт	4	3	2	6
6	Дизайн (x_6)	–	6	4	3	2

7. МАТРИЧНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В АНАЛИЗЕ МЕЖОТРАСЛЕВЫХ СВЯЗЕЙ

Межотраслевой баланс производства и распределения продукции является результатом развития балансового метода анализа и планирования народного хозяйства. Межотраслевой баланс позволяет проверить сбалансированность народно-хозяйственного плана, соблюдение установленных пропорций развития различных отраслей народного хозяйства, а также межотраслевых и внутриотраслевых пропорций.

Структуру межотраслевого баланса можно представить в виде матрицы (табл. 7.1).

Таблица 7.1

Таблица межотраслевого баланса

<table>
<tr><td colspan="2">Отрасли-покупатели
→
сектора спроса</td><td>Отрасли производства
(сектора)</td><td>Конечный спрос
(продукция)</td><td rowspan="2">Валовая продукция</td></tr>
<tr><td colspan="2">Отрасли-продавцы
↓
сектора предложения</td><td>1, 2, 3, …, j, …, n</td><td>Потребление, инвестиции,
экспорт, импорт
(со знаком «–») и т. д.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Отрасли производства (сектора)</td><td>1
2
3

i</td><td>Структура распределения выпуска
$x_{11}\ x_{12}\ x_{13} \dots x_{1j} \dots x_{1n}$
$x_{21}\ x_{22}\ x_{23} \dots x_{2j} \dots x_{2n}$
$x_{31}\ x_{32}\ x_{33} \dots x_{3j} \dots x_{3n}$
Промежуточный спрос
$x_{i1}\ x_{i2}\ x_{i3} \dots x_{ij} \dots x_{in}$</td><td>$y_1$
y_2
y_3
…
y_i</td><td rowspan="2">x_1
x_2
x_3
…
x_i
…
…
…
…
…
…
x_n</td></tr>
<tr><td>…
…
…
…
…
n</td><td>Структура затрат, издержек
Затраты промежуточных продуктов
……….
$x_{n1} \dots x_{n2} \dots x_{n3} \dots x_{nj} \dots x_{nn}$</td><td>Конечный спрос
…
…
…
…
y_n</td></tr>
<tr><td>Добавленная стоимость</td><td>Оплата труда, чистый доход (прибыль, амортизационные отчисления, налоги и т. д.)</td><td>Факторные затраты
$k_1,\ k_2\ k_3 \dots k_j \dots k_n$
$\ell_1\ \ell_2\ \ell_3 \dots \ell_j \dots \ell_n$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Валовая продукция</td><td>$x_1\ x_2\ x_3 \dots x_j \dots x_n$</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Строки табл. 7.1. показывают распределение выпуска каждого вида продукции. Каждая строка характеризуется следующим балансом:

выпуск данного вида продукции = промежуточный спрос + конечный спрос,

что математически может быть записано как

$$X_i = (x_{11} + x_{12} + x_{13} + ... + x_{ij} + ... + ... x_{in}). \tag{7.1}$$

Промежуточный спрос есть часть общего спроса, представляющая собой закупки данного вида продукции отраслями 1, 2, 3 и т. д. в качестве исходных материалов, т. е. в качестве промежуточных продуктов. Напротив, конечный спрос есть часть спроса, представляющая закупки конечных продуктов – потребительских или инвестиционных.

Столбцы таблицы показывают структуру затрат, или структуру используемых ресурсов, необходимых для каждой отрасли. Для столбцов устанавливается следующий баланс:

расходы отрасли = промежуточные затраты + добавленная стоимость,

что в математической записи выглядит как

$$x_j = (x_{1j} + x_{2j} + ... + x_{nj}) + k_i + \ell_j. \tag{7.2}$$

Промежуточные затраты представляют собой исходные материалы, закупленные отраслью у секторов 1, 2, 3 и т. д. Добавленная стоимость есть факторные затраты отрасли, т. е. вновь созданная стоимость, распадающаяся на доход работающих по найму (заработную плату) и предпринимательской (чистый) доход (прибыль).

Для строк и столбцов таблицы межотраслевого баланса имеют место следующие тождества:

выпуск отрасли = расходы отрасли;

общая сумма конечного спроса = общая сумма добавленной стоимости,

которые математически записываются так:

$$x_i = \sum_j^n x_{ij} + y_i = \sum_i^n x_{ij} + k_j + \ell_j, \tag{7.3}$$

$$\sum_i y_i = \sum_j k_j + \sum_j \ell_j. \tag{7.4}$$

Для доказательства соотношения (7.4) достаточно сложить почленно правую и левую части уравнений (7.2) и (7.1), образующих системы. В результате получим два равенства:

$$\sum_{i}^{n} x_i = \sum_{i}^{n}\sum_{j}^{n} x_{ij} + \sum_{i}^{n} y_i;$$

$$\sum_{i}^{n} x_i = \sum_{i}^{n}\sum_{j}^{n} x_{ij} + \sum_{i}^{n} k_j + \sum_{j}^{n} \ell_i,$$

а отсюда следует выражение (7.4).

Таблица межотраслевого баланса позволяет изучать структуру потоков ресурсов, однако для понимания функционирования экономики, в частности эффекта распространения (мультипликации), необходим еще один шаг, заключающийся в построении таблиц коэффициентов прямых затрат и коэффициентов полных затрат.

Коэффициент прямых затрат определяется как объем ресурса i, необходимый для производства единицы продукции j, т. е.

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}. \tag{7.5}$$

После подстановки $x_{ij} = a_{ij}x_j$ получаем

$$x_i = \sum_{j} a_{ij}x_j + y_i. \tag{7.6}$$

Пример задачи

Система уравнений, составленная из уравнений вида (7.6), позволяет сформулировать как минимум три типа задач межотраслевого баланса:

1) известны коэффициенты прямых материальных затрат a_{ij} и объемы y_i конечного продукта всех отраслей (или спроса); найти объемы производства (валовой продукции) x_i каждой отрасли;

2) при заданных объемах валовой продукции (объемах производства) x_i всех отраслей и известных коэффициентах прямых материальных затрат найти a_{ij} объемы конечной продукции y_i всех отраслей.

3) известны коэффициенты прямых материальных затрат a_{ij}, заданы объемы валовой продукции части отраслей и объемы конечной продукции остальных отраслей; найти объемы чистой продукции первой и валовую продукцию вторых отраслей.

Первая из сформулированных задач близка к решаемой на практике, поэтому рассмотрим ее решение более подробно.

Решение задачи

В матрице межотраслевого баланса для каждой отрасли допускается существование производственной функции с неизменным эффектом масштаба (затраты прямо пропорциональны выпуску) и отсутствием взаимозаменяемости ресурсов (соотношение затрат ресурсов фиксировано и не зависит от уровня выпуска). Такие производственные функции могут быть записаны следующим образом:

$$x_j = \min_j \left(\frac{x_{1j}}{a_{1j}}, \frac{x_{2j}}{a_{2j}}, \ldots, \frac{x_{ij}}{a_{ij}}, \ldots, \frac{x_{nj}}{a_{nj}} \right).$$

В частном случае уравнения производственной функции – это система уравнений вида (7.2), тождественная системе уравнений вида (7.6), т. е. для отыскания решения первой задачи $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Необходимо решение системы линейных уравнений вида (7.6).

С помощью простых алгебраических преобразований систему уравнений вида

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1, \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + y_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + y_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + y_n. \end{cases} \qquad (7.7)$$

представим следующим образом:

$$\begin{cases} (1 - a_{11})x_1 - a_{12}x_1 - \ldots - a_{1n}x_n = y_1, \\ -a_{21}x_1 + (1 - a_{22})x_2 - \ldots - a_{2n}x_n = y_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots + (1 - a_{nn})x_n = y_n. \end{cases} \qquad (7.8)$$

Чтобы получить решение системы (7.8) в общем виде, запишем ее в матричной форме. Для этого введем следующие обозначения: через X обозначим матрицу-столбец переменных $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, через A – матрицу коэффициентов прямых материальных затрат $[a_{ij}]$, через E_n – единичную матрицу соответствующего (n-го) порядка, через Y – матрицу-столбец свободных членов $[y_1, y_2, \ldots, y_n]$, т. е.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}, \ A = \begin{bmatrix} a_{11}a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}a_{n2} \ldots a_{nn} \end{bmatrix}, \ E_n = \begin{bmatrix} 1\ 0 \ldots 0 \\ 0\ 1 \ldots 0 \\ \ldots\ldots \\ 0\ 0 \ldots 1 \end{bmatrix}, \ Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Тогда система уравнений (7.8) в матричной форме запишется как

$$[E_n - A]\,X = Y. \qquad (7.9)$$

Умножив уравнение (7.9) почленно слева и справа на матрицу $[E_n - A]^{-1}$ (обратную матрице $[E_n - A]$), получим $[E_n - A]^{-1} \cdot [E_n - A]\,X = [E_n - A]^{-1}\,Y$.

Из определения обратной матрицы следует, что произведение $[E_n - A]^{-1} \times \times [E_n - A] = E_n$ – единичная матрица, но тогда $E_nX = X$, поскольку единичная матрица при умножении матриц играет такую же роль, как и единица при умножении чисел, следовательно

$$X = [E_n - A]^{-1}\,Y. \tag{7.10}$$

Таким образом, мы получили решение системы уравнений межотраслевого баланса в матричной форме. Однако использование формулы (7.10) на практике связано с большими вычислительными трудностями.

Возможно решение системы уравнений (7.8) методом Гаусса, что также требует проведения большой вычислительной работы.

Решение системы уравнений межотраслевого баланса в матричной форме возможно при использовании матрицы полных материальных затрат, которая может быть представлена в виде

$$[E_n - A]^{-1} = B = \begin{bmatrix} b_{11} b_{12} \ldots b_{1n} \\ b_{21} b_{22} \ldots b_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{n1} b_{n2} \ldots b_{nn} \end{bmatrix}. \tag{7.11}$$

Отсюда можно перейти к следующей записи решения системы уравнений межотраслевого баланса:

$$X = B \cdot Y,$$

или в развернутом виде

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} b_{12} \ldots b_{1n} \\ b_{21} b_{22} \ldots b_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{n1} b_{n2} \ldots b_{nn} \end{bmatrix}. \tag{7.12}$$

Матрица B называется обратной матрицей Леонтьева, или, по аналогии с кейнсианской концепцией мультипликатора, матричным мультипликатором, или мультипликатором Леонтьева. Экономический смысл ее элементов b_{ij} заключается в следующем: коэффициент b_{ij} показывает потребность в валовом выпуске продукции отрасли i для производства единицы конечной продукции отрасли j.

Введенные раньше коэффициенты прямых затрат a_{ij} характеризуют непосредственно затраты продукции отрасли i на производство единицы продукции отрасли j. Но кроме прямых затрат на производство продукции отрасли j осуществляются и так называемые косвенные затраты, которые учитываются в коэффициенте b_{ij}. Смысл их будет ясен, если рассмотреть следующий пример.

Пусть одним из видов продукции пищевой промышленности является хлеб. Для производства хлеба необходимы мука, электроэнергия и многое другое, что непосредственно используется при выпечке хлеба. Это прямые затраты продукции при выпечке хлеба. Но при производстве муки необходимы затраты другой продукции – зерна, электроэнергии и др. Эти затраты – прямые при производстве муки и косвенные при производстве хлеба, причем их называют косвенными затратами первого порядка. В свою очередь, для производства зерна необходимы семена, машины и др. Это прямые затраты при производстве зерна, но косвенные при производстве муки (причем косвенные затраты первого порядка) и также косвенные при производстве хлеба (их называют косвенными затратами второго порядка) (рис. 7.1).

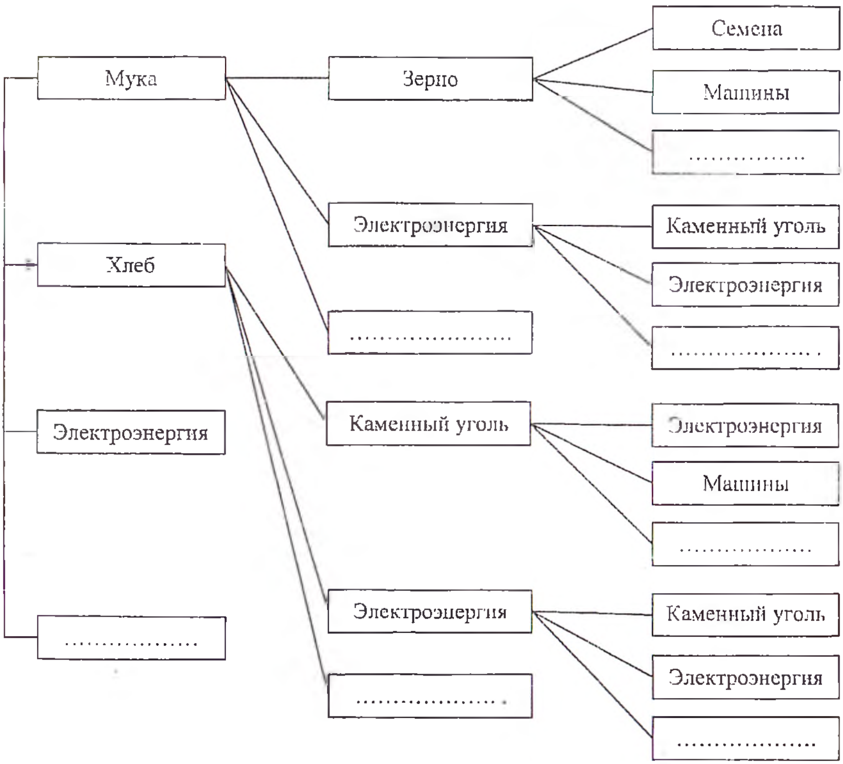

Рис. 7.1

Приведенную схему косвенных затрат при производстве хлеба можно продолжить и дальше, причем практически она продолжается неограниченно. Таким образом, b_{ij} в сущности есть мультипликатор, показывающий эффект распространения спроса, первоначальным источником которого является спрос на конечную продукцию. В практических расчетах косвенными затратами высоких порядков можно пренебречь вследствие их малости, поэтому значения полных затрат получаются приближенными.

Вычисление коэффициентов полных затрат возможно следующим образом. Поскольку b_{ij} определяет количество продукции отрасли i, необходимое для выпуска единицы конечной продукции отрасли j, то положим, что в системе уравнений (7.8) $y_1 = 1,\ y_2 = y_3 \ldots = 0$.

Если решить полученную систему уравнений относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то это решение даст нам коэффициенты полных затрат $b_{11},\ b_{21},\ b_{31}, \ldots,\ b_{n1}$, которые характеризуют материальные затраты каждой отрасли на выпуск единицы конечной продукции первой отрасли. Аналогично вычисляются остальные коэффициенты полных затрат: необходимо положить в уравнениях (7.8) y_2 равным единице, а остальные – равными нулю, затем $y_3 = 1$, а остальные – равными нулю и т. д. до y_n.

Количественно коэффициенты полных затрат значительно превышают соответствующие коэффициенты прямых затрат, причем наибольшее различие отмечается между коэффициентами полных и прямых затрат собственной продукции отрасли. Все они больше единицы, так как включают ту единицу ее продукции, которая входит в конечную продукцию.

Если известны коэффициенты полных затрат и задания по готовой продукции каждой отрасли, то по формулам из системы уравнений можно рассчитать валовую продукцию каждой отрасли:

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \ldots + b_{1n}y_n, \\ x_2 = b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \ldots + b_{2n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \ldots + b_{nn}y_n. \end{cases} \tag{7.13}$$

Другими словами, когда известны коэффициенты полных затрат и задания по выпуску конечной продукции, расчет объема валовой продукции каждой отрасли не вызывает затруднений – он осуществляется с помощью простых арифметических операций. Если будут изменены задания по выпуску конечной продукции, то новые плановые задания по выпуску валовой продукции могут быть рассчитаны также легко путем простейших арифметических операций без применения современной вычислительной техники. Главная же трудность – вычислить коэффициенты полных затрат.

С целью упрощения этого этапа решения системы линейных уравнений межотраслевого баланса используются итерационные методы вычисления матрицы полных затрат.

Идея этого метода заключается в следующем. Если предположить, что матрицы E_n и A есть матрицы первого порядка, содержащие по одному элементу, то матрицей, обратной матрице $[E_n - A] = [1 - a]$ будет матрица вида

$$[E_n - A]^{-1} = \left[\frac{1}{1-a}\right].$$

Элемент этой матрицы – число $\frac{1}{1-a}$ можно рассматривать как сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, первый член которой равен 1, а знаменатель прогрессии равен a:

$$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + ... + a^k + ...$$

Аналогично вычисляются приближенно элементы матрицы $[E_n - A]^{-1}$ n порядка, т. е.

$$B = [E_n - A]^{-1} = E_n + A + A^2 + \ldots + A^k + \ldots \tag{7.14}$$

Правая часть выражения (7.14) есть сумма неограниченного числа матриц. Чтобы вычислить приближенно элементы матрицы полных затрат, достаточно взять сумму первых k членов ряда (7.14).

Матрицы A^2, A^3 и т. д. вычисляются последовательно, учитывая, что $A^{m-1} = A^m A$. Отсюда и название метода – метод последовательных приближений, или итерационный метод.

Решение системы линейных уравнений межотраслевого баланса осуществляется далее по формулам системы (7.13).

Использование итерационного метода при вычислении матрицы B и решение системы уравнений межотраслевого баланса позволяет наглядно проследить эффект мультипликации (распространения), т. е.

$$X = BY = (E_n + A + A^2 + \ldots + A^k + \ldots)\, Y,$$

отсюда YA есть результат первичного эффекта распространения; R^2Y – вторичного и т. д.

Рассмотрим еще один итерационный метод приближенного решения системы уравнений межотраслевого баланса (7.7) – метод Якоби.

Поскольку значения $x_1, x_2, ..., x_n$, а также коэффициенты прямых затрат неотрицательны, то неотрицательны и все слагаемые в правых частях уравнений (7.7). Тогда из уравнений этой системы следует, что наименьшие значения объемов валовой продукции $x_1, x_2, ..., x_n$ равны, соответственно, $y_1, y_2, ..., y_n$. Следовательно, за начальное (нулевое) приближение значений валовой продукции можно принять значения объемов готовой продукции, т. е. свободные члены уравнений (7.7), таким образом $x_1^{(0)} = y_1$, $x_2^{(0)} = y_2$, …, $x_n^{(0)} = y_n$.

В качестве следующего приближения (или первая итерация) значений объемов валовой продукции $x_1, x_2, ..., x_n$ принимаются те значения, которые получаются из уравнений системы (7.7), если в них в первых частях вместо $x_1, x_2, ..., x_n$ подставить значения, взятые в нулевой итерации, т. е. значения

$$\begin{cases} x_1^{(0)} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n + y_1, \\ x_2^{(1)} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n + y_n, \\ .... \\ x_n^{(1)} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + ... + a_{nn}y_n + y_n. \end{cases} \tag{7.15}$$

За следующие значения объемов валовой продукции (или вторая итерация) принимаются значения, получаемые из уравнений системы (7.7) подстановкой в них вместо $x_1, x_2, ..., x_n$ значений, полученных в первой итерации, и т. д. В качестве k итерации получим

$$\begin{cases} x_1^k = a_{11}x_1^{(k-1)} + a_{12}x_2^{(k-1)} + ... + a_{1n}x_n^{(k-1)}, \\ x_2^k = a_{21}x_1^{(k-1)} + a_{12}x_2^{(k-1)} + ... + a_{2n}x_n^{(k-1)}, \\ .... \\ x_n^k = a_{n1}x_1^{(k-1)} + a_{n2}x_2^{(k-1)} + ... + a_{nn}x_n^{(k-1)}. \end{cases} \tag{7.16}$$

Для каждого значения валовой продукции в результате этого итерационного процесса получим последовательность значений

$$\begin{cases} x_1^{(0)} = y_1, \ x_1^{(1)}, \ x_1^{(92)}, \ ..., \ x_1^{(k)}, \ ... \\ x_2^{(0)} = y_2, \ x_2^{(1)}, \ x_2^{(2)}, \ ..., \ x_2^k, \ ... \\ .... \\ x_n^{(0)} = y_n, \ x_n^{(1)}, \ x_n^{(2)}, \ x_n^k, \ ... \end{cases}$$

Из соображений о неотрицательности a_{ij}, y_i и x_i, получаемых в результате итерационного процесса, следует, что каждая их этих последовательностей приближенных значений валовой продукции монотонно возрастающая:

$$\begin{cases} y_1 = x_1^{(0)} < x_1^{(1)} < x_1^{(2)} ... < x_1^{(k)} < ... \\ y_2 = x_2^{(0)} < x_2^{(1)} < x_2^{(2)} ... < x_2^{(k)} < ... \\ .... \\ y_n = x_n^{(0)} < x_n^{(1)} < x_n^{(2)} ... < x_n^{(k)} < ... \end{cases} \tag{7.17}$$

Условием сходимости предлагаемого итерационного процесса выступает условие

$$\max\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j},\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j},\ \ldots,\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}\right) < 1, \tag{7.18}$$

т. е. максимальная сумма абсолютных величин коэффициентов по строкам системы (7.7) меньше единицы.

Существуют методы, позволяющие ускорить сходимость итерационного процесса. В частности, это метод Гаусса–Зейделя, который и рассмотрим далее. Этот метод состоит в следующем. На нулевой итерации в качестве приближенных значений объемов валовой продукции берут свободные члены уравнений системы (7.7):

$$x_1^{(0)} = y_1,\ x_2^{(0)} = y_2,\ \ldots,\ x_n^{(0)} = y_n.$$

Далее, на первой итерации $x_1^{(1)}$ получают точно также, как и ранее. Но при вычислении $x_2^{(1)}$ во второе уравнение системы (7.7) вместо x_1 подставляют не y_1, а только что найденное значение $x_1^{(1)}$ (как бы опережая события), вместо $x_2,\ \ldots,\ x_n$ – значения, принятые на нулевой итерации. При нахождении $x_3^{(1)}$ вместо x_1 и x_2 подставляют найденные значения $x_1^{(1)}$ и $x_2^{(1)}$, а вместо остальных значений объемов валовой продукции – принятые на нулевой итерации значения и т. д. При вычислении $x_n^{(1)}$ вместо $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1}$ поставляют уже вычисленные в этой итерации $x_1^{(1)},\ x_2^{(1)},\ \ldots,\ x_{n-1}$, только вместо x_n – значение $x_n^0 = y_n$:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = a_{11}x_1^{(0)} + a_{12}x_2^{(0)} + \ldots + a_{1n}x_n^{(0)}, \\ x_2^{(1)} = a_{21}x_1^{(1)} + a_{22}x_2^{(0)} + \ldots + a_{2n}x_n^{(0)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m^{(1)} = a_{n1}x_1^{(1)} + a_{n2}x_2^{(1)} + \ldots + a_{nn}x_n^{(0)}. \end{cases}$$

В общем случае, т. е. на k итерации, применяют следующие формулы для подсчета значений $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$:

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = a_{11}x_1^{(k-1)} + a_{12}x_2^{(k-1)} + \ldots + a_{1n}x_n^{(k-1)}, \\ x_2^{(k)} = a_{11}x_1^{(k)} + a_{22}x_2^{(k-1)} + \ldots + a_{2n}x_n^{(k-1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(k)} = a_{n1}x_1^{(k)} + a_{n2}x_2^{(k)} + \ldots + a_{nn}x_n^{(k-1)}. \end{cases}$$

При проведении итераций по этому методу сходимость значений $x_1^{(k)}$, $x_2^{(k)},\ \ldots,\ x_n^{(k)}$ к своим предельным значениям происходит, как правило, быстрее, чем при простом методе итераций.

Выше была рассмотрена центральная задача анализа межотраслевых связей, определение объемов валового выпуска отраслей. Теперь, рассматривая его по столбцам, исследуем ценовой аспект эффекта распределения и построим ценовую модель межотраслевых связей.

Рассмотрим модель равновесных цен. Столбец i стоимостного межотраслевого баланса может быть представлен в следующем виде:

$$x_{1i} + x_{2i} + \ldots + x_{ni} + k_j + \ell_j = x_i$$

или

$$x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{nj} + v_i = x_i,$$

где $v_j = k_j + \ell_j$.

Отсюда, используя выражения $x_{ji} = a_{ji}x_i$, $v_i = \upsilon_i x_i$, получаем $1 \cdot a_{1i} + 1 \cdot a_{2i} + \ldots + 1 \cdot a_{ni} + \upsilon_i = 1$, где υ_i – величина добавленной стоимости, приходящаяся на единицу продукции отрасли и называемая долей добавленной стоимости.

Отсюда цены P_1, P_2, ..., P_n будут определяться по формуле

$$P_i = \sum_{j=1}^{n} a_{j1} P_j + V_i. \tag{7.19}$$

В матричном представлении систему (7.19) можно переписать как

$$P = A'P + \upsilon, \tag{7.20}$$

где

$$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \ldots \\ P \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}; \quad \upsilon = \begin{bmatrix} \upsilon_1 \\ \upsilon_2 \\ \ldots \\ \upsilon_n \end{bmatrix}.$$

Матрица A' есть транспонированная матрица A, т. е. матрица, у которой взаимно переставлены местами столбцы и строки.

Решая уравнение (7.20) относительно P, получим

$$P = \left(E_n - A'\right)^{-1} \upsilon = \left[\left(E_n - A\right)^{-1}\right]' \upsilon = B'\upsilon. \tag{7.21}$$

Уравнения (7.19) и (7.20) называют моделью равновесных цен. Нетрудно установить взаимное соответствие этой модели и модели объемов выпуска, а именно:

– вектор объема выпуска $X \leftrightarrow$ вектор цен P;

– открытая матрица Леонтьева $B \leftrightarrow$ ценовой матричный мультипликатор (матричный мультипликатор ценового эффекта распространения) B';

– вектор конечного спроса (продукта) $Y \leftrightarrow$ вектор долей добавленной стоимости.

Имея в виду взаимное соответствие, модель объемов выпуска и ценовую модель называют двойственными. На основе уравнений (7.19), (7.20) и (7.21) можно выяснить, как посредством структуры потребляемых каждой отраслью ресурсов изменяется структура цен при варьировании величины добавленной стоимости. Оказывается, что эффект распространения ΔP, вызванный изменением доли добавленной стоимости на $\Delta\upsilon$, рассчитывается как

$$\Delta P = B'\Delta\upsilon. \qquad (7.22)$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 7.1

Пусть в некотором производстве используются четыре вида продуктов – A, B, C, D, причем для производства каждого продукта используются только три из имеющихся четырех продуктов, а в производстве каждого из этих продуктов не участвуют. Коэффициенты прямых затрат приведены в таблице для каждого варианта. Используя данные таблиц, составленных по вариантам, выполнить следующие задания.

Задание 1. Вычислить коэффициенты полных материальных затрат продукта B на производство единицы продукта A, учитывая при этом косвенные затраты только первых двух порядков.

Задание 2. Вычислить коэффициенты полных затрат: а) продукта A; б) продукта C; в) продукта D на производство единицы продукта A, учитывая при этом косвенные затраты только первых двух порядков.

Вариант 1 (А)

Затрачиваемый продукт	Выпускаемый продукт			
	A	*B*	*C*	*D*
A	0	0,1	0,3	0,4
B	0,2	0	0,4	0,1
C	0,5	0,1	0	0,3
D	0,1	0,6	0,2	0

Вариант 2 (Б)

Затрачиваемый продукт	Выпускаемый продукт			
	A	*B*	*C*	*D*
A	0	0,2	0,3	0,3
B	0,1	0	0,5	0,1
C	0,3	0,1	0	0,3
D	0,2	0,6	0,1	0

Вариант 3 (**В**)

Затрачиваемый продукт	Выпускаемый продукт			
	A	*B*	*C*	*D*
A	0	0,5	0,3	0,1
B	0,3	0	0,4	0,1
C	0,5	0,1	0	0,3
D	0,1	0,3	0,2	0

Вариант 4 (**Г**)

Затрачиваемый продукт	Выпускаемый продукт			
	A	*B*	*C*	*D*
A	0	0,4	0,2	0,3
B	0,1	0	0,4	0,4
C	0,5	0,1	0	0,2
D	0,1	0,3	0,2	0

Варианты 5 (**Д**)

Затрачиваемый продукт	Выпускаемый продукт			
	A	*B*	*C*	*D*
A	0	0,6	0,1	0,1
B	0,2	0	0,4	0,1
C	0,5	0,2	0	0,2
D	0,1	0,1	0,4	0

Варианты 6 (**Е, Ё**)

Затрачиваемый продукт	Выпускаемый продукт			
	A	*B*	*C*	*D*
A	0	0,4	0,1	0,1
B	0,2	0	0,3	0,1
C	0,5	0,2	0	0,1
D	0,1	0,1	0,4	0

Вариант 7, 8 (**Ж, З**)

Затрачиваемый продукт	Выпускаемый продукт			
	A	*B*	*C*	*D*
A	0	0,4	0,1	0,2
B	0,2	0	0,4	0,1
C	0,4	0,3	0	0,2
D	0,1	0,1	0,4	0

Вариант 9 (**И**)

Затрачиваемый продукт	Выпускаемый продукт			
	A	*B*	*C*	*D*
A	0	0,6	0,1	0,1
B	0,2	0	0,4	0,1
C	0,5	0,1	0	0,3
D	0,1	0,2	0,4	0

Вариант 10 (**К**)

Затрачиваемый продукт	Выпускаемый продукт			
	A	*B*	*C*	*D*
A	0	0,6	0,1	0,1
B	0,4	0	0,4	0,1
C	0,55	0,1	0	0,25
D	0,1	0,1	0,4	0

Задача 7.2

Экономика разделена на три отрасли: промышленность, сельское хозяйство и прочие отрасли. На плановый период заданы коэффициенты прямых затрат и конечная продукция отраслей. Используя данные нижеприведенных таблиц, выполнить по вариантам следующие задания.

Задание 1. Рассчитать плановые объемы валовой продукции, межотраслевые поставки, чистую продукцию отраслей.

Задание 2. Составить систему уравнений межотраслевого баланса и решить эту систему итерационным методом и методом Зейделя.

Вариант 11 (**Л**)

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			
	Промышленность	Сельское хозяйство	Прочие отрасли	Конечная продукция
Промышленность	0,4	0,35	0,15	62
Сельское хозяйство	0,15	0,12	0,03	30
Прочие отрасли	0,2	0,08	0,07	11

Вариант 12,13 (**М, Н**)

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			
	Промышленность	Сельское хозяйство	Прочие отрасли	Конечная продукция
Промышленность	0,33	0,2	0,26	38
Сельское хозяйство	0,18	0,12	0,04	32
Прочие отрасли	0,13	0,09	0,1	13

Вариант 14, 15 (**О, П**)

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			
	Промышленность	Сельское хозяйство	Прочие отрасли	Конечная продукция
Промышленность	0,23	0,5	0,2	78
Сельское хозяйство	0,16	0,02	0,3	22
Прочие отрасли	0,2	0,05	0,3	32

Вариант 16, 17 (**Р, С**)

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			
	Промышленность	Сельское хозяйство	Прочие отрасли	Конечная продукция
Промышленность	0,4	0,2	0,2	39
Сельское хозяйство	0,15	0,2	0,3	33
Прочие отрасли	0,13	0,4	0,07	25

Вариант 18, 19 (**Т, У**)

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			
	Промышленность	Сельское хозяйство	Прочие отрасли	Конечная продукция
Промышленность	0,36	0,28	0,24	57
Сельское хозяйство	0,5	0,12	0,07	31
Прочие отрасли	0,19	0,04	0, 1	15

Вариант 20, 21 (**Ф, Х**)

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			
	Промышленность	Сельское хозяйство	Прочие отрасли	Конечная продукция
Промышленность	0,36	0,2	0,24	64
Сельское хозяйство	0,05	0,12	0,7	29
Прочие отрасли	0,19	0,04	0,1	17

Вариант 22–26 (**Ц, Ч, Ш, Щ, Э, Ю, Я**)

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			
	Промышленность	Сельское хозяйство	Прочие отрасли	Конечная продукция
Промышленность	0,3	0,2	0,25	62
Сельское хозяйство	0,5	0,12	0,07	43
Прочие отрасли	0,19	0,4	0,05	26

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Баусов, Л. И. Нелинейное программирование / Л. И. Баусов. – М. : Финансовая академия, 1996.

2. Воробьев, Н. Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков / Н. Н. Воробьев. – М. : Наука, 1985.

3. Глухов, В. В. Математические методы и модели для менеджмента / В. В. Глухов, М. Д. Медников, С. Б. Коробко. – СПб. : Лань, 2000.

4. Лабскер, Л. Г. Математическое моделирование финансово-экономических ситуаций с применением компьютера (на основе марковских случайных процессов) / Л. Г. Лабскер, В. П. Михайлова, Р. А. Серегин. – М. : Финансовая академия, 1997.

5. Ларионов, А. И. Экономико-матаматические методы в планировании : учебник для сред. спец. учеб. заведений / А. И. Ларионов, Т. И. Юрченко, А. Л. Новоселов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Высш. шк., 1991.

6. Математические методы принятия решений в экономике : учебник / под ред. проф. В. А. Колемаева. – М.:ЗАО «Финстатинформ», 1999.

7. Карасев, А. И. Математические методы и модели в планировании : учеб. пособие для эконом. вузов / А. И. Карасев, Н. Ш. Кремер, Т. И. Савельева ; под. ред. А. И. Карасева. – М. : Экономика, 1987.

8. Большаков, А. С. Моделирование в менеджменте : учеб. пособие / А. С. Большаков. – М. : Филинъ, 2000.

9. Справочник по математике для экономистов / под ред. В. И. Ермаковой. – М. : Высш. шк., 1987.

Учебно-методическое издание

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

Методические указания к выполнению контрольной работы для студентов всех экономических специальностей и направлений заочной формы обучения

Составители:
Ерыгин Юрий Владимирович
Алексеева Евгения Юрьевна
Герасимова Валерия Евгеньевна

Редактор *О. А. Плехова*
Оригинал-макет и верстка *И. Д. Бочаровой*

Подписано в печать 04.05.2011. Формат 60×84/16. Бумага офсетная.
Печать плоская. Усл. печ. л. 4,0. Уч.-изд. л. 5,0. Тираж 50 экз.
Заказ 183 . С 496.

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 24.49.04.953.П.000032.01.03. от 29.01.2003 г.

Редакционно-издательский отдел Сиб. гос. аэрокосмич. ун-та.
Отпечатано в отделе копировально-множительной техники
Сиб. гос. аэрокосмич. ун-та.
660014, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский рабочий», 31.