

13. Из набора (в условиях задачи 10) наудачу извлекается $m = 5$ шаров (без возвращения). (7 белого цвета, 4 шара синего и 6 шаров красного цвета). Пусть ξ число вынутых красных шаров, а η – число вынутых белых шаров.

Найдите:

а) Совместное распределение случайных величин ξ и η (ряд распределения).

ξ может принимать значение от 0 до 5, η может принимать значение от 0 до 5. Всего 17 шаров, извлекаем 5.

$$P(\xi = k, \eta = m) = \frac{C_6^k C_7^m C_4^{5-k-m}}{C_{17}^5}; C_{17}^5 = \frac{17!}{5! 12!} = 6188$$

Число способов $C_6^k C_7^m C_4^{5-k-m}$:

$k \setminus m$	0	1	2	3	4	5
0		7	84	210	140	21
1	6	168	756	840	210	
2	60	630	1260	525		
3	120	560	420			
4	60	105				
5	6					

Совместное распределение случайных величин ξ и η

$\xi \setminus \eta$	0	1	2	3	4	5	Сумма
0		0,001131	0,013575	0,033937	0,022624	0,003394	0,074661
1	0,00097	0,027149	0,122172	0,135747	0,033937		0,319974
2	0,009696	0,10181	0,20362	0,084842			0,399968
3	0,019392	0,090498	0,067873				0,177763
4	0,009696	0,016968					0,026665
5	0,00097						0,00097
Сумма	0,040724	0,237557	0,40724	0,254525	0,056561	0,003394	1

б) Ряды распределения случайных величин ξ и η .

ξ	0	1	2	3	4	5
$P(\xi)$	0,074661	0,319974	0,399968	0,177763	0,026665	0,000970

η	0	1	2	3	4	5
$P(\eta)$	0,040724	0,237557	0,40724	0,254525	0,056561	0,003394

в) Условные распределения случайной величины ξ при условии η , случайной величины η при условии ξ , проверить случайные величины на независимость

Условные распределения:

$$P(\xi = k|\eta = m) = \frac{P(\xi = k, \eta = m)}{P(\eta = m)}$$

Условный закон распределения $P(\xi = k|\eta = 0)$:

ξ	P
1	1/42
2	5/21
3	10/21
4	5/21
5	1/42
Сумма	1

Условный закон распределения $P(\xi = k|\eta = 1)$:

ξ	P
0	1/210
1	4/35
2	3/7
3	8/21
4	1/14
Сумма	1

Условный закон распределения $P(\xi = k|\eta = 2)$:

ξ	P
0	1/30
1	3/10
2	1/2
3	1/6
Сумма	1

Условный закон распределения $P(\xi = k|\eta = 3)$:

ξ	P
0	2/15
1	8/15
2	1/3
Сумма	1

Условный закон распределения $P(\xi = k|\eta = 4)$:

ξ	P
0	2/5
1	3/5
Сумма	1

Условный закон распределения $P(\xi = 0|\eta = 5) = 1$.

$$P(\eta = m|\xi = k) = \frac{P(\xi = k, \eta = m)}{P(\xi = k)}$$

Условный закон распределения $P(\eta = m|\xi = 0)$:

η	1	2	3	4	5	Сумма
P	1/66	2/11	5/11	10/33	1/22	1

Условный закон распределения $P(\eta = m|\xi = 1)$:

η	0	1	2	3	4	Сумма
P	1/330	14/165	21/55	14/33	7/66	1

Условный закон распределения $P(\eta = m|\xi = 2)$:

η	0	1	2	3	Сумма
P	4/165	14/55	28/55	7/33	1

Условный закон распределения $P(\eta = m|\xi = 3)$:

η	0	1	2	Сумма
P	6/55	28/55	21/55	1

Условный закон распределения $P(\eta = m|\xi = 4)$:

η	0	1	Сумма
P	4/11	7/11	1

Условный закон распределения $P(\eta = m|\xi = 5) = 1$

Для независимых случайных величин

$$P(\xi = x, \eta = y) = P(\xi = x)P(\eta = y)$$

Например

$$P(\xi = 0, \eta = 0) = 0$$

$$P(\xi = 0)P(\eta = 0) = 0,074661 \cdot 0,040724 \neq 0$$

Равенство

$$P(\xi = 0, \eta = 0) = P(\xi = 0)P(\eta = 0) - \text{неверно}$$

Следовательно, ξ и η зависимы.

г) Значения двумерной функции распределения $F_{\xi\eta}(x, y)$ в заданных точках $(x, y) = (8; 4), (3; 7), (3; 2)$,

$$F_{\xi\eta}(8, 4) = P(\xi < 8, \eta < 4) = P(\eta < 4) = \frac{5817}{6188}$$

$$F_{\xi\eta}(3, 7) = P(\xi < 3) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2) = \frac{4917}{6188}$$

$$F_{\xi\eta}(3, 2) = P(\xi < 3, \eta < 2) = \frac{7 + 6 + 168 + 60 + 630}{6188} = \frac{871}{6188}$$

д) Ряд распределения новой случайной величины $\mu = \sin \frac{\pi\xi}{2} + \cos \pi\eta$

Составим таблицу значений случайной величины μ :

$\xi \setminus \eta$	0	1	2	3	4	5
0		-1	1	-1	1	-1
1	2	0	2	0	2	
2	1	-1	1	-1		
3	0	-2	0			
4	1	-1				
5	2					

Далее определяем соответствующие вероятности, складывая вероятности при одинаковых значениях μ :

μ	-2	-1	0	1	2
$P(\mu)$	20/221	107/442	1/4	197/760	55/348

е) Ряд распределения новой двумерной дискретной случайной величины $(\mu_1; \mu_2)$

$$\mu_1 = 2\xi - 3\eta, \mu_2 = \eta - 2\xi$$

Составим таблицу значений случайной величины μ_1 :

$\xi \setminus \eta$	0	1	2	3	4	5
0		-3	-6	-9	-12	-15
1	2	-1	-4	-7	-10	
2	4	1	-2	-5		
3	6	3	0			
4	8	5				
5	10					

Далее определяем соответствующие вероятности, складывая вероятности при одинаковых значениях μ :

μ_1	-15	-12	-10	-9	-7	-6	-5	-4	-3
$P(\mu)$	0,003393665	0,022624	0,033937	0,033937	0,135747	0,013575	0,084842	0,122172	0,001131
μ_1	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$P(\mu)$	0,20362	0,027149	0,067873	0,10181	0,00097	0,090498	0,009696	0,016968	0,019392
μ_1	8	10							
$P(\mu)$	0,009696	0,00097							

Составим таблицу значений случайной величины μ_2 :

$\xi \setminus \eta$	0	1	2	3	4	5
0		1	2	3	4	5
1	-2	-1	0	1	2	
2	-4	-3	-2	-1		
3	-6	-5	-4			
4	-8	-7				
5	-10					

Далее определяем соответствующие вероятности, складывая вероятности при одинаковых значениях μ :

μ_2	-10	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1
$P(\mu)$	0,000969619	0,009696	0,016968	0,013575	0,084842	0,077569	0,10181	0,20459	0,111991
μ_2	0	1	2	3	4	5			
$P(\mu)$	0,122172	0,136878	0,047511	0,033937	0,022624	0,003394			

Совместное распределение случайных величин μ_1 и μ_2

$\mu_1 \setminus \mu_2$	-10	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2
-15								
-12								
-10								
-9								
-7								
-6								
-5								
-4								
-3								
-2								0,20362
-1								
0						0,067873		
1							0,10181	
2								0,00097
3					0,090498			
4						0,009696		
5			0,016968					
6				0,019392				
8		0,009696						
10	0,00097							

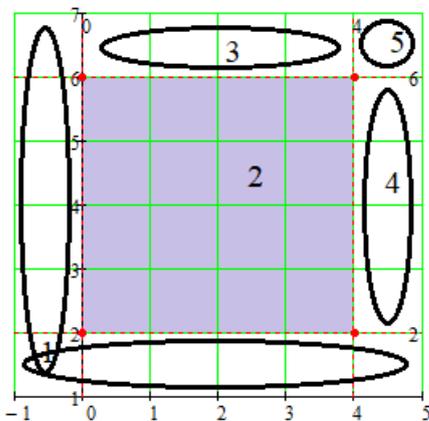
Продолжение таблицы справа:

$\mu_1 \setminus \mu_2$	-1	0	1	2	3	4	5
-15							0,003394
-12						0,022624	
-10				0,033937			
-9					0,033937		
-7			0,135747				
-6				0,013575			
-5	0,084842						
-4		0,122172					
-3			0,001131				
-2							
-1	0,027149						
0							
1							
2							
3							
4							
5							
6							
8							
10							

14. В четырехугольник с вершинами в точках $(0; 2), (0; 6), (4; 2), (4; 6)$ в соответствии с принципом геометрической вероятности падает частица. Пусть ξ и η - координаты по оси X и Y точки падения частицы.

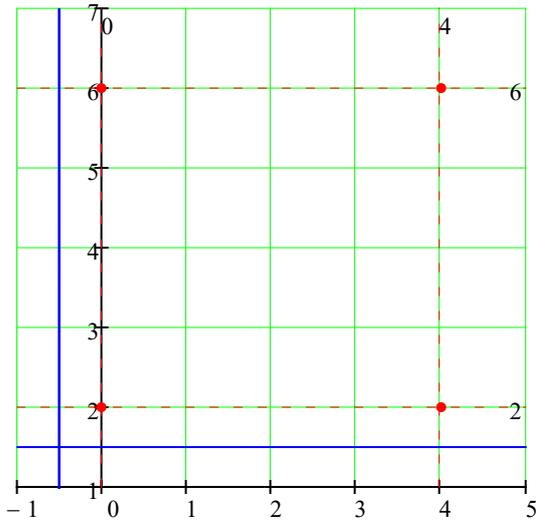
Найдите:

а) Совместную функцию распределения $F_{\xi\eta}(x, y)$ случайной величины (ξ, η) и совместную плотность распределения случайной величины (ξ, η) .



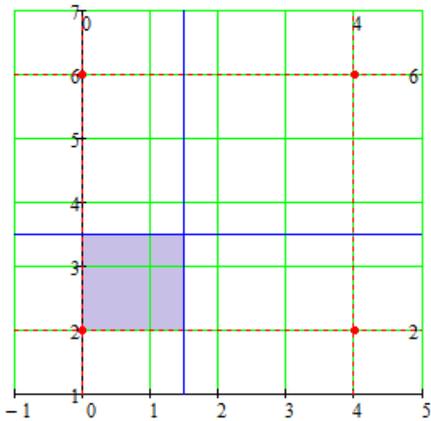
Всего имеем 5 различных областей.

Область 1: $(x < 0)$ или $(y < 2)$:



Пересечения с четырёхугольником нет, $F_{\xi\eta}(x, y) = 0$.

Область 2: $(x, y) \in D$:

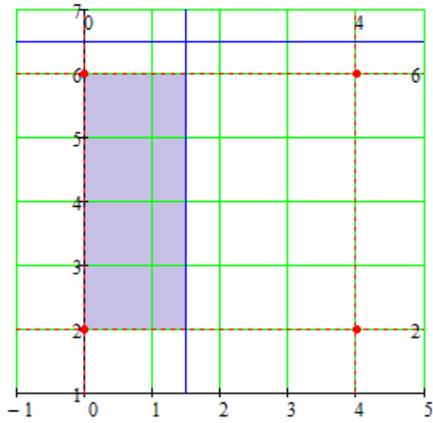


$$F_{\xi\eta}(x, y) = \frac{1}{S_D} \int_0^x \int_2^y dx dy$$

$S_D = 16$ – площадь области.

$$F_{\xi\eta}(x, y) = \frac{1}{16} \int_0^x dx \int_2^y dy = \frac{x(y-2)}{16}.$$

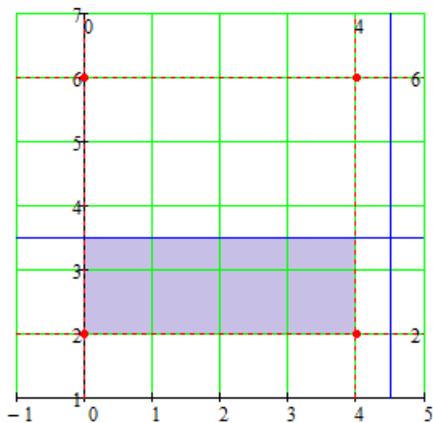
Область 3: $(0 < x \leq 4)$ и $(y > 6)$:



$$F_{\xi\eta}(x, y) = \frac{1}{S_D} \int_0^x \int_2^6 dx dy$$

$$F_{\xi\eta}(x, y) = \frac{1}{16} \int_0^x dx \int_2^6 dy = \frac{x}{4}.$$

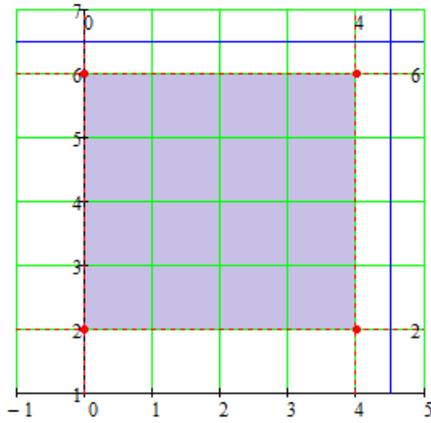
Область 4: $(x > 4)$ и $(2 < y \leq 6)$:



$$F_{\xi\eta}(x, y) = \frac{1}{S_D} \int_0^4 \int_2^y dx dy$$

$$F_{\xi\eta}(x, y) = \frac{1}{16} \int_0^4 dx \int_2^y dy = \frac{y-2}{4}.$$

Область 5: $(x > 4)$ и $(y > 6)$:



$$F_{\xi\eta}(x, y) = \frac{1}{S_D} \int_0^4 \int_2^6 dx dy = \frac{1}{16} \int_0^4 \int_2^6 dx dy = 1.$$

$$F_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} 0, & (x < 0) \text{ или } (y < 2) \\ \frac{x(y-2)}{16}, & (x, y) \in D \\ \frac{x}{4}, & (0 < x \leq 4) \text{ и } (y > 6) \\ \frac{y-2}{4}, & (x > 4) \text{ и } (2 < y \leq 6) \\ 1, & (x > 4) \text{ и } (y > 6) \end{cases}$$

Поскольку площадь четырёхугольника D равна 16, и точки распределены в соответствии с принципом геометрической вероятности то совместная плотность распределения имеет равномерное распределение внутри D :

$$p_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{16}, & (x, y) \in D. \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases}$$

б) Одномерные плотности и функции распределения случайных величин ξ и η .

$$p_{\xi}(x) = \int_2^6 p_{\xi\eta}(x, y) dy = \frac{1}{16} \int_2^6 1 dy = \frac{1}{4}$$

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & x \in [0; 4] \\ 0, & x \notin [0; 4] \end{cases}$$

$$F_{\xi}(x) = \int_0^x p_{\xi}(x) dx = \frac{x}{4}, \quad 0 < x \leq 4$$

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x}{4}, & 0 < x \leq 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$

$$p_{\eta}(y) = \int_0^4 p_{\xi\eta}(x, y) dx = \frac{1}{16} \int_0^4 1 dy = \frac{1}{4}$$

$$p_{\eta}(y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & y \in [2; 6] \\ 0, & y \notin [2; 6] \end{cases}$$

$$F_{\eta}(y) = \int_2^y p_{\eta}(y) dy = \frac{y-2}{4}, 2 < y \leq 6$$

$$F_{\eta}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 2 \\ \frac{y-2}{4}, & 2 < y \leq 6 \\ 1, & y > 6 \end{cases}$$

в) Условные функции распределения и условные плотности распределения случайной величины ξ при условии η , и случайной величины η при условии ξ . Проверьте, будут ли эти случайные величины независимыми

Условная плотность распределения

$$p_{\xi}(x|y) = \frac{p_{\xi\eta}(x, y)}{p_{\eta}(y)} = \frac{1}{4} \text{ при } (x, y) \in D$$

Условная плотность распределения

$$p_{\eta}(y|x) = \frac{p_{\xi\eta}(x, y)}{p_{\xi}(x)} = \frac{1}{4} \text{ при } (x, y) \in D$$

Для независимых случайных величин должно выполняться равенство:

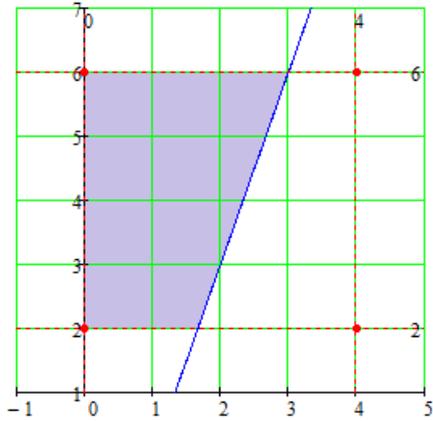
$$p_{\xi}(x|y) = p_{\xi}(x) \text{ – верно}$$

Следовательно, случайные величины независимы. Условные функции распределения совпадают с одномерными:

$$F_{\xi}(x|y) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x}{4}, & 0 < x \leq 4; \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$

$$F_{\eta}(y|x) = \begin{cases} 0, & y \leq 2 \\ \frac{y-2}{4}, & 2 < y \leq 6 \\ 1, & y > 6 \end{cases}$$

г) Значение функции распределения случайной величины $\mu = 3\xi - \eta$ в точке $z = 3$.



$$3x - 3 = 2, x = \frac{5}{3}$$

$$F_{\mu}(3) = P(3\xi - \eta < 3) = P(\eta > 3\xi - 3) = \frac{S_D}{S} = \frac{\frac{5/3 + 3}{2} \cdot 4}{16} = \frac{7}{12}$$

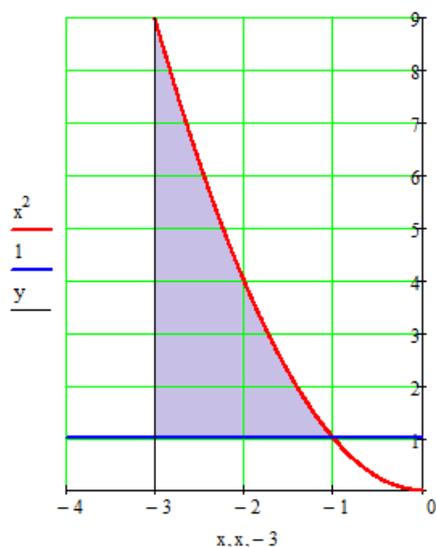
15. Совместная плотность распределения случайных величин ξ и η задана формулой

$$p_{\xi\eta}(x, y) = C(2x^2 + 3y), (x, y) \in D,$$

где область D задана в варианте. Найдите:

$$D = \{(x; y): x = -3, y = 1, y = x^2\}$$

а) Постоянную C .

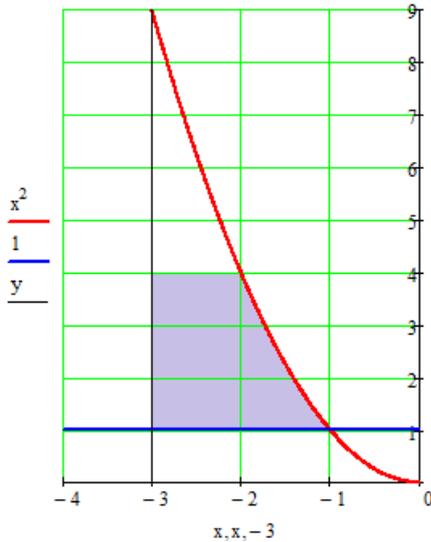


По закону нормировки

$$\iint_D p_{\xi\eta}(x, y) dx dy = 1,$$

$$\begin{aligned} \int_{-3}^{-1} dx \int_1^{x^2} C(2x^2 + 3y) dy &= C \int_{-3}^{-1} \left(2x^2 y + \frac{3y^2}{2} \right) \Big|_1^{x^2} dx = \\ &= C \int_{-3}^{-1} \left(\frac{7x^4}{2} - 2x^2 - \frac{3}{2} \right) dx = C \left(\frac{7x^5}{10} - \frac{2x^3}{3} - \frac{3x}{2} \right) \Big|_{-3}^{-1} = \frac{2236}{15} C \\ C &= \frac{15}{2236} \end{aligned}$$

б) Значения двумерной функции распределения $F_{\xi\eta}(x, y)$ в заданных точках $(x, y) = (0; 4)$



$$\begin{aligned}
 F_{\xi\eta}(0,4) &= P(\xi < 0, \eta < 4) = P(\eta < 4) = \int_1^4 dy \int_{-3}^{-\sqrt{y}} p_{\xi\eta}(x, y) dx = \\
 &= \frac{15}{2236} \int_1^4 dy \int_{-3}^{-\sqrt{y}} (2x^2 + 3y) dx = \frac{15}{2236} \int_1^4 \left(\frac{2x^3}{3} + 3yx \right) \Big|_{-3}^{-\sqrt{y}} dy = \\
 &= \frac{15}{2236} \int_1^4 \left(9y - \frac{11y^{3/2}}{3} + 18 \right) dy = \frac{15}{2236} \left(\frac{9y^2}{2} - \frac{22y^{5/2}}{15} + 18y \right) \Big|_1^4 = \\
 &\approx 0.5101
 \end{aligned}$$

в) Одномерные плотности и функции распределения случайных величин ξ и η .

$$\begin{aligned}
 p_{\xi}(x) &= \int_1^{x^2} p_{\xi\eta}(x, y) dy = \frac{15}{2236} \int_2^{x^2} (2x^2 + 3y) dy = \frac{15}{2236} \left(2x^2 y + \frac{3y^2}{2} \right) \Big|_2^{x^2} = \\
 &= \frac{15(7x^4 - 4x^2 - 3)}{4472} \\
 p_{\xi}(x) &= \begin{cases} \frac{15(7x^4 - 4x^2 - 3)}{4472}, & x \in [-3; -1] \\ 0, & x \notin [-3; -1] \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{\xi}(x) &= \frac{15}{4472} \int_{-3}^x (7x^4 - 4x^2 - 3) dx = \frac{15}{4472} \left(\frac{7x^5}{5} - \frac{4x^3}{3} - 3x \right) \Big|_{-3}^x = \\
 &= \frac{21x^5 - 20x^3 - 45x + 4428}{4472}
 \end{aligned}$$

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -3 \\ \frac{21x^5 - 20x^3 - 45x + 4428}{4472}, & -3 < x \leq -1 \\ 1, & x > -1 \end{cases}$$

$$y = x^2 \Rightarrow x = -\sqrt{y}$$

$$p_{\eta}(y) = \int_{-3}^{-\sqrt{y}} p_{\xi\eta}(x, y) dx = \frac{15}{2236} \int_{-3}^{-\sqrt{y}} (2x^2 + 3y) dx = \frac{15}{2236} \left(\frac{2x^3}{3} + 3yx \right) \Big|_{-3}^{-\sqrt{y}} =$$

$$= \frac{5(27y - 11y^{3/2} + 54)}{2236}$$

$$p_{\eta}(y) = \begin{cases} \frac{5(27y - 11y^{3/2} + 54)}{2236}, & y \in [1; 9] \\ 0, & y \notin [1; 9] \end{cases}$$

$$F_{\eta}(y) = \int_1^y p_{\eta}(y) dy = \int_1^y \frac{5(27y - 11y^{3/2} + 54)}{2236} dy =$$

$$= \frac{5}{2236} \left(\frac{27y^2}{2} - \frac{22y^{5/2}}{5} + 54y \right) \Big|_1^y = \frac{540y + 135y^2 - 44y^{5/2} - 631}{4472}$$

$$F_{\eta}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 1 \\ \frac{540y + 135y^2 - 44y^{5/2} - 631}{4472}, & 1 < y \leq 9 \\ 1, & y > 9 \end{cases}$$

г) Условные функции распределения и условные плотности распределения случайной величины ξ при условии η , и случайной величины η при условии ξ . Проверьте, будут ли эти случайные величины независимыми

Условная плотность распределения

$$p_{\xi}(x|y) = \frac{p_{\xi\eta}(x, y)}{p_{\eta}(y)}$$

$$p_{\xi}(x|y) = \frac{\frac{15}{2236}(2x^2 + 3y)}{\frac{5(27y - 11y^{3/2} + 54)}{2236}} = \frac{3(2x^2 + 3y)}{(27y - 11y^{3/2} + 54)} \text{ при } (x, y) \in D$$

Условная плотность распределения

$$p_{\eta}(y|x) = \frac{p_{\xi\eta}(x, y)}{p_{\xi}(x)}$$

$$p_{\eta}(y|x) = \frac{\frac{15}{2236}(2x^2 + 3y)}{15(7x^4 - 4x^2 - 3)} = \frac{2(2x^2 + 3y)}{7x^4 - 4x^2 - 3} \text{ при } (x, y) \in D$$

Для независимых случайных величин должно выполняться равенство:

$$p_{\xi}(x|y) = p_{\xi}(x) \text{ — неверно}$$

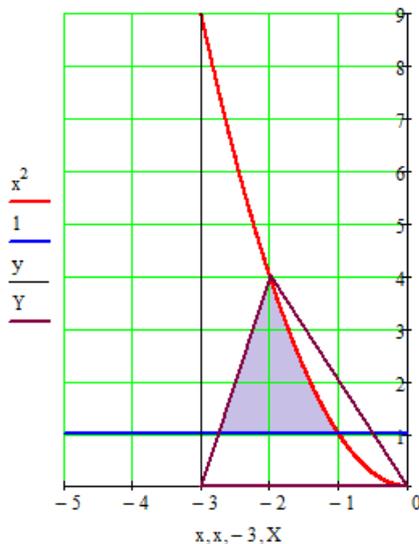
Следовательно, случайные величины зависимы

$$F_{\xi}(x|y) = \frac{3}{(27y - 11y^{3/2} + 54)} \int_{-3}^x (2x^2 + 3y) dx = \frac{3 \left(\frac{2x^3}{3} + 3yx \right) \Big|_{-3}^x}{27y - 11y^{3/2} + 54} =$$

$$= \frac{2x^3 + 9yx + 27y + 54}{27y - 11y^{3/2} + 54} \text{ при } (x, y) \in D$$

$$F_{\eta}(y|x) = \int_1^y \frac{2(2x^2 + 3y)}{7x^4 - 4x^2 - 3} dy = \frac{2 \left(2x^2y + \frac{3y^2}{2} \right) \Big|_1^y}{7x^4 - 4x^2 - 3} = \frac{4x^2y - 4x^2 + 3y^2 - 3}{7x^4 - 4x^2 - 3} \text{ при } (x, y) \in D$$

д) Вычислите вероятность попадания вектора (ξ, η) в треугольник с вершинами в точках $(-3; 0)$, $(-2; 4)$, $(0; 0)$. (Записать интеграл, расставить пределы интегрирования, считать интеграл - не надо)



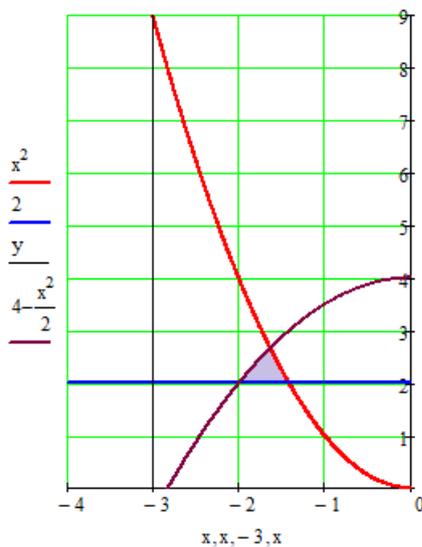
Сторона треугольника:

$$(-3; 0), (-2; 4): y = 4x + 12, x = \frac{y}{4} - 3$$

$$P = \frac{15}{2236} \int_1^4 dy \int_{\frac{y}{4}-3}^{-\sqrt{y}} (2x^2 + 3y) dx$$

е) Значение функции распределения $F_\mu(z)$ новой случайной величины $\mu = \xi^2 + 2\eta$ в точке $z = 8$. (Записать интеграл, расставить пределы интегрирования, считать интеграл - не надо)

$$F_\mu(8) = P(\xi^2 + 2\eta < 8) = P\left(\eta < 4 - \frac{\xi^2}{2}\right)$$



Пересечение параболы и прямой:

$$4 - \frac{x^2}{2} = x^2 \Rightarrow x = -\frac{2\sqrt{6}}{3} \approx -1.464, y = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$$

$$y = 4 - \frac{x^2}{2} \Rightarrow x = -\sqrt{8 - 2y}$$

$$F_\mu(8) = \frac{15}{2236} \int_2^{2\frac{2}{3}} dy \int_2^{-\sqrt{8-2y}} (2x^2 + 3y) dx$$