Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики»
(СибГУТИ)

Карелин И.Н.

Методические указания
к лабораторной работе
по дисциплине

«Математические модели в коммерческой деятельности»

Новосибирск, 2023

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА «СТАНДАРТНАЯ ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА»

1. **Цель работы:** Приобретение навыков построения математических моделей стандартных транспортных задач ЛП и решения их в Microsoft Excel.

2. **Порядок выполнения работы**

1. Согласно номеру своего варианта выберите условие задачи. Вариант выбирается по последней цифре пароля студента от входа в личный кабинет.

2. Постройте модель задачи, включая транспортную таблицу.

3. Найдите оптимальное решение задачи в Excel и продемонстрируйте его преподавателю.

4. Оформите отчет по лабораторной работе, который должен содержать:

• титульный лист;

• транспортную таблицу и модель задачи с указанием всех единиц измерения;

• результаты решения задачи с указанием единиц измерения.

3. **Теоретическая часть**

3.1. Стандартная модель транспортной задачи (ТЗ)

Примером типичной транспортной задачи является распределение (транспортировка) продукции, находящейся на складах, по предприятиям-потребителям.

Стандартная ТЗ определяется как задача разработки наиболее экономичного плана перевозки продукции одного вида из нескольких пунктов отправления в пункты назначения. При этом величина транспортных расходов прямо пропорциональна объему перевозимой продукции и задается с помощью тарифов на перевозку единицы продукции.

Исходные параметры модели ТЗ

a) n – количество пунктов отправления, m – количество пунктов назначения.

b) a_i – запас продукции в пункте отправления A_i (i=1,..,n) [ед. тов.].

c) b_j – спрос на продукцию в пункте назначения B_j (j=1,..,n) [ед. тов.].

d) c_{ij} – тариф (стоимость) перевозки единицы продукции из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j [руб./ед. тов.].

Искомые параметры модели ТЗ

1. x_{ij} – количество продукции, перевозимой из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j [ед. тов.].

2. L(X) – транспортные расходы на перевозку всей продукции [руб.].

Этапы построения модели

I. Определение переменных.

II. Проверка сбалансированности задачи.

III. Построение сбалансированной транспортной матрицы.

IV. Задание ЦФ.

V. Задание ограничений.

Транспортная модель

$$L(X)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}c_{ij}x_{ij}\rightarrow \min;$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i,\ i=\overline{1,n},\\ \sum_{i=1}^{n}x_{ij}=b_j,\ j=\overline{1,m},\\ \forall x_{ij}\geq 0\left(i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m}\right).\end{cases} \quad (1)$$

Целевая функция представляет собой транспортные расходы на осуществление всех перевозок в целом. Первая группа ограничений указывает, что запас продукции в любом пункте отправления должен быть равен суммарному объему перевозок продукции из этого пункта. Вторая группа ограничений указывает, что суммарные перевозки продукции в некоторый пункт потребления должны полностью удовлетворить спрос на продукцию в этом пункте. Наглядной формой представления модели ТЗ является транспортная матрица (табл. 1).

Таблица 1

Общий вид транспортной матрицы

Пункты отправления, A_i	Пункты потребления, B_j				Запасы, [ед. прод.]
	B_1	B_2	…	B_m	
A_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1m}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2m}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_n	c_{n1}	c_{n2}	…	c_{nm}	a_n
Потребность [ед. прод.]	b_1	b_2	…	b_m	$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$

Из модели (1) следует, что сумма запасов продукции во всех пунктах отправления должна равняться суммарной потребности во всех пунктах потребления, то есть

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j. \qquad (2)$$

Если (2) выполняется, то ТЗ называется сбалансированной, в противном случае – несбалансированной. Поскольку ограничения модели (1) могут быть выполнены только при сбалансированной ТЗ, то при построении транспортной модели необходимо проверять условие баланса (2). В случае, когда суммарные запасы превышают суммарные потребности, необходим дополнительный фиктивный пункт потребления, который будет формально потреблять существующий излишек запасов, то есть

$$b_ф = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{j=1}^{m} b_j. \qquad (3)$$

Если суммарные потребности превышают суммарные запасы, то необходим дополнительный фиктивный пункт отправления, формально восполняющий существующий недостаток продукции в пунктах отправления:

$$a_ф = \sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{i=1}^{n} a_i. \quad (4)$$

Введение фиктивного потребителя или отправителя повлечет необходимость формального задания фиктивных тарифов $c^Ф_{ij}$ (реально не существующих) для фиктивных перевозок. Поскольку нас интересует определение наиболее выгодных реальных перевозок, то необходимо предусмотреть, чтобы при решении задачи (при нахождении опорных планов) фиктивные перевозки не рассматривались до тех пор, пока не будут определены все реальные перевозки. Для этого надо фиктивные перевозки сделать невыгодными, то есть дорогими, чтобы при поиске решения задачи их рассматривали в самую последнюю очередь. Таким образом, величина фиктивных тарифов должна превышать максимальный из реальных тарифов, используемых в модели, то есть

$$c^ф_{ij} > \max c_{ij} \left(i = \overline{1,n}; j = \overline{1,m}\right).$$

На практике возможны ситуации, когда в определенных направлениях перевозки продукции невозможны, например, по причине ремонта транспортных магистралей. Такие ситуации моделируются с помощью введения так называемых запрещающих тарифов з ij c . Запрещающие тарифы должны сделать невозможными, то есть совершенно невыгодными, перевозки в соответствующих направлениях. Для этого величина запрещающих тарифов должна превышать максимальный из реальных тарифов, используемых в модели:

$$c^з_{ij} > \max c_{ij} \left(i = \overline{1,n}; j = \overline{1,m}\right).$$

3.2. Пример построения модели ТЗ

Пусть необходимо организовать оптимальные по транспортным расходам перевозки муки с двух складов в три хлебопекарни. Ежемесячные запасы муки на складах равны 79,515 и 101,925 т, а ежемесячные потребности хлебопекарен составляют 68,0; 29,5 и 117,4 т соответственно. Мука на складах хранится и транспортируется в мешках по 45 кг. Транспортные расходы (руб./т) по доставке муки представлены в табл. 2. Между первым складом и второй хлебопекарней заключен договор о гарантированной поставке 4,5 т муки ежемесячно. В связи с ремонтными работами временно невозможна перевозка из второго склада в третью хлебопекарню.

Таблица 2

Транспортные расходы по доставке муки (руб./т)

Склады	Хлебопекарни		
	Х1	Х2	Х3
С1	350	190	420
С2	400	100	530

ТЗ представляет собой задачу ЛП, которую можно решать симплексметодом, что и происходит при решении таких задач в Excel. В то же время существует более эффективный вычислительный метод – метод потенциалов, в случае применения которого используется специфическая структура условий ТЗ (1) и, по существу, воспроизводятся шаги симплекс-алгоритма. Исходя из этого, в лабораторной работе необходимо построить модель задачи вида (1), пригодную для ее решения методом потенциалов.

Определение переменных

Обозначим через x_{ij} [меш.] количество мешков с мукой, которые будут перевезены с i-го склада в j-ю хлебопекарню.

Проверка сбалансированности задачи

Прежде чем проверять сбалансированность задачи, надо исключить объем гарантированной поставки из дальнейшего рассмотрения. Для этого вычтем 4,5 т из следующих величин:

• из запаса первого склада a_1=79,515-4,5=75,015 т/мес.;

• из потребности в муке второй хлебопекарни b_2=29,5-4,500= 25,000 т/|мес.

Согласно условию задачи мука хранится и перевозится в мешках по 45 кг, то есть единицами измерения переменных x_{ij} являются мешки муки. Но запасы муки на складах и потребности в ней магазинов заданы в тоннах. Поэтому для проверки баланса и дальнейшего решения задачи приведем эти величины к одной единице измерения – мешкам. Например, запас муки на первом складе равен 1667 меш/мес., а потребность первой хлебопекарни составляет 1512 меш/мес. Округление при расчете потребностей надо проводить в большую сторону, иначе потребность в муке не будет удовлетворена полностью.

Для данной ТЗ имеет место соотношение

$$\underbrace{\overbrace{1667+2265}^{\text{склады}}}_{3932\ \text{меш./мес.}} < \underbrace{\overbrace{1512+556+2609}^{\text{хлебопекарни}}}_{4677\ \text{меш./мес.}}.$$

Ежемесячный суммарный запас муки на складах меньше суммарной потребности хлебопекарен на 4677-3932=745 мешков муки, откуда следует вывод: ТЗ не сбалансирована.

Построение сбалансированной транспортной матрицы

Сбалансированная транспортная матрица представлена в таблице 3. Стоимость перевозки муки должна быть отнесена к единице продукции, то есть к 1 мешку муки. Так, например, тариф перевозки из первого склада в третий магазин равен 18,9 р./меш.

Для установления баланса необходим дополнительный фиктивный склад, то есть дополнительная строка в транспортной таблице задачи. Фиктивные тарифы перевозки зададим таким образом, чтобы они были дороже реальных тарифов, например, 50,00 руб./меш.

Невозможность доставки грузов со второго склада в третью хлебопекарню задается в модели с помощью запрещающего тарифа, который должен превышать величину фиктивного тарифа, например, $c^{з}_{23}$=50 руб./меш.

Таблица 3

Транспортная матрица задачи

Склады	Хлебопекарни			Запас, мешки
	X_1	X_2	X_3	
C_1	15,75	8,55	18,90	1667
C_2	18,00	4,50	**100,00**	2265
$C_ф$	**50,00**	**50,00**	**50,00**	745
Потребность, мешки	1512	556	2609	$\sum=$ **4677**

Задание ЦФ

Формальная ЦФ, то есть суммарные затраты на все возможные перевозки муки, учитываемые в модели, задается следующим выражением:

$$L(X) = 15{,}75x_{11} + 8{,}55x_{12} + 18{,}90x_{13} + \\ + 18{,}00x_{21} + 4{,}50x_{22} + 100{,}00x_{23} + \\ + 50{,}00x_{31} + 50{,}00x_{32} + 50{,}00x_{33} \to \min \text{ (руб./мес.)}. \quad (5)$$

При этом следует учитывать, что вследствие использования фиктивных тарифов реальная ЦФ (то есть средства, которые в действительности придется заплатить за транспортировку муки) будет меньше формальной ЦФ (5) на стоимость найденных в процессе решения фиктивных перевозок.

Задание ограничений

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1667, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 2265, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 745, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1512, \quad \text{(меш./мес.)} \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 556, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 2609, \\ x_{ij} \ge 0 \left(\forall i = \overline{1,3}; \forall j = \overline{1,3}\right). \end{cases}$$

4. **Решение целочисленной двухиндексной задачи ЛП в Excel**

Двухиндексные задачи ЛП вводятся и решаются в Excel аналогично одноиндексным задачам. Специфика ввода условия двухиндексной задачи

ЛП состоит лишь в удобстве матричного задания переменных задачи и коэффициентов ЦФ.

Рассмотрим решение целочисленной двухиндексной задачи, суть которой заключается в оптимальной организации транспортных перевозок штучного товара со складов в магазины (табл.4).

Таблица 4

Исходные данные транспортной задачи

Тарифы, руб./шт.	1-й магазин	2-й магазин	3-й магазин	Запасы, шт.
1-й склад	2	9	7	25
2-й склад	1	0	5	50
3-й склад	5	4	100	35
4-й склад	2	3	6	75
Потребности, шт.	45	90	50	

Целевая функция и ограничения данной задачи имеют вид

$$\begin{aligned} L(X) = {} & 2x_{11} + 9x_{12} + 7x_{13} + x_{21} + 5x_{23} + 5x_{31} + \\ & + 4x_{32} + 100x_{33} + 2x_{41} + 3x_{42} + 6x_{43} \to \min; \end{aligned} \qquad (4.6)$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 25, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 50, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 35, \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} = 75, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 45, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 90, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 50, \\ \forall x_{ij} \geq 0, \forall x_{ij} - \text{целые} \left(i = \overline{1,4};\ j = \overline{1,3}\right). \end{cases}$$

Экранные формы, задание переменных, целевой функции, ограничений и граничных условий двухиндексной задачи и ее решение представлены на рис. 1, 2, 3 и в табл. 5.

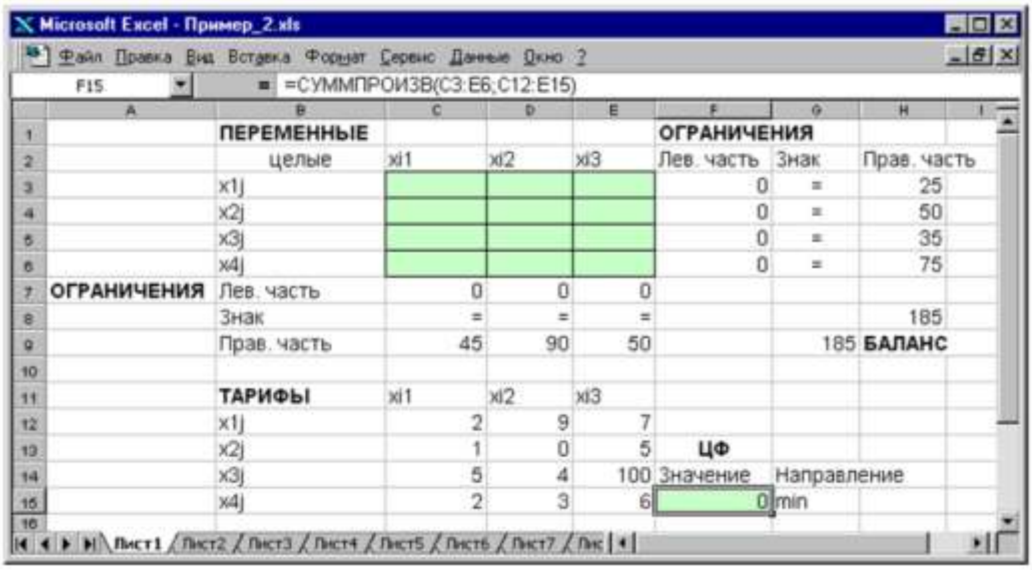


Рис.1. Экранная форма двухиндексной задачи (курсор в целевой ячейке F15)

Таблица 5

Формулы экранной формы задачи

Объект математической модели	Выражение в Excel
Переменные задачи	**C3:E6**
Формула в целевой ячейке **F15**	**=СУММПРОИЗВ(C3:E6;C12:E15)**
Ограничения по строкам в ячейках **F3, F4, F5, F6**	**=СУММ(C3:E3)** **=СУММ(C4:E4)** **=СУММ(C5:E5)** **=СУММ(C6:E6)**
Ограничения по столбцам в ячейках **C7, D7, E7**	**=СУММ(C3:C6)** **=СУММ(D3:D6)**
	=СУММ(E3:E6)
Суммарные запасы и потребности в ячейках **H8, G9**	**=СУММ(H3:H6)** **=СУММ(C9:E9)**

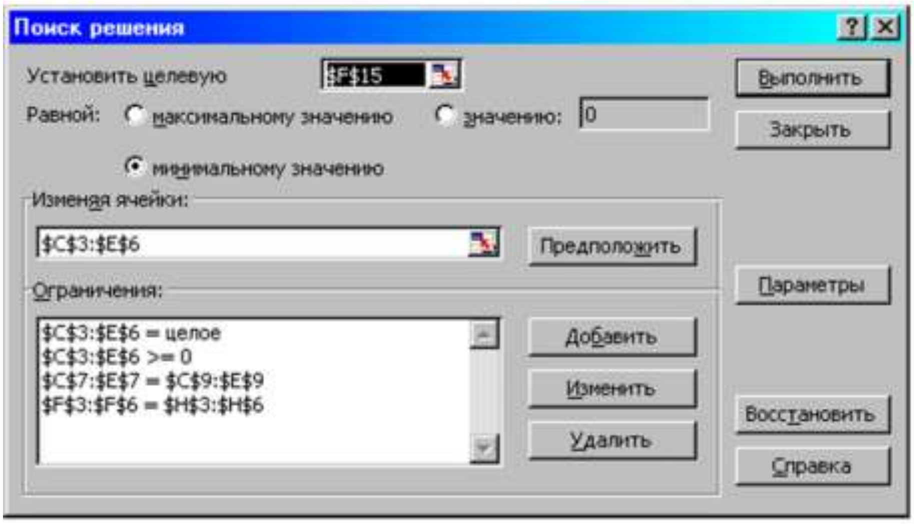
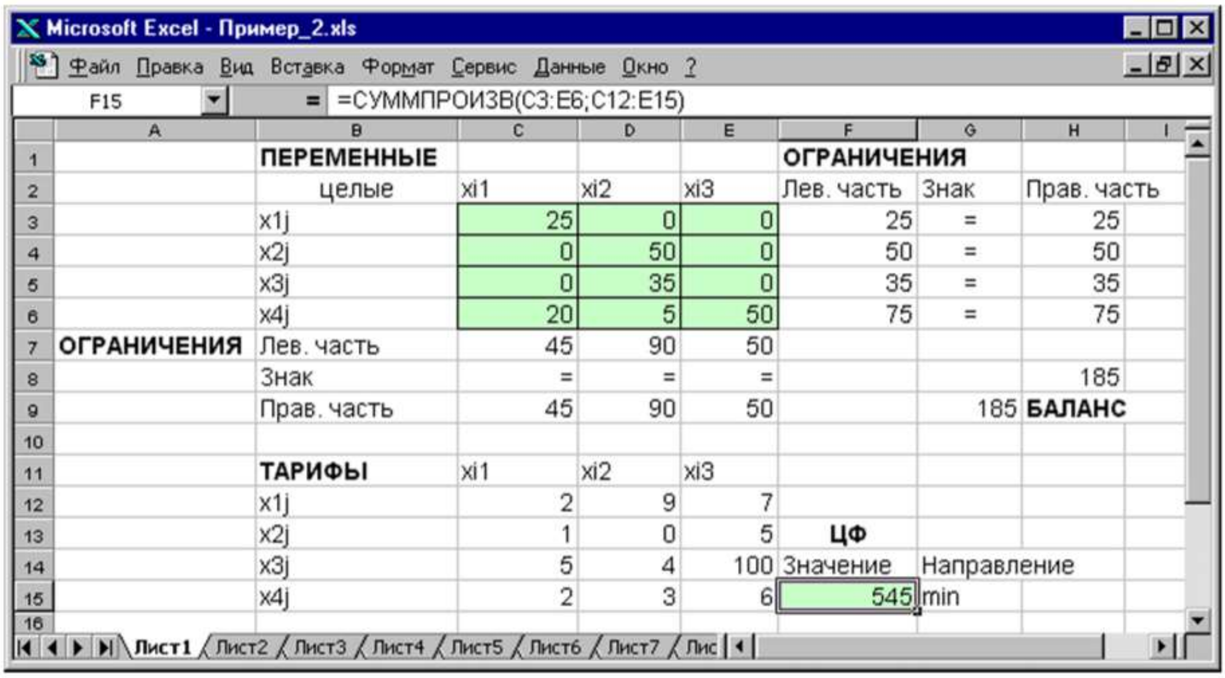


Рис. 2. Ограничения и граничные условия задачи



Microsoft Excel - Пример_2.xls

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно ?

F15 = =СУММПРОИЗВ(C3:E6;C12:E15)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		**ПЕРЕМЕННЫЕ**				**ОГРАНИЧЕНИЯ**		
2		целые	xi1	xi2	xi3	Лев. часть	Знак	Прав. часть
3		x1j	25	0	0	25	=	25
4		x2j	0	50	0	50	=	50
5		x3j	0	35	0	35	=	35
6		x4j	20	5	50	75	=	75
7	**ОГРАНИЧЕНИЯ**	Лев. часть	45	90	50			
8		Знак	=	=	=			185
9		Прав. часть	45	90	50		185	**БАЛАНС**
10								
11		**ТАРИФЫ**	xi1	xi2	xi3			
12		x1j	2	9	7			
13		x2j	1	0	5	**ЦФ**		
14		x3j	5	4	100	Значение	Направление	
15		x4j	2	3	6	545	min	
16								

Лист1 / Лист2 / Лист3 / Лист4 / Лист5 / Лист6 / Лист7 / Лис

Рис. 3. Экранная форма после получения решения задачи (курсор в целевой ячейке F15)

5. **Варианты постановки задачи**

На складах в федеральных округах Российской Федерации хранится картофель, который необходимо перераспределить по этим же федеральным округам. Данные о потреблении картофеля на душу населения по федеральным округам находятся в статистическом сборнике Регионы России. Социально-экономические показатели табл. 4.29 (http://rosstat.gov.ru/storage//2023/04-19/zWBpBEse/RR_pokaz_04-29_2022.xlsx). Данные по средней численности населения находятся в табл. 2.2 (http://rosstat.gov.ru/storage//2023/04-19/Tdt5j4g3/RR_pokaz_02-02_2022.xlsx). Данные по производству картофеля находятся в табл. 14.20 (http://rosstat.gov.ru/storage//2023/04-19/Qv2Bm4qY/RR_pokaz_14-20_2022.xlsx). За стоимости перевозок между федеральными округами можно принять расстояния между столицами федеральных округов по автомобильным дорогам общего пользования.

Необходимо организовать перераспределение картофеля таким образом, чтобы суммарные затраты на перевозку были минимальные.

Вариант лабораторной работы соответствует последней цифре пароля студента от входа в личный кабинет, и в соответствии с вариантом выбирается год, за который необходимо решить задачу.

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Год	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021