

МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Ярославский государственный технический университет
Кафедра физики

Рекомендовано советом
Машиностроительного
факультета

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ МАТЕРИАЛА

Методические указания к лабораторной работе №1

УДК 53 (076.5)

МУ . Определение плотности материала. Методические указания к лабораторной работе №1./ Сост. А.В. Романюк, В.Ф. Бабанин, А.А. Залуцкий. – Ярославль, 1999, 8 с.

Рассмотрена методика проведения физического эксперимента и обработки его результатов на примере определения плотности материала цилиндра.

Методические указания предназначены для студентов 1-2 курсов всех специальностей.

Рецензенты: кафедра физики Ярославского государственного технического университета; Алексеев В.П., к.ф.-м.н., доцент, зав. Кафедрой общей и экспериментальной физики Ярославского государственного университета им. Демидова.

II. Правила вычисления (округления) погрешностей.

Погрешность обычно выражают одной значащей цифрой и лишь при особо ответственных измерениях - двумя. Погрешности измерения указывают, какие цифры являются сомнительными в числовом значении измеренной величины. Так как точность определения физической величины определяется измерением, а не вычислением, то **округление числового значения результата измерения производится до цифры того же порядка, что значение погрешности.**

При этом нужно помнить следующие правила:

1. Лишние цифры у целых чисел заменяются нулями, а у десятичных дробей отбрасываются.

ПРИМЕР:

$$X = 123357 \pm 678 \text{ (до округления)}$$

$$X = 123400 \pm 700 \text{ (после округления)}$$

2. Если заменяемая нулём или отбрасываемая цифра старшего разряда меньше 5, то остающиеся цифры не изменяются, а если указанная цифра больше 5, то последняя остающаяся цифра увеличивается на единицу.

ПРИМЕР:

$$X = 237,46 \pm 0,18 \text{ (до округления)}$$

$$X = 237,5 \pm 0,2 \text{ (после округления)}$$

3. Если заменяемая нулём или отбрасываемая цифра равна 5 (с последующими нулями), то округление производится так: последняя цифра в округлённом числе остаётся без изменения, если она чётная, и увеличивается на единицу, если она нечётная.

ПРИМЕР:

$$X = 237,465 \pm 0,227 \text{ (до округления)}$$

$$X = 237,46 \pm 0,23 \text{ (после округления)}$$

$$X = 237,5 \pm 0,2 \text{ (после округления)}$$

Замечание. Если при округлении погрешности до одной значащей цифры она равна единице, то точность указания погрешности одной цифрой окажется недостаточной (разница между 1 и 2 составляет уже 100 %) - в этом случае следует привести и вторую цифру, округлив её до 0 или 5.

ДОПОЛНЕНИЕ

I. Математические операции с приближёнными числами.

Проводя расчеты с помощью микрокалькуляторов, следует помнить, что нецелесообразно списывать с табло все цифры, высвечиваемые на нем. На самом деле число необходимых цифр, зависит от погрешности эксперимента, которая минимально равна приборной погрешности. Оценить приборную погрешность нетрудно, поэтому вы заранее можете представить, какой минимальной величиной будет определяться ошибка эксперимента.

Таким образом, в записываемом Вами числе составляющие его цифры могут быть **верными**, **сомнительными**, либо **неверными**. Цифра верна, если абсолютная погрешность меньше единицы разряда этой цифры (слева от нее цифры также будут верными). Сомнительной называют цифру, стоящую справа от верной цифры, а цифры справа от сомнительной - неверные.

Значащими цифрами называются все цифры, кроме нуля, а также и нуль в двух случаях: 1) когда он стоит между значащими цифрами: 2) когда он стоит в конце числа и когда известно, что единиц соответствующего разряда в данном числе не имеется.

Пример: в числе 0,0105 первые два нуля слева незначащие (порядковые), а нуль между 1 и 5 значащий. Число 5000 означает, что при измерениях мы учитываем не только сотни и десятки, но и единицы. Если мы хотим учесть только тысячи, тогда то же число должно быть изображено в виде $5 \cdot 10^3$. Число 3,20 означает, что при измерениях учитывались сотые доли, а в числе 3,2 - только десятые. При действии с приближенными числами нужно соблюдать следующее правило:

- ✓ При операциях сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень, логарифмирования при записи результата оставляют столько значащих разрядов цифр, сколько их у того числа, у которого сомнительный разряд старший.

Пример: $981,17 - 0,314 = 308,08$

Замечание. При вычислении промежуточных результатов следует брать на одну значащую цифру больше, чем указано в правилах округления.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ МАТЕРИАЛА

Цель работы: ознакомиться с общей методикой выполнения лабораторных работ, приобрести навыки записи и статистической обработки экспериментальных результатов на примере определения плотности материала цилиндра.

Измерительные приборы: *штангенциркуль, микрометр, весы.*

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ

1. Методика обработки результатов измерений.

Основная цель физического эксперимента – определение достоверного интервала значений ($x \pm \Delta x$) некоторой измеряемой величины x . В зависимости от способа достижения цели измерения принято разделять на прямые и косвенные. В прямых измерениях величину x определяют непосредственно, снимая показания с предназначенного для этого прибора (например, весы для измерения массы, линейка для измерения длины и т.п.). Полуширина достоверного интервала Δx (ее называют абсолютной ошибкой) зависит от погрешности $\Delta x_{пр}$, задаваемой измерительным прибором, и случайной погрешности $\Delta x_{сл}$, связанной с условиями проведения эксперимента:

$$\Delta x = \sqrt{x_{пр}^2 + x_{сл}^2}.$$

В косвенных измерениях для нахождения величины y используется ее функциональная зависимость $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ от m величин $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, измеряемых непосредственно. В таких измерениях полуширина достоверного интервала Δy зависит от абсолютных ошибок Δx_i прямых измерений величин $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$:

$$\Delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \Delta x_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_m} \Delta x_m\right)^2} = \sqrt{\sum \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta x_i\right)^2}$$

1.1. Методика нахождения достоверного интервала в прямых измерениях.

- ✓ Производим n измерений (обычно от 3 до 5) величины x . Получаем набор значений $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

- ✓ Определяем среднее значение $\langle x \rangle = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$.

- ✓ Определяем величину отклонения каждого из найденных значений x_i от среднего:

$$\Delta x_i = |\langle x \rangle - x_i|.$$

Всего получаем n таких отклонений.

- ✓ Определяем среднее квадратичное по найденным отклонениям:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum \Delta x_i^2}{n(n-1)}}$$

✓ Определяем случайную погрешность измерения:

$$\Delta x_{сл} = \sigma_x \cdot t(n, \alpha),$$

где $t(n, \alpha)$ – коэффициент Стьюдента, зависящий от числа проведенных измерений n и коэффициента доверия α .

Примечание. В лабораториях кафедры физики принято величину α выбирать равной 0,9. Для такого значения коэффициента доверия коэффициент Стьюдента в зависимости от числа опытов будет равен:

n	3	4	5
t(n,α)	2,9	2,4	2,1

✓ Определяем абсолютную погрешность измерений Δx :

$$\Delta x = \sqrt{x_{np}^2 + x_{сл}^2}.$$

Примечание. Величину приборной ошибки следует выбирать равной цене деления прибора, либо, если указан класс точности k прибора, рассчитать по формуле $\Delta x_{np} = \frac{k \cdot x_{max}}{100}$, где x_{max} – максимальное показание шкалы прибора.

✓ Окончательно, формируем доверительный интервал значений величины x :

$$x = \langle x \rangle \pm \Delta x.$$

1.2. Методика нахождения доверительного интервала в косвенных измерениях.

Используя функциональную зависимость $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ искомой величины y от набора из m найденных в прямых измерениях величин $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, составляем расчетную формулу для определения Δy (**общий случай расчета погрешности косвенных измерений**):

$$\Delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \Delta x_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_m} \Delta x_m\right)^2} = \sqrt{\sum \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta x_i\right)^2},$$

где $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ – частная производная от функции по соответствующей переменной x_i .

Примечание. В случае, когда функциональная зависимость $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$

имеет вид $y = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_m^{\alpha_m}$, для вычисления Δy справедлива формула

$$\Delta y = y \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta x_1}{x_1} \cdot \alpha_1\right)^2 + \left(\frac{\Delta x_2}{x_2} \cdot \alpha_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\Delta x_m}{x_m} \cdot \alpha_m\right)^2}$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие измерения называют прямыми, какие косвенными?
2. Как оценить приборную ошибку при измерении этими приборами?
3. Как вычисляются средние арифметические значения? С какой точностью проводят эту операцию?
4. Как оценивают погрешности прямых измерений?
5. Как оценивают погрешности косвенных измерений?
6. С какой точностью проводится оценка погрешностей?
7. С какой целью проводится несколько измерений одной и той же величины одним и тем же прибором?

$$\text{Диаметр: } \Delta d_{\text{ср}} = 2,1 \cdot \sqrt{\frac{0,1^2 + 0,1^2}{5 \cdot 4}} = 0,066 \text{ мм}$$

$$\Delta d_{\text{пр}} = 0,1 \text{ мм}$$

$$\Delta d = \sqrt{0,1^2 + 0,066^2} = 0,12 \text{ мм}$$

$$\text{Масса: } \Delta m_{\text{ср}} = 0 \text{ г}$$

$$\Delta m_{\text{пр}} = 0,1 \text{ г}$$

$$\Delta m = 0,1 \text{ г}$$

Таблица 2

Величина	Высота h, мм	Диаметр d, мм	Масса, г
Среднее значение	34,12	18,2	69,1
Приборная ошибка	0,01	0,1	0,1
Случайная ошибка	0,014	0,066	0
Абсолютная ошибка	0,017	0,12	0,1
Относительная ошибка	0,05%	0,66%	0,14%

2. Косвенные измерения

Общий случай (приведен для того, чтобы проиллюстрировать то, что расчеты по общему и частному дают одинаковые результаты)

$$\begin{aligned} \Delta \rho &= \sqrt{\left(\frac{4m}{\pi d^2 h^2} \Delta h\right)^2 + \left(\frac{8m}{\pi d^3 h} \Delta d\right)^2 + \left(\frac{4}{\pi d^2 h} \Delta m\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{4 \cdot 69,1 \cdot 10^{-3} \cdot 0,017 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot (18,2 \cdot 10^{-3})^2}\right)^2 + \left(\frac{8 \cdot 69,1 \cdot 10^{-3} \cdot 0,12 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot (18,2 \cdot 10^{-3})^3 \cdot 34,12 \cdot 10^{-3}}\right)^2 + \left(\frac{4 \cdot 0,1 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot (18,2 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 34,12 \cdot 10^{-3}}\right)^2} = \\ &= \sqrt{(3,88)^2 + (102,65)^2 + (11,26)^2} = 103,34 \text{ кг/м}^3 \end{aligned}$$

Частный случай (в этой работе расчет погрешности проводите по частному случаю)

$$\begin{aligned} \Delta \rho &= \rho \sqrt{\left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2} = 7,78 \cdot 10^3 \sqrt{\left(\frac{0,017}{34,12}\right)^2 + \left(\frac{2 \cdot 0,12}{18,2}\right)^2 + \left(\frac{0,1}{69,1}\right)^2} = \\ &= 7,78 \cdot 10^3 \cdot \sqrt{(4,98 \cdot 10^{-4})^2 + (2 \cdot 0,66 \cdot 10^{-2})^2 + (0,14 \cdot 10^{-2})^2} = \\ &= 7,78 \cdot 10^3 \cdot 0,133 \cdot 10^{-2} = 103,34 \text{ кг/м}^3. \end{aligned}$$

ВЫВОД:

плотность материала цилиндра равна $\rho = (7,78 \pm 0,10) \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$

(частный случай расчета погрешности косвенных измерений)

2. Определение плотности материала.

Плотность однородного тела определяют отношением его массы к занимаемому объему:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (I)$$

где m - масса тела, V - его объем. В системе СИ единицей измерения плотности является 1 кг/м³.

В настоящей работе определяется плотность однородного цилиндра. Объем цилиндра можно определить, измеряя на опыте его высоту h и диаметр основания d:

$$V = \frac{\pi d^2}{4} h \quad (2)$$

Следовательно, плотность материала можно определить по формуле

$$\rho = \frac{4m}{\pi d^2 h} \quad (3)$$

Отметим, что определение плотности материала цилиндра относится к косвенному типу измерений; определение массы, высоты и диаметра цилиндра – к прямому типу.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Произведите измерения высоты, диаметра и массы цилиндра в пятикратной повторности. Измерения высоты проводите микрометром, диаметра – штангенциркулем, массы – весами. Результаты запишите в таблицу 1 с точностью, соответствующей цене деления приборов (см. далее: Пример оформления работы).

Таблица 1

№ измерения	Высота h, мм	Диаметр d, мм	Масса, г
1			
2			
3			
4			
5			
Среднее			

- Рассчитайте среднее по каждой из измеренных величин. Число значащих цифр в среднем должно совпадать с числом цифр в результатах измерений.
- Рассчитайте среднюю плотность материала. Для этого средние значения высоты, диаметра и массы подставьте в формулу (3).
- Оцените погрешность прямых измерений высоты, диаметра и массы. Для этого воспользуйтесь рекомендациями пункта 1. 1. краткой теории с учетом Примера оформления работы. Результаты вычислений занесите в Таблицу 2.

Таблица 2

Величина	Высота h, мм	Диаметр d, мм	Масса, г
Среднее значение			
Приборная ошибка			
Случайная ошибка			
Абсолютная ошибка			
Относительная ошибка			

- Оцените погрешность косвенных измерений плотности материала цилиндра. Сделайте это двумя способами, используя формулы общего и частного случая расчета погрешностей косвенных измерений.
- Запишите вывод

ПРИМЕР ОФОРМЛЕНИЯ РАБОТЫ:

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ МАТЕРИАЛА

Цель работы: определить плотность материала цилиндра.

Краткая теория.

Плотность однородного тела определяют отношением его массы к занимаемому объему: $\rho = \frac{m}{V}$, где m - масса тела, V - его объем. Для цилиндра объем равен

$V = \frac{\pi d^2}{4} h$. Следовательно, плотность материала цилиндра можно определить по формуле

$$\rho = \frac{4m}{\pi d^2 h}$$

Результаты эксперимента

№ измерения	Высота h, мм	Диаметр d, мм	Масса, г
1	34,11	18,2	69,1
2	34,12	18,2	69,1
3	34,14	18,1	69,1
4	34,10	18,2	69,1
5	34,12	18,1	69,1
Среднее	34,12	18,2	69,1

$$\rho = \frac{4 \cdot 69,1 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot 18,2^2 \cdot 10^{-6} \cdot 34,12 \cdot 10^{-3}} = 7,78 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$$

Расчет погрешностей.

- Прямые измерения.

$$\text{Высота: } \Delta h_{\text{сл}} = 2,1 \cdot \sqrt{\frac{0,01^2 + 0,02^2 + 0,02^2}{5 \cdot 4}} = 0,014 \text{ мм}$$

$$\Delta h_{\text{пр}} = 1 \cdot 10^{-2} \text{ мм}$$

$$\Delta h = \sqrt{0,01^2 + 0,014^2} = 0,017 \text{ мм}$$