

Контрольной работа по курсу «Электротехника и электромеханика» планируются и выполняются с целью:

- углубления и закрепления теоретических знаний;
- приобретения навыков электротехнических расчетов;
- оформления технической документации;
- проверки усвоения курса.

Самостоятельная работа при выполнении контрольной работы способствует углублению и закреплению теоретических знаний. Прежде чем приступить к выполнению контрольной работы, обучающийся должен изучить требуемые разделы учебной литературы [1–6].

Требования для выполнения обучающимися контрольной работы:

1. Контрольная работа должны быть выполнены на листах формата А4 на одной стороне листа;

2. Работа должна иметь титульный лист. Все листы должны быть сшиты или скреплены;

3. Схемы, графики, диаграммы и чертежи выполняются по ГОСТ. Цветные карандаши или шариковые ручки допускаются только при выполнении построения зависимостей функции от времени;

4. Текст пояснительной записки представляется в напечатанном виде, либо пишется синими или черными чернилами;

5. Если используются неизвестные формулы и зависимости без вывода, необходимо делать ссылки на источники. Все приводимые преобразования должны иметь однозначный смысл;

6. На схемах обязательно указываются принятые положительные направления токов, без этого изложенная работа не имеет смысла;

7. Результаты решения, как правило, представляются в виде таблиц, диаграмм, графиков. В таблицах приводят значения полученных разными методами результатов и оценка их точности в процентах;

8. Графики и диаграммы желательно выполнять на миллиметровой бумаге;

9. Все графики и диаграммы выполняются с соблюдением масштаба. Масштабы должны быть кратны ряду 1, 2, 5 и 10, а для угловых величин – кратны 3;

10. Результаты решений, промежуточные выкладки и уравнения записываются в общем виде, после чего подставляются численные значения. Расположение численных значений величин должно строго соответствовать расположению их буквенных обозначений;

11. После результата вычислений проставляются обозначения единиц измерения.

ЧАСТЬ I

ЗАДАНИЕ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ

Содержание работы

Цепь находится под воздействием источников ЭДС (E). Схемы цепей по вариантам приведены на рис. 1.1÷1.20. Номинальные значения источников ЭДС и сопротивлений приведены в табл. 1.1. Номер варианта, для выполнения контрольной работы, определяется двумя последними цифрами зачетной книжки обучающегося.

Для заданной схемы выполнить следующее:

1. Вычертить схему Вашего варианта и задаться произвольными направлениями искомых токов;
2. Составить на основании законов Кирхгофа систему уравнений для определения значений токов во всех ветвях схемы;
3. Определить токи во всех ветвях схемы методом контурных токов;
4. Вычислить токи во всех ветвях схемы методом узловых потенциалов;
5. Полученные результаты расчета токов, проведенного двумя методами, свести в таблицу и сравнить между собой. Расхождение между значениями для каждого тока, рассчитанного различными методами, не должно превышать 5 %;
6. Определить ток в любой ветви заданной схемы, используя метод эквивалентного генератора;
7. Рассчитать баланс мощностей в исходной схеме, вычислив суммарную мощность источников и суммарную мощность нагрузок (сопротивлений);
8. Вычислить значения и вычертить потенциальную диаграмму для внешнего контура.

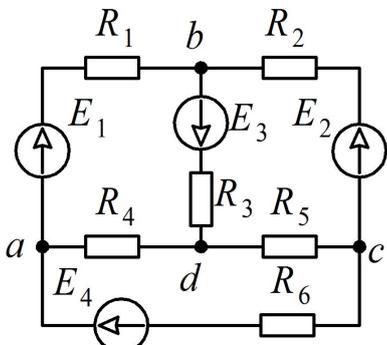


Рис. 1.1

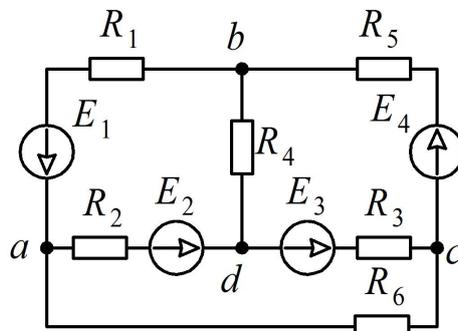


Рис. 1.2

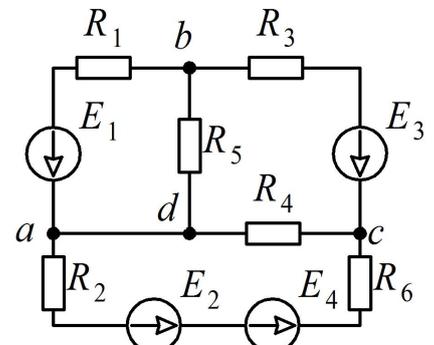


Рис. 1.3

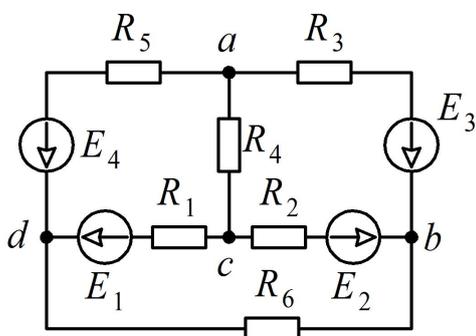


Рис. 1.4

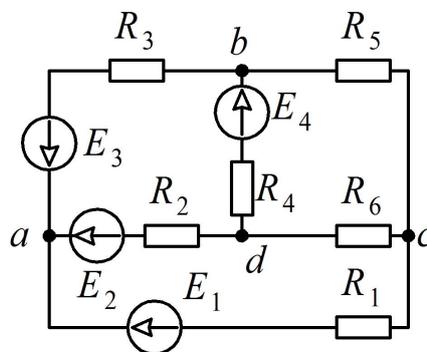


Рис. 1.5

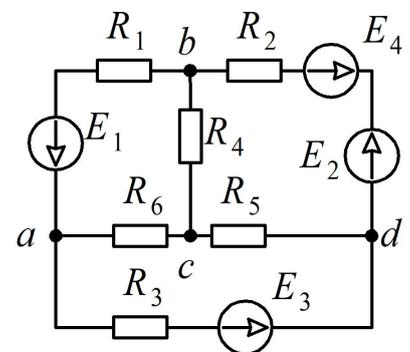


Рис. 1.6

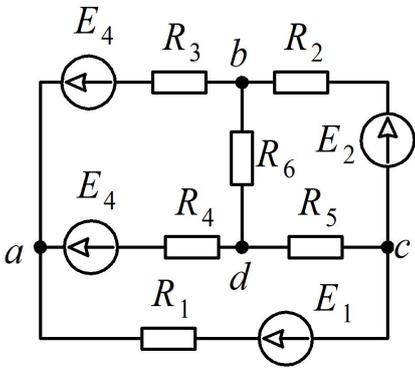


Рис. 1.7

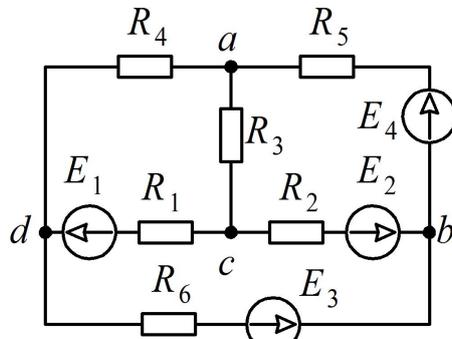


Рис. 1.8

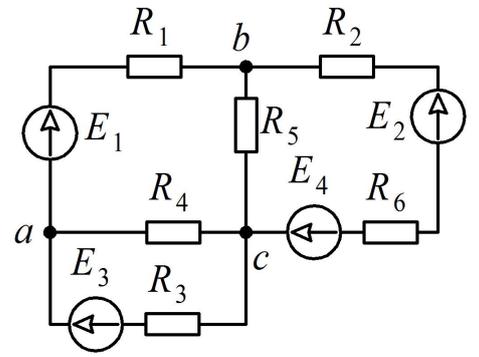


Рис. 1.9

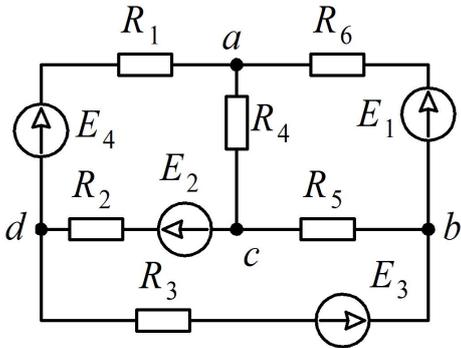


Рис. 1.10

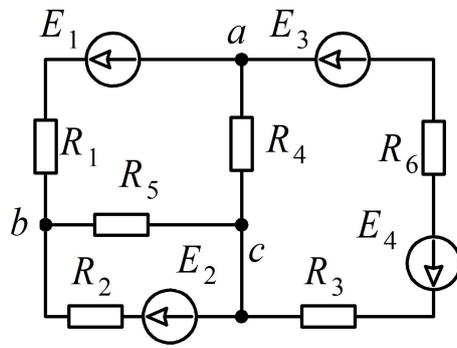


Рис. 1.11

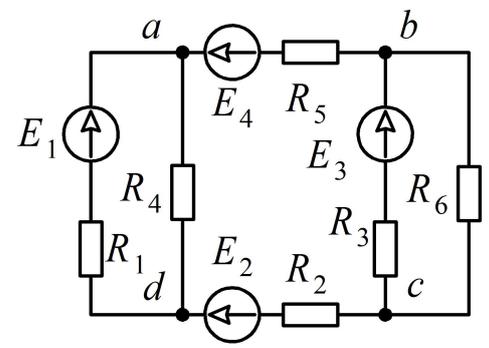


Рис. 1.12

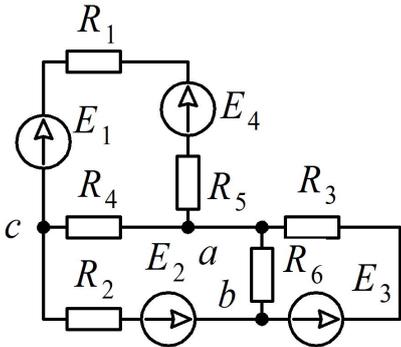


Рис. 1.13

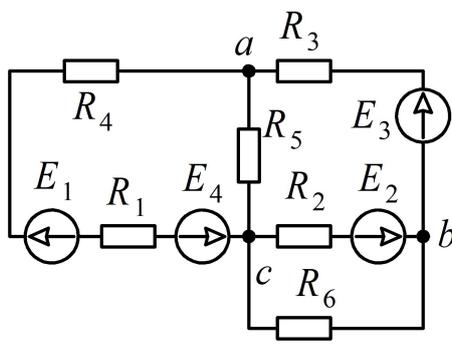


Рис. 1.14

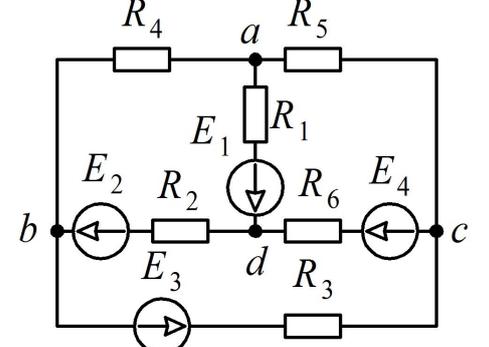


Рис. 1.15

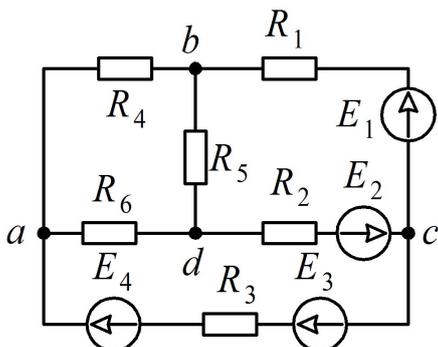


Рис. 1.16

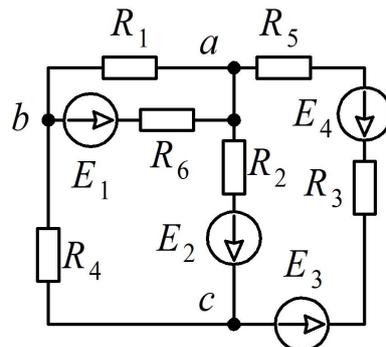


Рис. 1.17

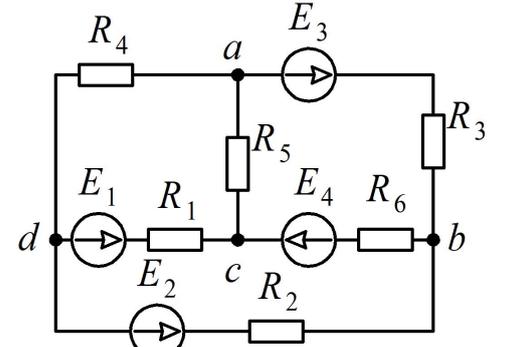


Рис. 1.18

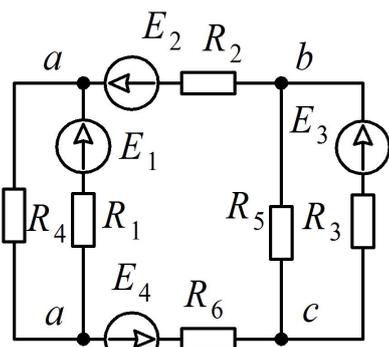


Рис. 1.19

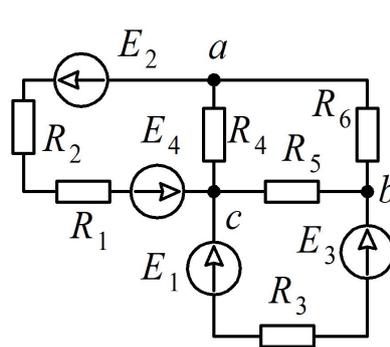


Рис. 1.20

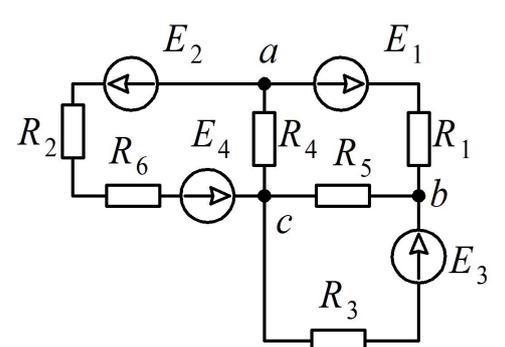


Рис. 1.21

Таблица 1

Вариант	Рисунок	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	E_1	E_2	E_3	E_4
		Ом						В			
1	1.15	19,5	7,5	13,5	21	15	4	10	9	45	3,2
2	1.1	19,5	7,5	3	11	16,5	30	15	12	30	24
3	1.16	6	12	9	5	19,5	16	20	21	22,5	18
4	1.11	30	120	150	70	225	12	25	90	375	6
5	1.17	15	27	7,5	1	12	13,5	30	16,5	52,5	6
6	1.3	6	19,5	13,5	5	7,5	36	20	16,2	15	14,4
7	1.7	19,5	60	90	600	165	40	10,2	37,5	15	24
8	1.20	9	7,5	12	315	10,5	20	20	15	33	18
9	1.8	82,5	120	150	40	105	504	15	25,5	22,5	10,5
10	1.10	165	90	67,5	200	120	100	21	21	15	16,5
11	1.9	10,5	18	6	3,5	22,5	15	10	12	15	15
12	1.18	45	60	33	20	21	50	10	16,5	22,5	15
13	1.12	22,5	18	15	15	12	5,5	15	30	20	2,4
14	1.4	18	52,5	33	3	15	90	20	9	18	6
15	1.13	6	10,5	15	7	30	16,5	10	9	30	60
16	1.5	6	16,5	7,5	12	10,5	36	25,5	15	20	12
17	1.14	13,5	30	24	180	45	12	20	15	27	13,5
18	1.6	7,5	15	18	5,5	12	24	10	15	37,5	7,5
19	1.19	7,5	10,5	15	1	22,5	42	15	20	45	42
20	1.2	12	15	9	60	31,5	31	25,5	10	30	31,5
21	1.15	6,5	2,5	4,5	8	5	1	15	4	15	0,4
22	1.1	6,5	2,5	1	15	5,5	10	20	5	10	4
23	1.16	2	4	3	3	6,5	7	15	11	7,5	3
24	1.11	10	40	50	20	75	15	30	34	125	6
25	1.17	5	9	2,5	2	4	9	10	8,2	17,5	0,8
26	1.3	2	6,5	4,5	4	2,5	7,5	10	6,7	5	1,5
27	1.7	65	20	30	120	55	12,5	4,7	12,5	8	2,4
28	1.20	3	2,5	4	7,5	3,5	2	10	7,5	11	3
29	1.8	27,5	40	50	8	35	150	10	6,5	7,5	5,25
30	1.10	55	30	22,5	15	40	50	8,1	7	10	5,5
31	1.9	3,5	6	2	1,5	7,5	12	10	7	5	6
32	1.18	15	20	11	6	7	10	10	7,5	7,5	2
33	1.12	7,5	6	5	45	4	1,5	3,5	10	5	1,6
34	1.4	6	17,5	11	1	5	30	10	6,5	6	1
35	1.13	2	3,5	5	1	10	5	15	6,5	10	10
36	1.5	2	5,5	2,5	3,5	12	6	10,5	5	10	3,5
37	1.14	4,5	10	8	25	15	6	15	10	9	2,25
38	1.6	2,5	5	6	1,5	4	5	10	6	12,5	1,5
39	1.19	2,5	3,5	5	1	7,5	14	7	10	15	2,8
40	1.2	4	5	3	20	10,5	9	10,5	15	10	5,25
41	1.15	26	10	18	30	20	3	10	20	24	6
42	1.21	26	10	4	4	22	40	12	24	32	80
43	1.16	8	16	12	10	26	22	30	60	24	6
44	1.11	40	160	200	168	300	40	100	200	200	60
45	1.17	20	36	10	12	16	18	30	40	40	48
46	1.3	8	26	18	3	10	60	20	32	11	30
47	1.7	260	80	120	800	220	70	24	34	15	160
48	1.21	12	10	16	30	14	15	20	40	12	30
49	1.8	110	160	200	20	140	360	20	50	22	5,6
50	1.10	220	120	90	150	160	100	50	22	15	11

Вариант	Рисунок	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	E_1	E_2	E_3	E_4
		Ом						В			
51	1.9	14	24	8	7	30	80	20	40	12	80
52	1.18	60	80	44	40	28	50	10	46	8	25
53	1.12	30	24	20	20	16	10	26	38	10	8
54	1.4	24	70	44	7	20	40	20	40	19,6	2
55	1.13	8	14	20	14	40	13	20	40	10	60
56	1.5	8	22	10	14	14	16	50	16,6	23	2,8
57	1.14	18	40	32	160	60	20	30	60	28	4,5
58	1.6	10	20	24	8	16	32	30	30	38	10
59	1.19	10	14	20	6	30	10	30	20	20	20
60	1.2	16	20	12	48	42	25	50	30	34	21
61	1.15	32,5	12,5	22,5	20	25	6	30	20	75	2,4
62	1.21	32,5	12,5	5	15	27,5	50	30	25	50	20
63	1.16	10	20	15	14	32,5	65	40	35	37,5	30
64	1.11	50	200	250	100	375	100	100	50	625	50
65	1.17	25	45	12,5	8	20	45	40	32	87,5	8
66	1.3	10	32,5	22,5	23	12,5	90	30	27	25	36
67	1.7	325	100	150	400	275	100	17	62,5	20	16
68	1.20	15	12,5	20	37,5	17,5	14	30	25	55	30
69	1.8	137	200	250	50	175	60	20	34,5	37,5	24,5
70	1.10	275	150	112	200	200	750	24	35	40	38,5
71	1.9	17,5	30	10	10	37,5	30	20	26	25	24
72	1.18	75	100	55	150	36	50	30	32,5	27,5	12,5
73	1.12	37,5	100	25	225	20	12	25	50	20	4
74	1.4	30	87,5	55	5	25	150	10	15	30	10
75	1.13	10	17,5	25	15	50	15	30	15	50	100
76	1.5	10	27,5	12,5	10	17,5	40	32,5	25	20	30
77	1.14	22,5	50	40	50	75	30	30	35	45	18
78	1.6	12,5	25	30	12	20	40	20	35	62,5	2,5
79	1.19	12,5	17,5	25	5	37,5	17,5	30	30	75	10,5
80	1.2	20	25	15	100	52,5	35	50,5	33	50	31,5
81	1.15	18	5	9	16,8	10	12	15	10	21	1,2
82	1.1	13	5	2	6	11	20	20	12	16	40
83	1.16	4	8	6	9	13	11	10	30	9	6
84	1.11	20	80	100	70	150	24	100	100	50	24
85	1.17	10	18	5	7	8	18	10	20	30	8
86	1.3	4	13	9	5	5	7	15	16	8,2	1,4
87	1.7	130	40	60	720	110	30	12	13	15	21,6
88	1.21	6	5	8	210	7	2	10	20	14	0,2
89	1.8	55	80	100	30	70	60	10	25	10	3,5
90	1.10	110	60	45	50	80	30	25	8	10	11
91	1.9	7	12	4	5	15	9	10	20	8	4,5
92	1.18	30	40	22	60	14	40	10	23	9,5	10
93	1.12	15	12	10	10	8	3	13	14	18	4
94	1.4	12	35	22	4	10	20	15	20	7,6	2
95	1.13	4	7	10	5	20	6	15	20	10	2
96	1.5	4	11	5	6	7	12	25	4,5	10	3
97	1.14	9	20	16	60	30	15	20	30	10	4,5
98	1.6	5	10	12	5	8	24	20	15	13	1
99	1.19	5	7	10	4	15	70	15	10	20	70
100	1.2	8	10	6	24	21	12	25	10	14	21

ЧАСТЬ II

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО МЕТОДАМ РАСЧЕТА

1. На первом этапе расчета необходимо задаться направлением протекания тока в ветвях. Количество токов должно равняться количеству ветвей в схеме. Направление тока не влияет на ход расчета. Знак «минус», полученные при токе в процессе расчета, позволяет судить о противоположном направлении тока в реальной схеме. Так же на данном этапе необходимо задаться направлениями обхода контуров (для методов уравнений Кирхгофа и контурных токов). Направление обхода контура выбирается произвольно и так же не влияет на правильность расчетов.

2. Рассчитаем токи в рассматриваемой цепи с использованием метода узловых и контурных уравнений (метод уравнений Кирхгофа).

Использование данного метода для расчета сложных электрических цепей подразумевает составление системы уравнений по законам Кирхгофа. При составлении системы уравнений должно учитываться следующее:

– число уравнений равно числу токов в цепи (y) (число токов равно числу ветвей в рассчитываемой цепи). Направление токов в ветвях выбирается произвольно.

– по первому закону Кирхгофа составляется $y_1 = (n - 1)$ уравнений, где n – число узловых точек в схеме. При этом необходимо задаться знаками при токах. Рекомендуется использовать знак «+» для токов, втекающих в узел и знак «-» при вытекании тока из узла.

– остальные уравнения составляются по второму закону Кирхгофа ($y_2 = y - y_1$). Количество уравнений по второму закону Кирхгофа можно так же определить по количеству независимых контуров в рассчитываемой схеме.

В результате решения системы уравнений определяются искомые величины для сложной электрической цепи (например, все токи при заданных значениях ЭДС источников E и сопротивлений резисторов R). Если в результате расчета какие-либо токи получаются отрицательными, это указывает на то, что их направление противоположно заданному (о чем было сказано выше).

Рассмотрим пример расчета цепи, используя метод узловых и контурных уравнений. Составим необходимое и достаточное количество уравнений по законам Кирхгофа для определения всех токов в цепи (рис. 2.1).

Решение

В рассматриваемой электрической цепи (рис. 2.1) имеется 5 ветвей, следовательно, 5 различных токов, поэтому для расчета необходимо составить 5 уравнений, причем 2 уравнения – по первому закону Кирхгофа (в цепи $n = 3$ узловых точки A , B и C) и 3 уравнения – по второму закону Кирхгофа (цепь содержит три независимых контура AaB , $ABbC$, Acc). При расчете внутренним сопротивлением источников пренебрегаем, т. е. $R_0 = 0$).

Выберем произвольное направление токов в ветвях и нанесем их на схему. Направление обхода контуров выберем по часовой стрелке и так же нанесем их на схему.

Составляем уравнения:

$$-I_1 - I_2 - I_3 - I_4 = 0 \text{ (для точки } A\text{);}$$

$$I_1 + I_2 - I_5 = 0 \text{ (для точки } B\text{);}$$

$$E_1 - E_2 = I_1(R_1 + R_2) - I_2R_3 \text{ (для контура } AaB\text{);}$$

$$E_2 + E_5 - E_4 = I_2R_3 + I_5(R_7 + R_8) - I_4R_6 \text{ (для контура } ABbC\text{);}$$

$$E_4 - E_3 = I_4R_6 - I_3(R_4 + R_5) \text{ (для контура } Acc\text{).}$$

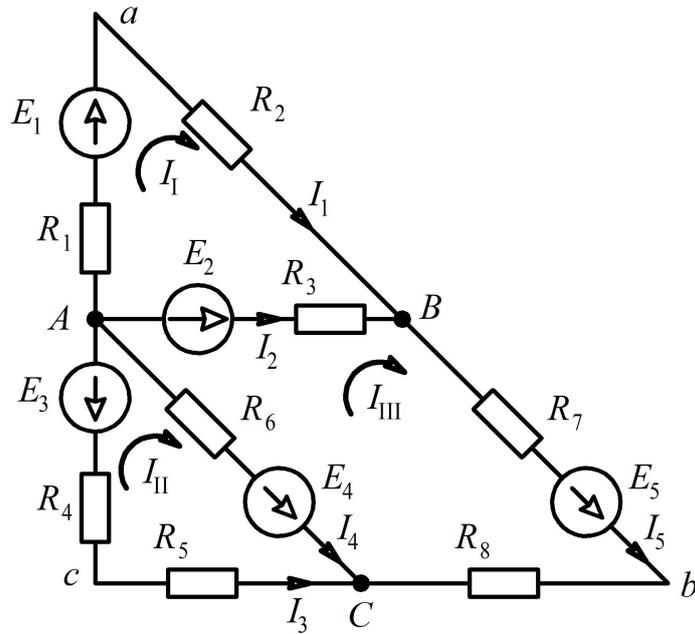


Рис. 2.1

3. Рассчитаем токи в рассматриваемой цепи с использованием метода контурных токов. При расчете сложных цепей методом узловых и контурных уравнений (по законам Кирхгофа) необходимо решать систему из большого количества уравнений, что значительно затрудняет вычисления. Так, для схемы рис. 2.2 необходимо составить и рассчитать систему из 7-ми уравнений.

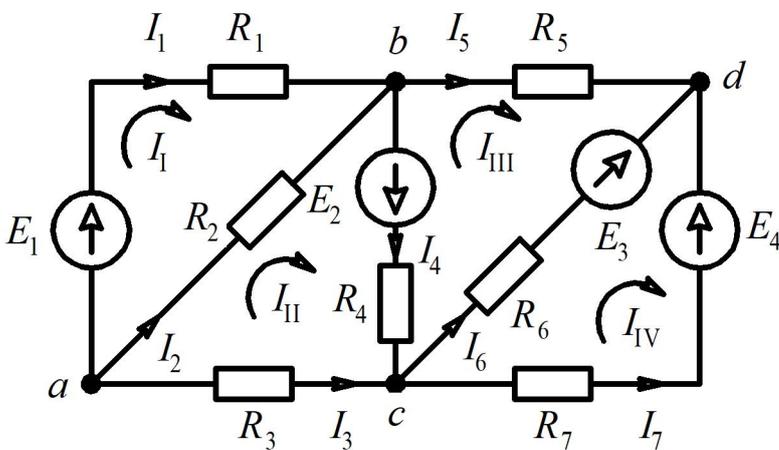


Рис. 2.2

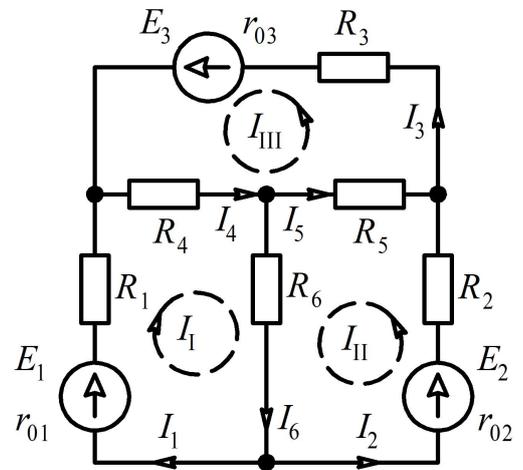


Рис. 2.3

Ту же задачу можно решить, записав только 4 уравнения по второму закону Кирхгофа, если воспользоваться методом контурных токов.

Суть метода состоит в том, что в схеме (рис. 2.2) выделяют m независимых контуров, в каждом из которых произвольно направлены контурные токи $I_I, I_{II}, I_{III}, I_{IV}$. *Контурный ток* – это расчетная величина, измерить которую невозможно.

Действительные токи определяются на основании контурных токов, протекающие по ветви. Из рис. 2.2 видно, отдельные ветви схемы входят в два смежных контура. Действительный ток в такой ветви определяется алгебраической суммой контурных токов смежных контуров. Таким образом, получаем уравнения:

$$I_1 = I_I; I_2 = I_{II} - I_I; I_3 = -I_{II}; I_4 = I_{II} - I_{III}; I_5 = I_{III}; I_6 = -I_{III} + I_{IV}; I_7 = -I_{IV}.$$

Для определения контурных токов составляют m уравнений по второму закону Кирхгофа. В каждое уравнение входит алгебраическая сумма ЭДС, включенных в данный контур (по одну сторону от знака равенства), и общее падение напряжения в данном контуре, созданное контурным током данного контура и контурными токами смежных контуров (по другую сторону знака равенства).

Для данной схемы (рис. 2.2) необходимо составить 4 уравнения. Со знаком «плюс» записываются ЭДС и падения напряжения (по разные стороны знака равенства), действующие в направлении контурного тока, со знаком «минус» – направленные против контурного тока.

Система уравнений для схемы (рис. 2.2):

$$\begin{cases} E_1 = I_I(R_{01} + R_1 + R_2) - I_{II}R_2; \\ E_2 = I_{II}(R_{02} + R_4 + R_3 + R_2) - I_I R_2 + I_{III}(R_{02} + R_4); \\ -E_2 - E_3 = I_{III}(R_{02} + R_4 + R_6 + R_{03} + R_5) - I_{II}(R_{02} + R_4) - I_{IV}(R_{03} + R_6); \\ E_3 - E_4 = I_{IV}(R_{04} + R_{03} + R_6 + R_7) - I_{III}(R_{03} + R_6). \end{cases}$$

Решением системы уравнений вычисляются значения контурных токов, которые и определяют действительные токи в каждой ветви схемы.

Рассмотрим численный пример расчета токов за счет использования метода контурных токов. Определить токи во всех участках электрической цепи (рис. 2.3), если: $E_1 = 130$ В; $E_2 = 40$ В; $E_3 = 100$ В; $R_1 = 1$ Ом; $R_2 = 4,5$ Ом; $R_3 = 2$ Ом; $R_4 = 4$ Ом; $R_5 = 10$ Ом; $R_6 = 5$ Ом; $R_{02} = 0,5$ Ом; $R_{01} = R_{03} = 0$.

Решение

При расчете искомых токов необходимо составить 3 уравнения по второму закону Кирхгофа для определения контурных токов I_I, I_{II}, I_{III} (направление контурных токов выбрано произвольно и указано пунктирными линиями):

$$\begin{aligned} E_1 &= I_I(R_{01} + R_1 + R_4 + R_6) + I_{II}R_6 + I_{III}R_4; \\ E_2 &= I_I R_6 + I_{II}(R_{02} + R_2 + R_5 + R_6) - I_{III}R_5; \\ E_3 &= I_I R_4 - I_{II}R_5 + I_{III}(R_{03} + R_3 + R_5 + R_4). \end{aligned}$$

Подставляются числовые значения заданных величин, получаем:

$$130 = 10I_I + 5I_{II} + 4I_{III}; \quad (2.1)$$

$$40 = 5I_I + 20I_{II} - 10I_{III}; \quad (2.2)$$

$$100 = 4I_I - 10I_{II} + 16I_{III}. \quad (2.3)$$

Из уравнения (2.2) определяется ток I_I :

$$I_I = \frac{40 - 20I_{II} + 10I_{III}}{5} = 8 - 4I_{II} + 2I_{III}. \quad (2.4)$$

Уравнение (2.4) подставляется в уравнение (2.1):

$$130 = (8 - 4I_{II} + 2I_{III})10 + 4I_{III} + 5I_{II} = 80 - 40I_{II} + 20I_{III} + 4I_{III} + 5I_{II},$$

или

$$50 = 24I_{III} - 35I_{II}. \quad (2.5)$$

То же значение тока I_I подставляется в уравнение (2.3):

$$100 = 16I_{III} + (8 - 4I_{II} + 2I_{III})4 - 10I_{II} = 16I_{III} + 32 - 16I_{II} + 8I_{III} - 10I_{II},$$

или

$$68 = 24I_{III} - 26I_{II}. \quad (2.6)$$

Из полученного уравнения (2.6) вычитается полученное уравнение (2.5). В результате получим: $18 = 9I_{II}$.

Откуда контурный ток: $I_{II} = 18/9 = 2$ А.

Из уравнения (2.6) определяется контурный ток I_{III} :

$$I_{III} = \frac{68 + 26I_{II}}{24} = \frac{68 + 2 \cdot 26}{24} = 5 \text{ A.}$$

Из уравнения (2.4) определяется ток I_I :

$$I_I = 8 - 4I_{II} + 2I_{III} = 8 - 8 + 10 = 10 \text{ A.}$$

Вычисляются реальные токи в заданной цепи:

$$I_1 = I_I = 10 \text{ A}; I_2 = I_{II} = 2 \text{ A}; I_3 = I_{III} = 5 \text{ A}; I_4 = I_I + I_{III} = 10 + 5 = 15 \text{ A};$$

$$I_5 = I_{III} - I_{II} = 5 - 2 = 3 \text{ A}; I_6 = I_I + I_{II} = 10 + 2 = 12 \text{ A.}$$

Проверяется правильность решения для 1-го контура (рис. 2.3):

$$E_1 = I_1 R_1 + I_4 R_4 + I_6 R_6; 130 = 10 \cdot 1 + 15 \cdot 4 + 12 \cdot 5 = 130 \text{ В.}$$

Решение верное. Такую же проверку можно произвести и для других контуров (2-го и 3-го):

$$E_2 = I_1(R_1 + R_{02}) - I_5 R_5 + I_6 R_6 \text{ или } 40 = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 10 + 12 \cdot 5 = 40 \text{ В.}$$

$$E_3 = I_3(R_3 + R_{03}) + I_4 R_4 + I_5 R_5 \text{ или } 100 = 5 \cdot 2 - 15 \cdot 4 + 3 \cdot 10 = 100 \text{ В.}$$

Проверка показала правильность решения.

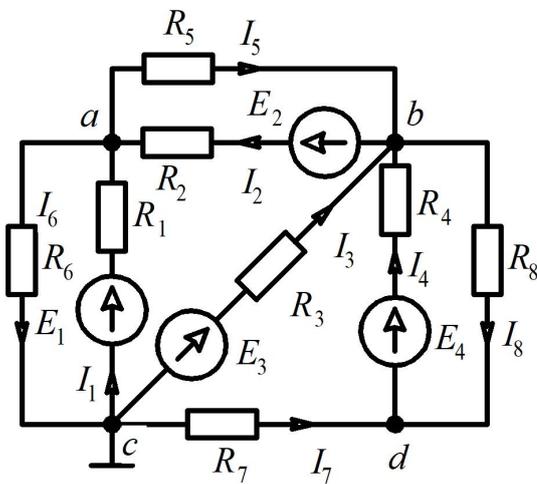


Рис. 2.4

4. Рассчитаем токи в электрической цепи с использованием метода узловых потенциалов. Данный метод вытекает из первого закона Кирхгофа. В качестве неизвестных принимаются потенциалы узлов, по найденным значениям которых с помощью закона Ома для участка цепи с источником ЭДС затем находят токи в ветвях. Поскольку потенциал – величина относительная, потенциал одного из узлов (любого) принимается равным нулю. Таким образом, число неизвестных потенциалов, а следовательно, и число уравнений равно $(n - 1)$, где n – число узлов в схеме.

Система уравнений по методу «узловых потенциалов» может быть составлена формальным путем. При этом необходимо руководствоваться

следующими правилами:

- в левой части i -го уравнения записывается со знаком «+» потенциал ϕ_i i -го узла, для которого составляется данное i -е уравнение, умноженный на сумму проводимостей Y_{ii} ветвей, присоединенных к данному i -му узлу, и со знаком «-» потенциал ϕ_k соседних узлов, каждый из которых умножен на сумму проводимостей Y_{ik} ветвей, присоединенных к i -му и k -му узлам.

Из сказанного следует, что все члены $\phi_i Y_{ii}$, стоящие на главной диагонали в левой части системы уравнений, записываются со знаком «+», а все остальные – со знаком «-», причем $Y_{ik} = Y_{ki}$. Последнее равенство обеспечивает симметрию коэффициентов уравнений относительно главной диагонали.

- в правой части i -го уравнения записывается так называемый узловой ток J_i , равный сумме произведений ЭДС ветвей, подходящих к i -му узлу, и проводимостей этих ветвей. При этом член суммы записывается со знаком «+», если соответствующая ЭДС направлена к i -му узлу, в противном случае ставится знак «-». Если в подходящих к i -му узлу ветвях содержатся источники тока, то знаки токов источников токов, входящих в узловой ток простыми слагаемыми, определяются аналогично.

В схеме представленной рис. 2.4, примем потенциал точки c равным нулю $\phi_c = 0$.

Допустим, что $\varphi_a, \varphi_b, \varphi_d$ известны. Значения токов можем определить на основании закона Ома для участка цепи:

$$I_1 = \frac{E_1 - \varphi_a}{R_1} = (E_1 - \varphi_a)Y_1; \quad I_2 = \frac{\varphi_b - \varphi_a + E_2}{R_2} = (\varphi_b - \varphi_a + E_2)Y_2; \quad I_3 = \frac{E_3 - \varphi_b}{R_3} = (E_3 - \varphi_b)Y_3;$$

$$I_4 = \frac{\varphi_d - \varphi_b + E_4}{R_4} = (\varphi_d - \varphi_b + E_4)Y_4; \quad I_5 = \frac{\varphi_a - \varphi_b}{R_5} = (\varphi_a - \varphi_b)Y_5; \quad I_6 = \frac{\varphi_a}{R_6} = \varphi_a Y_6;$$

$$I_7 = \frac{-\varphi_d}{R_7} = -\varphi_d Y_7; \quad I_8 = \frac{\varphi_b - \varphi_d}{R_8} = (\varphi_b - \varphi_d)Y_8.$$

Для определения значений потенциалов составим три уравнения по первому закону Кирхгофа:

$$\varphi_a \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \right) - \varphi_b \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} \right) = E_1 \frac{1}{R_1} + E_2 \frac{1}{R_2};$$

$$-\varphi_a \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} \right) + \varphi_b \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_8} \right) - \varphi_d \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_8} \right) = -E_2 \frac{1}{R_2} + E_3 \frac{1}{R_3} + E_4 \frac{1}{R_4};$$

$$-\varphi_b \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_8} \right) + \varphi_d \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_7} + \frac{1}{R_8} \right) = -E_4 \frac{1}{R_4}.$$

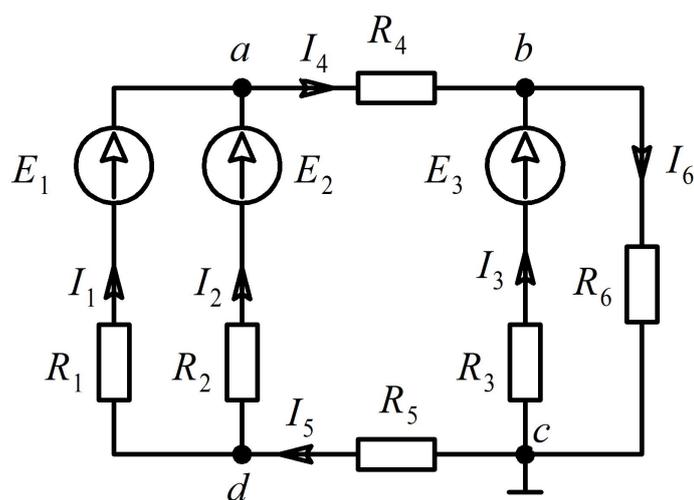


Рис. 2.5

Подставив в полученные уравнения численные значения и их совместное решение позволит получить потенциалы точек $\varphi_a, \varphi_b, \varphi_d$, а в дальнейшем найти токи в ветвях.

Рассмотрим численный пример использования метода узловых потенциалов для расчета электрической цепи представленной на рис. 2.5 и имеющей следующие параметры: $E_1 = 15$ В; $E_2 = 25$ В; $E_3 = 35$ В; $R_1 = 15$ Ом; $R_2 = 20$ Ом; $R_3 = 25$ Ом; $R_4 = 17,5$ Ом; $R_5 = 22,5$ Ом; $R_6 = 35$ Ом

Решение

На первом этапе расчета запишем уравнения для определения токов в ветвях,

на основании направлений заданных на схеме:

$$I_1 = (\varphi_d - \varphi_a + E_1)/R_1; \quad I_2 = (\varphi_d - \varphi_a + E_2)/R_2; \quad I_3 = (\varphi_c - \varphi_b + E_3)/R_3;$$

$$I_4 = (\varphi_a - \varphi_b)/R_4; \quad I_5 = (\varphi_c - \varphi_d)/R_5; \quad I_6 = (\varphi_b - \varphi_c)/R_6.$$

где $\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c, \varphi_d$ – потенциалы соответствующих узлов схемы.

На втором этапе составим уравнения по второму закону Кирхгофа для каждого узла схема с учетом потенциала данного узла. При этом будем считать потенциал точки d равный нулю ($\varphi_d = 0$), а сопротивления заменим на проводимости:

$$\varphi_a \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} \right) - \varphi_b \frac{1}{R_4} - \varphi_d \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2};$$

$$-\varphi_a \frac{1}{R_4} + \varphi_b \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_6} \right) = \frac{E_3}{R_3};$$

$$-\varphi_a \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \varphi_d \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} \right) = -\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2}.$$

Решение потенциальной системы из трех уравнений также определим матричным способом:

$$[G][\varphi] = [J],$$

для которой

$$[G] = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_4} & -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \\ -\frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_6} & 0 \\ -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) & 0 & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,174 & -0,057 & -0,117 \\ -0,057 & 0,126 & 0 \\ -0,117 & 0 & 0,161 \end{bmatrix};$$

$$[J] = \begin{bmatrix} (E_1/R_1) + (E_2/R_2) \\ E_3/R_3 \\ -(E_1/R_1) - (E_2/R_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,25 \\ 1,4 \\ -2,25 \end{bmatrix}.$$

Подставим численные значения в матрицу проводимостей, столбец токов и используя программный продукт *MathCad* рассчитаем узловые потенциалы:

$$\varphi_a = 19,842 \text{ В}; \varphi_b = 20,156 \text{ В}; \varphi_d = 0,403 \text{ В}.$$

Используя выше приведенные формулы рассчитаем токи в ветвях:

$$I_1 = (\varphi_d - \varphi_a + E_1)/R_1 = (0,403 - 19,842 + 15)/15 = -0,296;$$

$$I_2 = (\varphi_d - \varphi_a + E_2)/R_2 = (0,403 - 19,842 + 25)/20 = 0,278;$$

$$I_3 = (\varphi_c - \varphi_b + E_3)/R_3 = (-20,156 + 35)/25 = 0,594;$$

$$I_4 = (\varphi_a - \varphi_b)/R_4 = (19,842 - 20,156)/17,5 = -0,018;$$

$$I_5 = (\varphi_c - \varphi_d)/R_5 = -0,403/22,5 = -0,018;$$

$$I_6 = (\varphi_b - \varphi_c)/R_6 = 20,156/35 = 0,576.$$

5. Метод свертывания используется, если цепь имеет один источник и смешанное соединение элементов (последовательное и параллельное). Данный метод позволяет за счет упрощения схемы произвести ее расчет, который осуществляется по алгоритму:

- на схеме отмечаются все токи и узловые точки. При обозначении токов использовать «логическое мышление» и выбирать такое их направление как бы они протекали под действием источника;

- группы резисторов с явно выраженным последовательным или параллельным соединением заменяются эквивалентными, и определяются их сопротивления. Сворачивание схемы осуществляется с противоположной стороны от источника;

- замена производится до получения простейшей схемы, для которой элементарно определяется общее (эквивалентное) сопротивление всей цепи;

- по заданному напряжению источника и вычисленному общему сопротивлению всей цепи определяется ток в неразветвленной части цепи (общий ток).

- схема разворачивается в обратную сторону с определением падения напряжения на участках цепи и тока для каждого резистора.

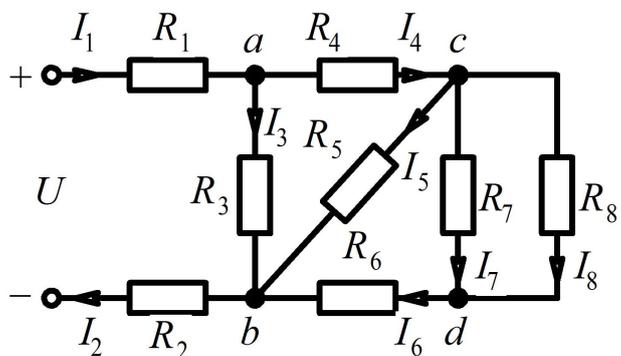


Рис. 2.6

Рассчитаем электрическую цепь, представленную на рис. 2.6, с помощью метода наложения. Схема имеет следующие параметры: $U = 100$ В, $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 22$ Ом, $R_3 = 25$ Ом, $R_4 = 30$ Ом, $R_5 = 18$ Ом, $R_6 = 28$ Ом, $R_7 = 35$ Ом, $R_8 = 40$ Ом. Внутренним сопротивлением источника пренебрегаем.

На схеме проставлены направления токов и указаны узловые точки.

Решение

На первом этапе расчета в рассматриваемой цепи (рис. 2.6) определяем группы потребителей, соединенных последовательно или параллельно. При этом определим эквивалентные сопротивления участков и произведем «сворачивание» схемы.

Очевидно, резисторы R_8 и R_7 соединены параллельно, т. к. напряжение на них одинаковое. Следовательно, их общее сопротивление (рис. 2.7, а):

$$R_{78} = (R_7 R_8) / (R_7 + R_8) = (35 \cdot 40) / (35 + 40) = 18,667 \text{ Ом.}$$

Объединение сопротивлений позволяет исключить узел d.

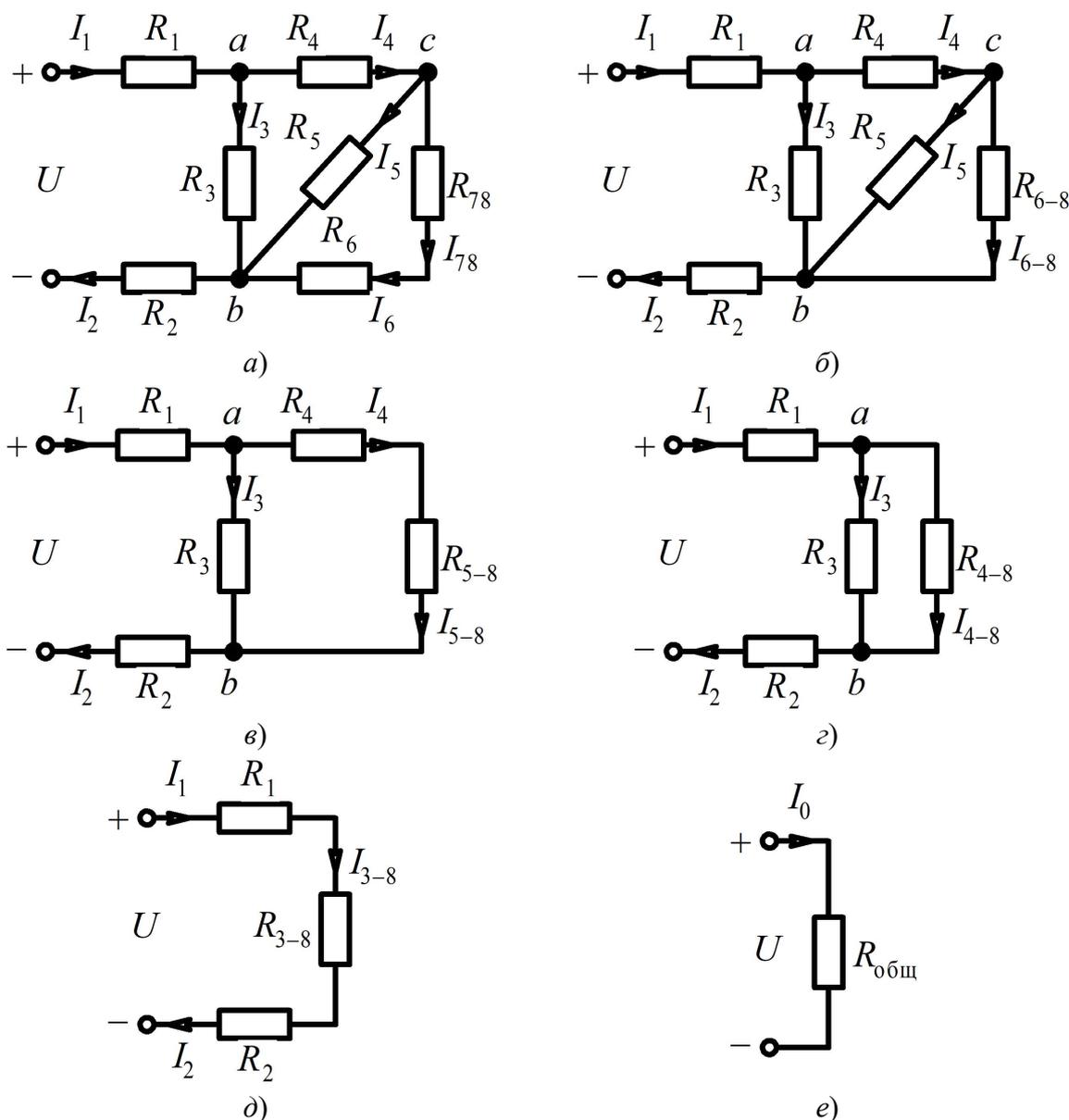


Рис. 2.7

Сопротивление группы R_{78} соединено последовательно с резистором R_6 , таким образом, общее сопротивление (рис. 2.7, б):

$$R_{6-8} = R_6 + R_{78} = 28 + 18,667 = 46,667 \text{ Ом.}$$

Сопротивление R_{6-8} соединено параллельно с резистором R_5 (в узлах b и c), следовательно, общее сопротивление (рис. 2.7, в):

$$R_{5-8} = (R_5 R_{6-8}) / (R_5 + R_{6-8}) = (18 \cdot 46,667) / (18 + 46,667) = 12,99 \text{ Ом.}$$

Объединение сопротивлений позволяет исключить узел c .

Сопротивление R_{5-8} соединено последовательно с резистором R_4 , т. е. общее сопротивление (рис. 2.7, г):

$$R_{4-8} = R_4 + R_{5-8} = 30 + 12,99 = 42,99 \text{ Ом.}$$

Это сопротивление подключено параллельно к резистору R_3 (в узлах a и b), следовательно, общее сопротивление (рис. 2.7, д):

$$R_{3-8} = (R_3 R_{4-8}) / (R_3 + R_{4-8}) = (25 + 42,99) / (25 + 42,99) = 15,807 \text{ Ом.}$$

Объединение сопротивлений позволяет исключить узлы a и b .

Сопротивление R_{3-8} соединено последовательно с резисторами R_1 и R_2 , следовательно, общее (эквивалентное) сопротивление исследуемой цепи R определяется выражением (рис. 2.7, е):

$$R = R_1 + R_2 + R_{3-8} = 20 + 22 + 15,807 = 57,807 \text{ Ом.}$$

Общий ток I_0 , который проходит по сопротивлениям R_1 , R_2 и R_{3-8} , определим, воспользовавшись законом Ома для замкнутой цепи (рис. 2.7, д, е):

$$I_0 = I_1 = I_2 = I_{3-8} = U / R_{\text{общ}} = 100 / 57,807 = 1,73 \text{ А.}$$

Ток I_0 создает на сопротивлении R_{3-8} (в узлах a и b) падение напряжения, величину которого определим по закону Ома:

$$U_{ab} = I_{3-8} R_{3-8} = 1,73 \cdot 15,807 = 27,345 \text{ В.}$$

Напряжение U_{ab} можно определить, используя второй закон Кирхгофа:

$$U_{ab} = U - U_1 - U_2 = U - I_1 R_1 - I_2 R_2 = 100 - 1,73 \cdot 20 - 1,73 \cdot 22 = 27,345 \text{ В.}$$

Используя напряжение U_{ab} можем определить I_3 и I_{4-8} (рис. 2.7, г):

$$I_3 = U_{ab} / R_3 = 27,345 / 25 = 1,094 \text{ А; } I_4 = I_{4-8} = U_{ab} / R_{4-8} = 27,345 / 39,164 = 0,636 \text{ А.}$$

Используя первый закон Кирхгофа, можем проверить правильность расчетов:

$$I_{3-8} = I_3 + I_{4-8} = 1,094 + 0,636 = 1,73 \text{ А.}$$

Ток I_4 создает падение напряжения U_{bc} на общем сопротивлении R_{5-8} . Напряжение U_{bc} определяем по закону Ома (рис. 2.7, в):

$$U_{bc} = U_{5-8} = I_4 R_{5-8} = 0,636 \cdot 12,99 = 8,263 \text{ В.}$$

Это же напряжение можно определить по второму закону Кирхгофа:

$$U_{bc} = U_{ab} - I_4 R_4 = 27,345 - 0,636 \cdot 30 = 8,263 \text{ В.}$$

На основании U_{bc} можем определить токи I_5 и I_{6-8} (рис. 2.7, б) используя закон Ома:

$$I_5 = U_{bc} / R_5 = 8,263 / 18 = 0,459 \text{ А; } I_6 = I_{6-8} = U_{bc} / R_{6-8} = 8,263 / 46,667 = 0,177 \text{ А.}$$

Используя первый закон Кирхгофа, можем проверить правильность расчетов:

$$I_4 = I_5 + I_{6-8} = 0,459 + 0,177 = 0,636 \text{ А.}$$

Ток I_6 создает падение напряжения U_{cd} на общем сопротивлении R_{78} :

$$U_{cd} = U_{78} = I_6 R_{78} = 0,177 \cdot 18,67 = 3,31 \text{ В или } U_{cd} = U_{bc} - I_6 R_6 = 8,263 - 0,177 \cdot 28 = 3,31 \text{ В.}$$

Токи I_7 и I_8 определяем по закону Ома (рис. 2.7, а):

$$I_7 = U_{cd} / R_7 = 3,31 / 35 = 0,094 \text{ А; } I_8 = U_{cd} / R_8 = 3,31 / 40 = 0,083 \text{ А.}$$

6. Метод преобразования электрических схем применяют для расчета сложных цепей путем преобразований «треугольника сопротивлений» в «эквивалентную звезду» или «звезды сопротивлений» в «эквивалентный треугольник». При этом количество источников, может быть любым.

Контур, состоящий из трех сопротивлений R_{ab} , R_{bc} и R_{ca} , имеющий три узловые точки a , b и c , образует «треугольник сопротивлений» (рис. 2.8, а).

Электрическая цепь, состоящая из трех сопротивлений R_a , R_b и R_c , соединенных в одной узловой точке 0, образует «звезду сопротивлений» (рис. 2.8, б).

Расчет некоторых сложных цепей значительно упрощается, если соединение «звездой» в них заменить соединением «треугольником» или наоборот.

Преобразование схемы должно производиться так, чтобы при неизменном напряжении между точками a , b и c токи I_A , I_B и I_C «звезды» и «треугольника» оставались без изменений. «Треугольник» и «звезда», удовлетворяющие этому условию, называются эквивалентными.

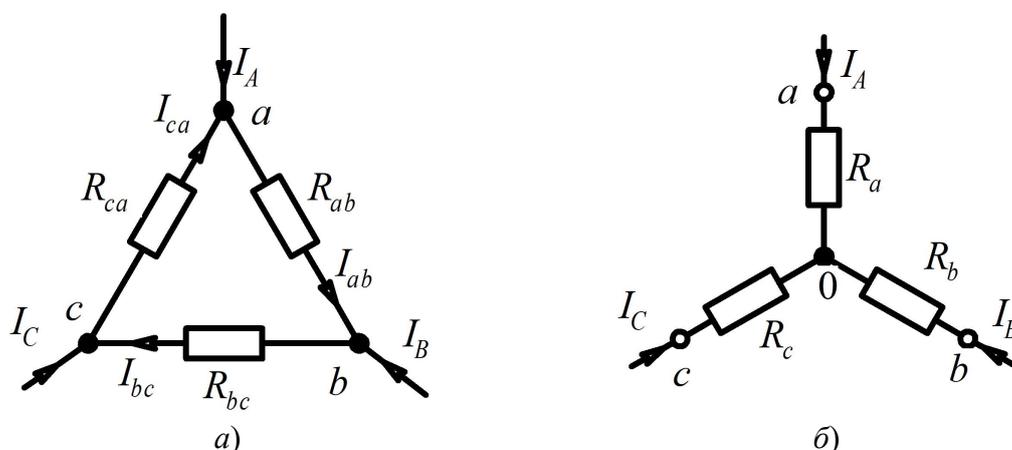


Рис. 2.8

Для такого преобразования рекомендуется изображать схему цепи без заменяемого «треугольника» (или «звезды»), но с обозначенными вершинами a , b , и c и к этим обозначенным вершинам подсоединить эквивалентную «звезду» (или «треугольник»).

При замене «треугольника» эквивалентной «звездой» сопротивления «звезды» определяются следующими выражениями:

$$R_a = \frac{R_{ab}R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}, \quad R_b = \frac{R_{bc}R_{ab}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}, \quad R_c = \frac{R_{ca}R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}.$$

Таким образом, каждое сопротивление эквивалентной «звезды» равно отношению произведения двух примыкающих к соответствующей узловой точке сопротивлений «треугольника» к сумме трех его сопротивлений.

При замене «звезды» эквивалентным «треугольником» каждое сопротивление «треугольника» определяется следующими выражениями:

$$R_{ab} = R_a + R_b + \frac{R_a R_b}{R_c}, \quad R_{bc} = R_b + R_c + \frac{R_b R_c}{R_a}, \quad R_{ca} = R_c + R_a + \frac{R_c R_a}{R_b}.$$

Каждое сопротивление эквивалентного «треугольника» равно сумме трех слагаемых: двух примыкающих к соответствующим точкам сопротивлений «звезды» и отношению произведения этих сопротивлений к третьему сопротивлению «звезды».

Определить токи во всех ветвях цепи (рис. 2.9, а) при следующих исходных данных: $E = 2,2$ В; $R_1 = 10$ Ом; $R_2 = 30$ Ом; $R_3 = 60$ Ом; $R_4 = 4$ Ом; $R_5 = 22$ Ом. Внутренним сопротивлением источника пренебрегаем.

Решение

Для расчета этой цепи заменим «треугольник» сопротивлений, подключенных к точкам a , b и c , эквивалентной звездой, подключенной к тем же точкам (рис. 2.9, б).

Определим величины сопротивлений эквивалентной звезды:

$$R_a = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{10 \cdot 60}{10 + 30 + 60} = 6 \text{ Ом}, \quad R_b = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{10 \cdot 30}{10 + 30 + 60} = 3 \text{ Ом},$$

$$R_c = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{30 \cdot 60}{10 + 30 + 60} = 18 \text{ Ом}.$$

Зная все сопротивления (рис. 2.9, б), определим токи I_0 , I_4 и I_5 , которые в эквивалентной схеме имеют такие же значения, как и в исходной схеме. Расчет цепи производим методом свертывания (п. 6):

$$R_{a4} = R_a + R_4 = 6 + 4 = 10 \text{ Ом}; \quad R_{c5} = R_c + R_5 = 18 + 22 = 40 \text{ Ом}.$$

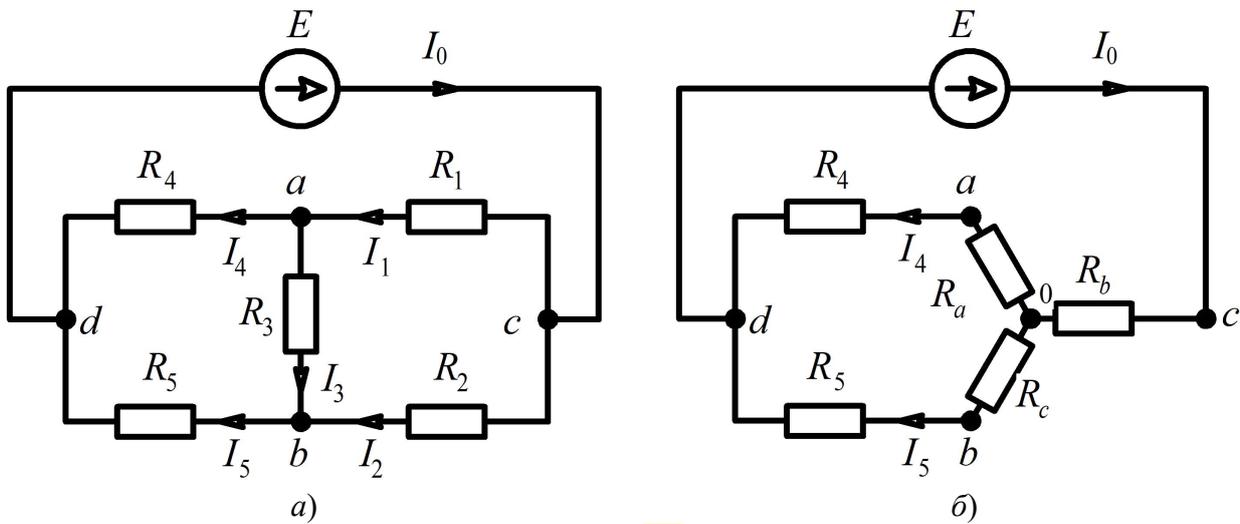


Рис. 2.9

Поскольку сопротивления между собой соединены параллельно, их общее сопротивление будет равно:

$$R_{ac45} = \frac{R_{a4} R_{c5}}{R_{a4} + R_{c5}} = \frac{10 \cdot 40}{10 + 40} = 8 \text{ Ом},$$

а общее сопротивление схемы (рис. 2.9, б):

$$R = R_b + R_{ac45} = 3 + 8 = 11 \text{ Ом}.$$

Тогда ток в неразветвленной части цепи, т.е. общий ток:

$$I_0 = E/R = 2,2/11 = 0,2 \text{ А}.$$

Напряжение на параллельном участке, т.е. на сопротивлении R_{ac45} , будет равно:

$$U_{ac45} = I_0 R_{ac45} = 0,2 \cdot 8 = 1,6 \text{ В} \text{ или } U_{ac45} = E - I_0 R_b = 2,2 - 0,2 \cdot 3 = 1,6 \text{ В}.$$

Значения токов в резисторах R_4 и R_5 получаются следующие:

$$I_4 = U_{ac45}/R_{a4} = 1,6/10 = 0,16 \text{ А}; \quad I_5 = U_{ac45}/R_{c5} = 1,6/40 = 0,04 \text{ А}.$$

Для определения тока I_3 в исходной схеме (рис. 2.9, а) составляется уравнение по второму закону Кирхгофа для контура abd :

$$I_3 R_3 + I_5 R_5 - I_4 R_4 = 0.$$

$$\text{Откуда } I_3 = \frac{I_4 R_4 - I_5 R_5}{R_3} = \frac{0,16 \cdot 4 - 0,04 \cdot 22}{60} = -0,004 \text{ А}.$$

Знак «минус» перед значением тока показывает, что ток I_3 направлен против произвольно выбранного направления тока, т. е. от узловой точки b к узловой точке a .

Тогда, воспользовавшись первым законом Кирхгофа для узловых точек a и b , можно определить искомые токи (рис. 2.9, а):

$$I_1 = I_4 + I_3 = 0,16 - 0,004 = 0,156 \text{ А}; \quad I_2 = I_5 - I_3 = 0,04 + 0,004 = 0,044 \text{ А}.$$

Для проверки используем первый закон Кирхгофа:

$$I_0 = I_1 + I_2 = 0,156 + 0,044 = 0,2 \text{ А}.$$

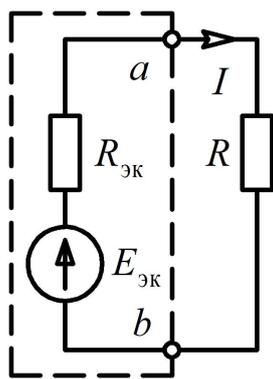
7. Метод эквивалентного генератора рационально применять в случае необходимости определения тока (напряжения, мощности и др.) только одной ветви сложной электрической цепи. В большинстве такой метод используют для проверки.

При использовании метода необходимо сложную электрическую цепь разбивают на две части – на сопротивление R , ток которого I нужно определить, и всю остальную цепь, ее называют *активным двухполюсником*, т. к. эта часть имеет две клеммы a и b , к которой и подключается сопротивление R (рис. 2.10).

Активным этот двухполюсник называют потому, что в нем имеется источник ЭДС $E_{\text{эк}}$. Этот активный двухполюсник обладает ЭДС $E_{\text{эк}}$ и внутренним сопротивлением $R_{\text{эк}}$ и называется *эквивалентным генератором*.

Ток в резисторе с сопротивлением R определяют по закону Ома \square :

$$I = E_{\text{эк}} / (R_{\text{эк}} + R).$$



Таким образом, определение тока I сводится к вычислению ЭДС эквивалентного генератора $E_{\text{эк}}$ и его внутреннего сопротивления $R_{\text{эк}}$.

Величина ЭДС $E_{\text{эк}}$ определяется любым методом расчета цепей постоянного тока относительно точек a и b при разомкнутых клеммах, т. е. в режиме холостого хода. Практически эту ЭДС можно измерить вольтметром, подключенным к клеммам a и b при холостом ходе.

Внутреннее сопротивление эквивалентного генератора $R_{\text{эк}}$ вычисляется относительно точек a и b после предварительной замены всех источников сложной схемы эквивалентного генератора их внутренними сопротивлениями.

Практически для определения внутреннего сопротивления эквивалентного генератора измеряют амперметром ток между точками a и b работающего двухполюсника при коротком замыкании, т. к. сопротивление амперметра настолько мало, что им можно пренебречь. Тогда

$$R_{\text{эк}} = U_{\text{х.х}} / I_{\text{к.з}},$$

где $U_{\text{х.х}}$ – напряжение холостого хода, $I_{\text{к.з}}$ – ток короткого замыкания.

Такой метод практического определения внутреннего сопротивления эквивалентного генератора $R_{\text{эк}}$ называется *методом холостого хода и короткого замыкания*.

В качестве примера рассмотрим электрическую цепь, представленную на рис 2.11, а. Для представленной схемы необходимо определить ток методом эквивалентного генератора, протекающий через сопротивление R_1 . Электрическая схема имеет следующие параметры: $E_1 = 40 \text{ В}$, $E_2 = 30 \text{ В}$, $r_{01} = r_{02} = 0,4 \text{ Ом}$, $R_1 = 30 \text{ Ом}$, $R_2 = R_3 = 10 \text{ Ом}$, $R_4 = R_5 = 3,6 \text{ Ом}$.

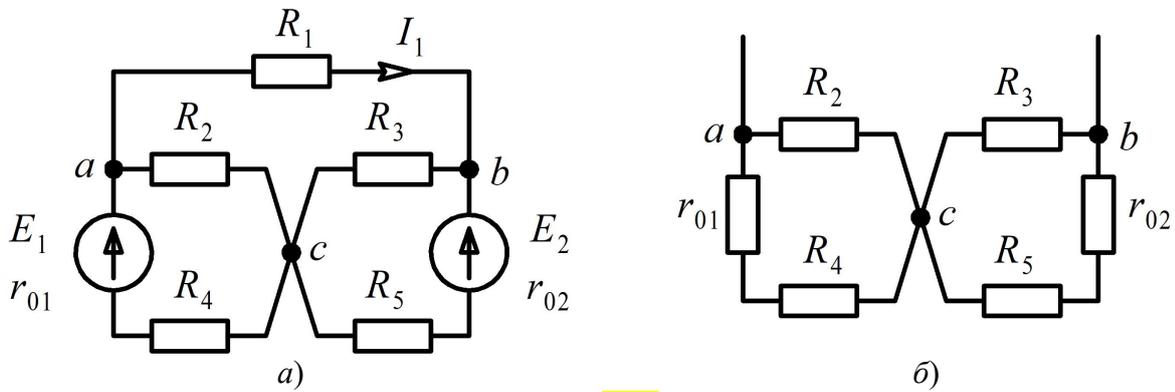


Рис. 2.11

Решение

Для определения тока I в сопротивлении R_1 определим ЭДС эквивалентного генератора $E_{\text{эк}}$ (рис. 2.11, а) и его внутреннее сопротивление $R_{\text{эк}}$ (рис. 2.11, б) при холостом ходе, т. е. разомкнутой цепи (между точками a и b).

ЭДС эквивалентного генератора определяется по формуле:

$$E_{\text{эк}} = U_{ac} - U_{bc}.$$

Знак «минус» обусловлен тем, что источники в схеме включены встречно и потенциал в точке a больше потенциала в точке b , т. к. $E_1 > E_2$.

Напряжения U_{ac} и U_{bc} можно определить по формулам:

$$U_{ac} = I_2 R_2 = \frac{E_1 R_2}{r_{01} + R_2 + R_4} = \frac{40 \cdot 10}{0,4 + 10 + 3,6} = 28,6 \text{ В};$$

$$U_{bc} = I_3 R_3 = \frac{E_2 R_3}{r_{02} + R_3 + R_5} = \frac{30 \cdot 10}{0,4 + 10 + 3,6} = 21,4 \text{ В}.$$

Следовательно, $E_{\text{эк}} = U_{ac} - U_{bc} = 28,6 - 21,4 = 7,2 \text{ В}$.

Внутреннее сопротивление эквивалентного генератора:

$$R_{\text{эк}} = \frac{R_2(r_{01} + R_4)}{R_2 + r_{01} + R_4} + \frac{R_3(r_{02} + R_5)}{R_3 + r_{02} + R_5} = \frac{10(0,4 + 3,6)}{10 + 0,4 + 3,6} + \frac{10(0,4 + 3,6)}{10 + 0,4 + 3,6} = 5,72 \text{ Ом}.$$

Искомый ток $I_1 = E_{\text{эк}} / (R_{\text{эк}} + R_1) = 7,2 / (5,72 + 30) = 0,2 \text{ А}$.

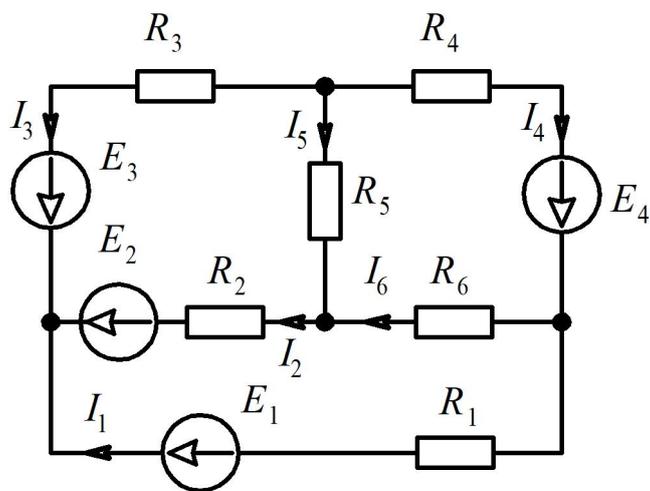


Рис. 2.12

8. Произведем расчет баланса мощности. Под балансом мощностей электрической цепи понимается равенство мощностей, развиваемой всеми источниками энергии данной цепи, и мощности, потребляемой всеми приемниками той же цепи (закон сохранения энергии).

Если на участке цепи ab имеется источник энергии с ЭДС E_{ab} и по этому участку протекает ток I_{ab} , то мощность, развиваемая этим источником, определяется произведением $E_{ab} I_{ab}$.

Каждый из множителей этого произведения может иметь положительный или отрицательный знак относительно направления ab . Произведение $E_{ab} I_{ab}$ будет иметь

положительный знак, если знаки расчетных величин E_{ab} и I_{ab} совпадают (мощность, развиваемая данным источником, отдается приемникам цепи). Произведение $E_{ab} I_{ab}$ будет

иметь отрицательный знак, если знаки E_{ab} и I_{ab} противоположны (источник потребляет мощность, развиваемую другими источниками). Примером может служить аккумулятор, находящийся в режиме зарядки. В этом случае мощность данного источника (слагаемое $E_{ab}I_{ab}$) входит в алгебраическую сумму мощностей, развиваемых всеми источниками цепи, с отрицательным знаком.

Теперь можно записать общий вид уравнения баланса мощностей:

$$\sum_k E_{k,ab} I_{k,ab} = \sum_m R_m I_m^2.$$

Произведем расчет баланса мощности на примере электрической схемы представленной на рис. 2.12. имеющей параметры, представленные в табл. 2.1. Знак «минус» при токах указывает на то, что в реальной схеме их направление противоположны указанным на рис. 2.12.

Таблица 2.1

Значения ЭДС (В)					
E_1	E_2	E_3	E_4		
20	25	17,5	30		
Значения сопротивлений (Ом)					
R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6
10	20	15	25	30	35
Значения токов в ветвях (А)					
I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6
0,505	0,104	-0,609	0,733	-0,124	0,228

Решение

Запишем баланс мощности для источников:

$$P_{\text{ист}} = E_1 I_1 + E_2 I_2 - E_3 I_3 + E_4 I_4;$$

$$P_{\text{ист}} = 20 \cdot 0,505 + 25 \cdot 0,104 - 17,5 \cdot 0,609 + 30 \cdot 0,733 = 24,022 \text{ Вт.}$$

Запишем баланс мощности для потребителей (резисторов):

$$P_{\text{потр}} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 + I_6^2 R_6;$$

$$P_{\text{потр}} = 0,51^2 \cdot 10 + 0,104^2 \cdot 20 + 0,61^2 \cdot 15 + 0,733^2 \cdot 25 + 0,124^2 \cdot 30 + 0,23^2 \cdot 35 = 24,022 \text{ Вт.}$$

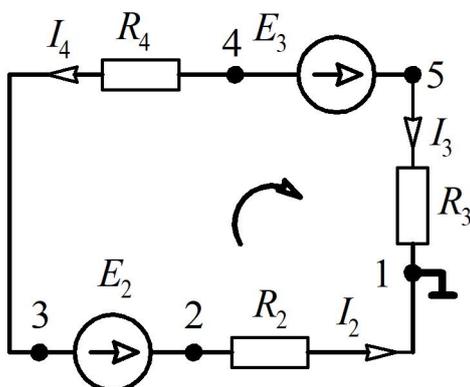


Рис. 2.13

9. *Потенциальной диаграммой* называется графическое изображение распределения электрического потенциала вдоль замкнутого контура в зависимости от сопротивления участков, входящих в выбранный контур.

Для построения потенциальной диаграммы выбирают замкнутый контур. Этот контур разбивают на участки таким образом, чтобы на участке находился один потребитель или источник энергии. Пограничные точки между участками необходимо обозначить буквами или цифрами.

Произвольно заземляют одну точку контура, ее потенциал условно считается нулевым. Обходя контур по часовой стрелке от точки с нулевым потенциалом, определяют потенциал каждой последующей пограничной точки как алгебраической суммы потенциала предыдущей точки и изменения потенциала между этими соседними точками.

Изменение потенциала на участке зависит от состава цепи между точками. Если на участке включен потребитель энергии (резистор), то изменение потенциала численно равно падению напряжения на этом резисторе. Знак этого изменения определяют направлением тока. При совпадении направлений тока и обхода контура знак отрицательный, в противном случае он положительный.

Если на участке находится источник ЭДС, то изменение потенциала здесь численно равно величине ЭДС данного источника. При совпадении направления обхода контура и направления ЭДС изменение потенциала положительно, в противном случае оно отрицательно.

После расчета потенциалов всех точек строят в прямоугольной системе координат потенциальную диаграмму. На оси абсцисс откладывают в масштабе сопротивление участков в той последовательности, в которой они встречались при обходе контура, а по оси ординат – потенциалы соответствующих точек. Потенциальная диаграмма начинается с нулевого потенциала и заканчивается после обхода контура таковым. При откладывании значений сопротивлений последующие значения откладываются от предыдущих.

Рассмотрим численный пример построения потенциальной диаграммы для цепи, изображенной на рис. 2.13 и имеющей следующие параметры: $E_2 = 40$ В; $E_3 = 24$ В; $R_2 = 10$ Ом; $R_3 = 15$ Ом; $R_4 = 20$ Ом; $I_2 = 0,531$ А; $I_3 = 0,135$ А; $I_4 = 0,586$ А. Направления токов указано на схеме.

Решение

Примем потенциал точки 1 равный нулю $\varphi_1 = 0$. Направление обхода контура примем по часовой стрелке и укажем его на схеме. Укажем на схеме точки, в которых происходит изменение потенциала. Для каждой точки запишем уравнение, по которому можно рассчитать потенциал:

$$\varphi_1 = 0;$$

$$\varphi_2 = I_2 R_2 = 0,531 \cdot 10 = 5,308 \text{ В};$$

$$\varphi_3 = \varphi_2 - E_2 = 5,308 - 40 = -34,692 \text{ В};$$

$$\varphi_4 = \varphi_3 + I_4 R_4 = -34,692 + (0,586 \cdot 20) = -22,978 \text{ В};$$

$$\varphi_5 = \varphi_4 + E_3 = -22,978 + 24 = 2,022 \text{ В};$$

$$\varphi_1 = \varphi_5 - I_3 R_3 = 2,022 - (0,135 \cdot 15) = 0 \text{ В}.$$

На основании полученных значений изменения потенциалов в декартовой системе координат построим потенциальную диаграмму. По оси ординат в масштабе откладываются потенциалы точек, а по оси абсцисс – сопротивления участков. Полученная потенциальная диаграмма представлена на рис. 2.14.

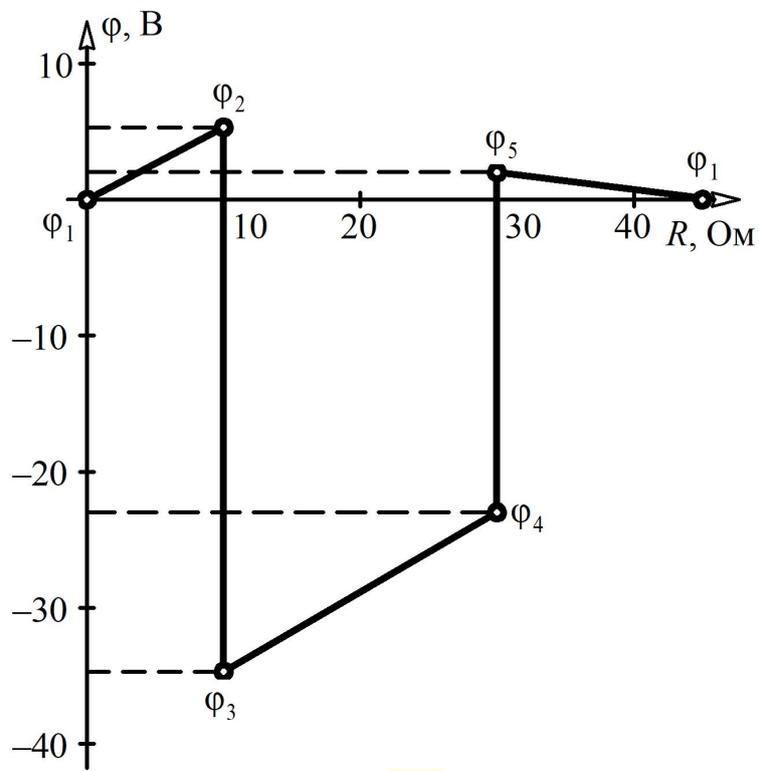


Рис. 2.14

ЧАСТЬ III

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

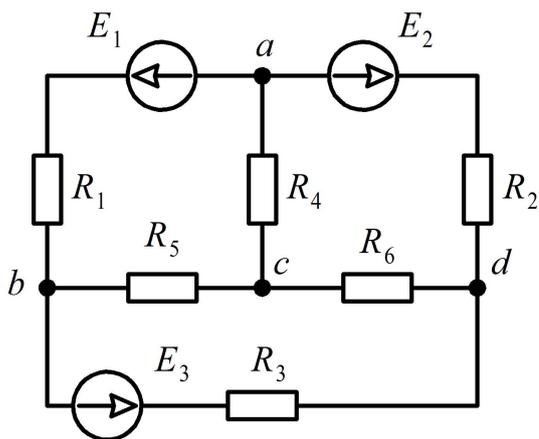


Рис. 3.1

Для электрической схемы, представленной на рис. 3.1, на основании данных представленных в табл. 3.1 необходимо:

- составить на основании законов Кирхгофа систему уравнений для определения значений токов ($I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6$) во всех ветвях схемы;
- определить токи во всех ветвях схемы методом контурных токов, методом узловых потенциалов и методом наложения. Полученные результаты расчета токов, проведенного двумя методами, свести в таблицу и сравнить между собой;
- определить ток в любой ветви заданной схемы, используя метод эквивалентного генератора
- рассчитать баланс мощностей в исходной схеме, вычислив суммарную мощность источников и суммарную мощность нагрузок (сопротивлений);
- рассчитать и выполнить построение потенциальной диаграммы.

Таблица 3.1

$R_1, \text{ Ом}$	$R_2, \text{ Ом}$	$R_3, \text{ Ом}$	$R_4, \text{ Ом}$	$R_5, \text{ Ом}$	$R_6, \text{ Ом}$	$E_1, \text{ В}$	$E_2, \text{ В}$	$E_3, \text{ В}$
6	12	9	5	20	20	20	20	22,5

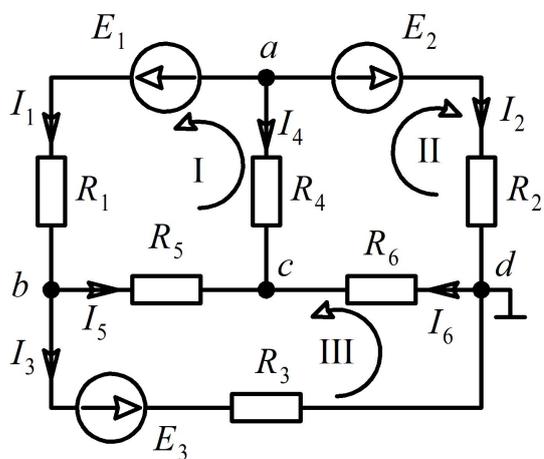


Рис. 3.2

Решение

1. На основании исходной электрической схемы (рис. 3.1) разработаем схему для проведения расчетов (рис. 3.2). На расчетной схеме, в произвольном порядке, произведем расстановку направления токов в ветвях, направления обхода контуров (направления контурных токов) и укажем узел, который подлежит заземлению, для проведения расчета по методу узловых потенциалов.

2. Определение числа уравнений. В схеме количество узлов $y = 4$; число ветвей $b = 6$.

Рассчитаем число независимых уравнений по законам Кирхгофа:

– по первому закону $N_1 = y - 1 = 4 - 1 = 3$;

– по второму закону $N_2 = b - N_1 = 6 - 3 = 3$.

Составим систему уравнений по законам Кирхгофа. По первому закону Кирхгофа три уравнения:

$$\begin{aligned} -I_1 - I_2 - I_4 &= 0 \text{ (узел } a); \\ I_1 - I_3 - I_5 &= 0 \text{ (узел } b); \\ I_4 + I_5 + I_6 &= 0 \text{ (узел } c). \end{aligned}$$

При составление уравнений учитывалось, что токи, вытекающие в узел берутся со знаком «+», а вытекающие – со знаком «-».

По второму закону Кирхгофа три уравнения:

$$I_1 R_1 - I_4 R_4 + I_5 R_5 = E_1 \text{ (первый контур);}$$

$$I_2 R_2 - I_4 R_4 + I_6 R_6 = E_2 \text{ (второй контур);}$$

$$I_3 R_3 - I_5 R_5 + I_6 R_6 = E_3 \text{ (третий контур).}$$

3. Решение методом контурных токов. Воспользуемся направлениями контурных токов указанных на рис. 3.2. Т. к. в схеме три замкнутых контура то и контурных токов будет три. На основании рис. 3.2 запишем уравнения для расчета истинных значений токов:

$$I_1 = I_I; I_2 = I_{II}; I_3 = I_{III}; I_4 = -I_I - I_{II}; I_5 = I_I - I_{III}; I_6 = I_{II} + I_{III}.$$

Запишем уравнения для каждого контура по второму закону Кирхгофа:

$$I_I(R_1 + R_4 + R_5) + I_{II}R_4 - I_{III}R_5 = E_1;$$

$$I_I R_4 + I_{II}(R_2 + R_4 + R_6) + I_{III}R_6 = E_2;$$

$$-I_I R_5 + I_{II}R_6 + I_{III}(R_3 + R_5 + R_6) = E_3.$$

Решим исходную систему матричным способом, для чего представим ее в виде:

$$[R][I] = [E].$$

Здесь матрица сопротивлений:

$$[R] = \begin{bmatrix} R_1 + R_4 + R_5 & R_4 & -R_5 \\ R_4 & R_2 + R_4 + R_6 & R_6 \\ -R_5 & R_6 & R_3 + R_5 + R_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 & 5 & -20 \\ 5 & 37 & 20 \\ -20 & 20 & 49 \end{bmatrix}.$$

Матрица столбец ЭДС:

$$[E] = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ 22,5 \end{bmatrix}.$$

Подставим численные значения в матрицу сопротивлений, столбец ЭДС и используя программный продукт *MathCad* рассчитаем контурные токи:

$$I_I = 1,441 \text{ А; } I_{II} = -0,283 \text{ А; } I_{III} = 1,163 \text{ А.}$$

Истинные значения токов на основании (1):

$$I_1 = 1,441 \text{ А; } I_2 = -0,283 \text{ А; } I_3 = 1,163 \text{ А; } I_4 = -1,158 \text{ А; } I_5 = 0,278 \text{ А; } I_6 = 0,88 \text{ А.}$$

4. Решение задачи методом узловых потенциалов. При решение данным методом воспользуемся так же схемой изображенной на рис. 3.2 и всеми обозначениями, нанесенными на нее. На первом этапе запишем уравнения для определения токов в ветвях:

$$I_1 = (\varphi_a - \varphi_b + E_1)/R_1; I_2 = (\varphi_a - \varphi_d + E_2)/R_2; I_3 = (\varphi_b - \varphi_d + E_3)/R_3;$$

$$I_4 = (\varphi_a - \varphi_c)/R_4; I_5 = (\varphi_b - \varphi_c)/R_5; I_6 = (\varphi_d - \varphi_c)/R_6.$$

где $\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c, \varphi_d$ – потенциалы соответствующих узлов схемы.

На втором этапе составим уравнения по второму закону Кирхгофа для каждого узла схема с учетом потенциала данного узла. При этом будем считать потенциал точки d равный нулю, а сопротивления заменим на проводимости:

$$\varphi_a \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} \right) - \varphi_b \frac{1}{R_1} - \varphi_c \frac{1}{R_4} = -\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2};$$

$$-\varphi_a \frac{1}{R_1} + \varphi_b \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} \right) - \varphi_c \frac{1}{R_5} = \frac{E_1}{R_1} - \frac{E_3}{R_3}$$

$$-\varphi_a \frac{1}{R_4} - \varphi_b \frac{1}{R_5} + \varphi_c \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \right) = 0.$$

Решение потенциальной системы из трех уравнений также определим матричным способом:

$$[G][\varphi]=[J],$$

для которой

$$[G]=\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_4} \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_5} \\ -\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_5} & \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,45 & -0,167 & -0,2 \\ -0,167 & 0,328 & -0,05 \\ -0,2 & 0,05 & 0,3 \end{bmatrix};$$

$$[J]=\begin{bmatrix} -(E_1/R_1) - (E_2/R_2) \\ (E_1/R_1) - (E_3/R_3) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0,833 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Подставим численные значения в матрицу проводимостей, столбец токов и используя программный продукт *MathCad* рассчитаем узловые потенциалы:

$$\varphi_a = -23,391 \text{ В}; \varphi_b = -12,036 \text{ В}; \varphi_c = -17,6 \text{ В}.$$

Используя выше приведенные формулы рассчитаем токи в ветвях:

$$I_1 = 1,441 \text{ А}; I_2 = -0,283 \text{ А}; I_3 = 2,578 \text{ А}; I_4 = -1,158 \text{ А}; I_5 = 0,278 \text{ А}; I_6 = 0,88 \text{ А}.$$

5. Сведем в табл. 3.2 токи, полученные тремя выше упомянутыми методами.

Таблица 3.2

	Метод контурных токов	Метод узловых потенциалов
Первый ток	1,441	1,441
Второй ток	-0,283	-0,283
Третий ток	1,163	1,163
Четвертый ток	-1,158	-1,158
Пятый ток	0,278	0,278
Шестой ток	0,88	0,88

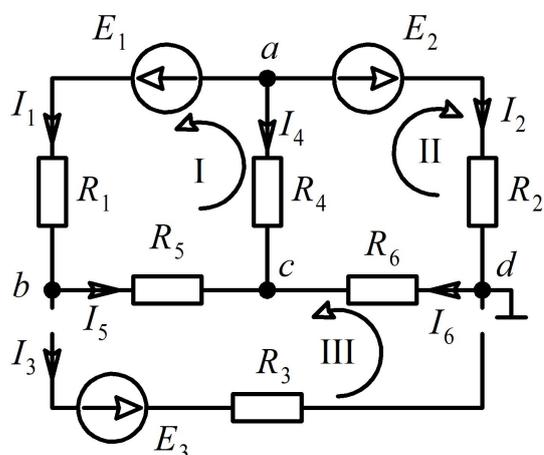


Рис. 3.3

6. Метод эквивалентного генератора.

Рассчитаем ток, протекающий через ветвь, в которую включено сопротивление R_3 . Для расчета схемы этим методом преобразуем первоначальную схему за счет исключения из нее сопротивления R_3 (рис. 3.3). При этом в схеме остается два контура и три тока (рис. 3.4). Запишем для узла a уравнение по первому закону Кирхгофа:

$$-I_1 - I_2 - I_3 = 0 \text{ (узел } a\text{)}.$$

Запишем уравнение по второму закону Кирхгофа для двух контуров схемы:

$$I_1(R_1 + R_5) - I_3R_4 = E_1;$$

$$I_2(R_2 + R_6) - I_3R_4 = E_2.$$

Для определения токов в схеме представим

полученные уравнения в форме (2):

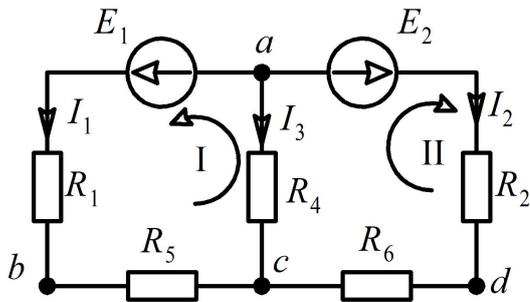


Рис. 3.4

$$[R][I] = [E].$$

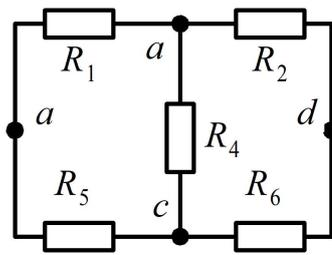


Рис. 3.5

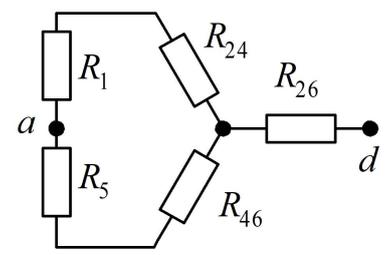


Рис. 3.6

Здесь матрица сопротивлений:

$$[R] = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ R_1 + R_5 & 0 & -R_4 \\ 0 & (R_2 + R_6) & -R_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 26 & 0 & -5 \\ 0 & 32 & -5 \end{bmatrix}.$$

Матрица столбец ЭДС:

$$[E] = \begin{bmatrix} 0 \\ E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \\ 20 \end{bmatrix}.$$

Подставим численные значения в матрицу сопротивлений, столбец ЭДС и используя программный продукт *MathCad* рассчитаем контурные токи:

$$I_1 = 0,57 \text{ А}; I_2 = 0,463 \text{ А}; I_3 = -1,034 \text{ А}.$$

Для определения напряжения, на выводах эквивалентного генератора работающего на холостом ходу воспользуемся уравнением, записанным по второму закону Кирхгофа:

$$-I_1 R_5 + I_2 R_6 + U_{\text{х.х.}} = 0;$$

$$U_{\text{х.х.}} = I_1 R_5 - I_2 R_6 = 0,57 \cdot 20 - 0,463 \cdot 20 = 2,193 \text{ В}.$$

Определим внутреннее сопротивление эквивалентного генератора (рис. 3.5) относительно узловых точек *a* и *d*. При определении сопротивления осуществим переход от соединения «треугольник» (образованного между узлами *a*, *c*, *d*) к эквивалентной «звезде» с соответствующими сопротивлениями (рис. 3.6):

$$R_{24} = \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4 + R_6} = \frac{12 \cdot 5}{12 + 5 + 20} = 1,622 \text{ Ом};$$

$$R_{26} = \frac{R_2 R_6}{R_2 + R_4 + R_6} = \frac{12 \cdot 20}{12 + 5 + 20} = 6,486 \text{ Ом};$$

$$R_{46} = \frac{R_4 R_6}{R_2 + R_4 + R_6} = \frac{20 \cdot 5}{12 + 5 + 20} = 2,703 \text{ Ом}.$$

Определим эквивалентное сопротивление:

$$R_{\text{эк}} = R_{26} + \frac{(R_1 + R_{24})(R_5 + R_{46})}{R_1 + R_{24} + R_5 + R_{46}} = 6,486 + \frac{(6 + 1,622)(20 + 2,703)}{6 + 1,622 + 20 + 2,703} = 12,193 \text{ Ом}.$$

На основании напряжения $U_{\text{х.х.}}$ и сопротивления эквивалентного генератора $R_{\text{эк}}$, а так же значения сопротивления R_3 , напряжений источников ЭДС E_3 и E_4 определим ток, протекающий через сопротивление R_3 :

$$I_3 = \frac{U_{\text{х.х.}} + E_3}{R_{\text{эк}} + R_3} = \frac{2,139 + 22,5}{12,193 + 9} = 1,163 \text{ А}.$$

Полученное значение тока численно соответствует значению, рассчитанному с использованием других методов (методы контурных токов и узловых потенциалов).

7. Произведем расчет мощности выдаваемой источниками и потребляемой нагрузкой:

$$P_{\text{ист}} = E_1 I_1 - E_2 I_2 + E_3 I_3 = 20 \cdot 1,441 - 21 \cdot 0,283 + 22,5 \cdot 1,163 = 49,323 \text{ Вт};$$

$$P_{\text{нагр}} = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 + R_5 I_5^2 + R_6 I_6^2;$$

$$P_{\text{нагр}} = 6 \cdot 1,44^2 + 12 \cdot (-0,28)^2 + 9 \cdot 1,16^2 + 5 \cdot (-1,16)^2 + 20 \cdot 0,278^2 + 20 \cdot 0,88^2 = 49,323 \text{ Вт}.$$

На основании сравнения между собой двух рассчитанных мощностей:

$$P_{\text{ист}} = P_{\text{нагр}}; 49,323 \text{ Вт} = 49,323 \text{ Вт},$$

следует, что баланс мощности выполняется, а значит расчет выполнен верно.

8. Построим потенциальную диаграмму для внешнего контура схемы (рис. 3.1). Для

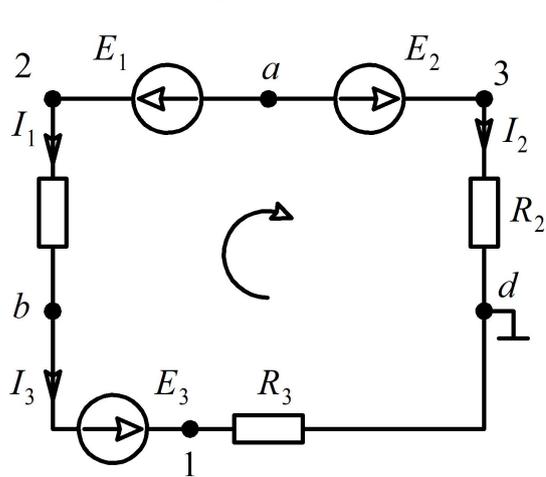


Рис. 3.7

этого заземлим одну из точек схемы (точка d), выберем контур обхода (по часовой стрелке) и проставим точки, в которых происходит изменение потенциала (рис. 3.7). Так же запишем уравнения для определения потенциалов в заданных точках:

$$\varphi_d = 0;$$

$$\varphi_1 = \varphi_d + I_3 R_3 = 0 + 1,163 \cdot 9 = 10,464 \text{ В};$$

$$\varphi_b = \varphi_1 - E_3 = 10,464 - 22,5 = -12,036 \text{ В};$$

$$\varphi_2 = \varphi_b + I_1 R_1 = -12,036 + 1,441 \cdot 6 = -3,391 \text{ В};$$

$$\varphi_a = \varphi_2 - E_1 = -3,391 - 20 = -23,391 \text{ В};$$

$$\varphi_3 = \varphi_a + E_2 = -23,391 + 20 = -3,391 \text{ В};$$

$$\varphi_d = \varphi_3 - I_2 R_2 = -3,391 - 0,283 \cdot 12 = 0 \text{ В}.$$

На основании полученной системы уравнений на рис. 3.7 построена потенциальная диаграмма.

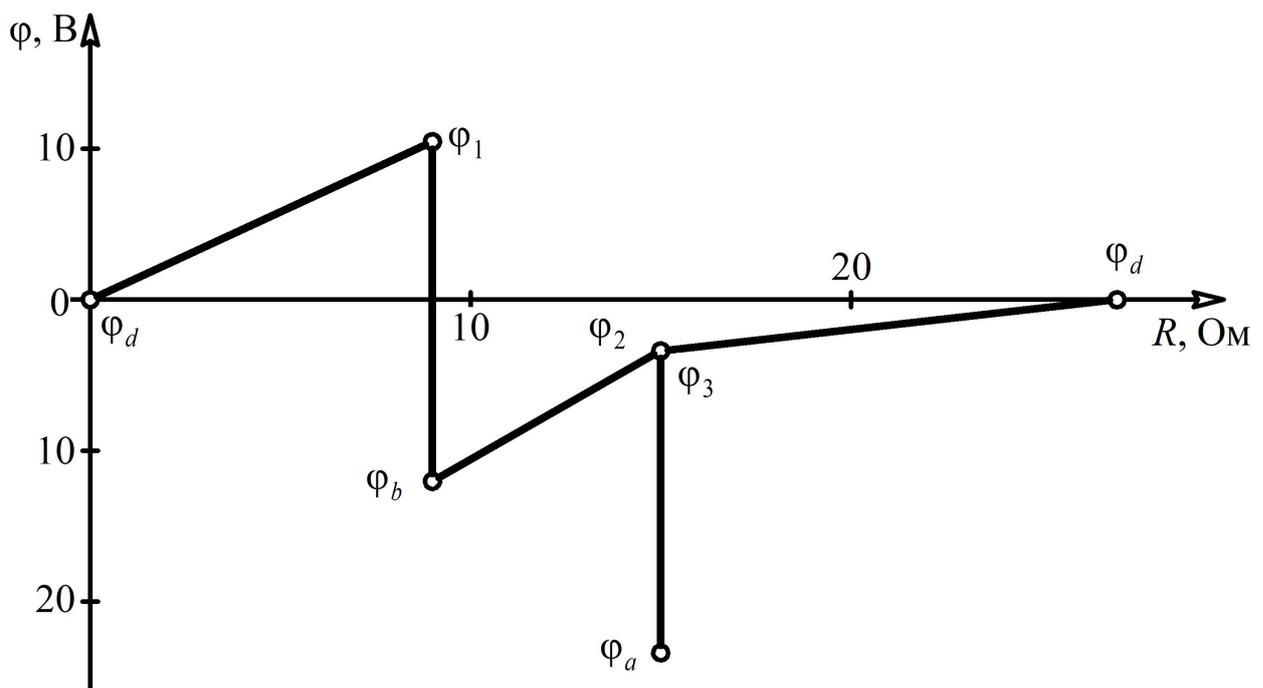


Рис. 3.7