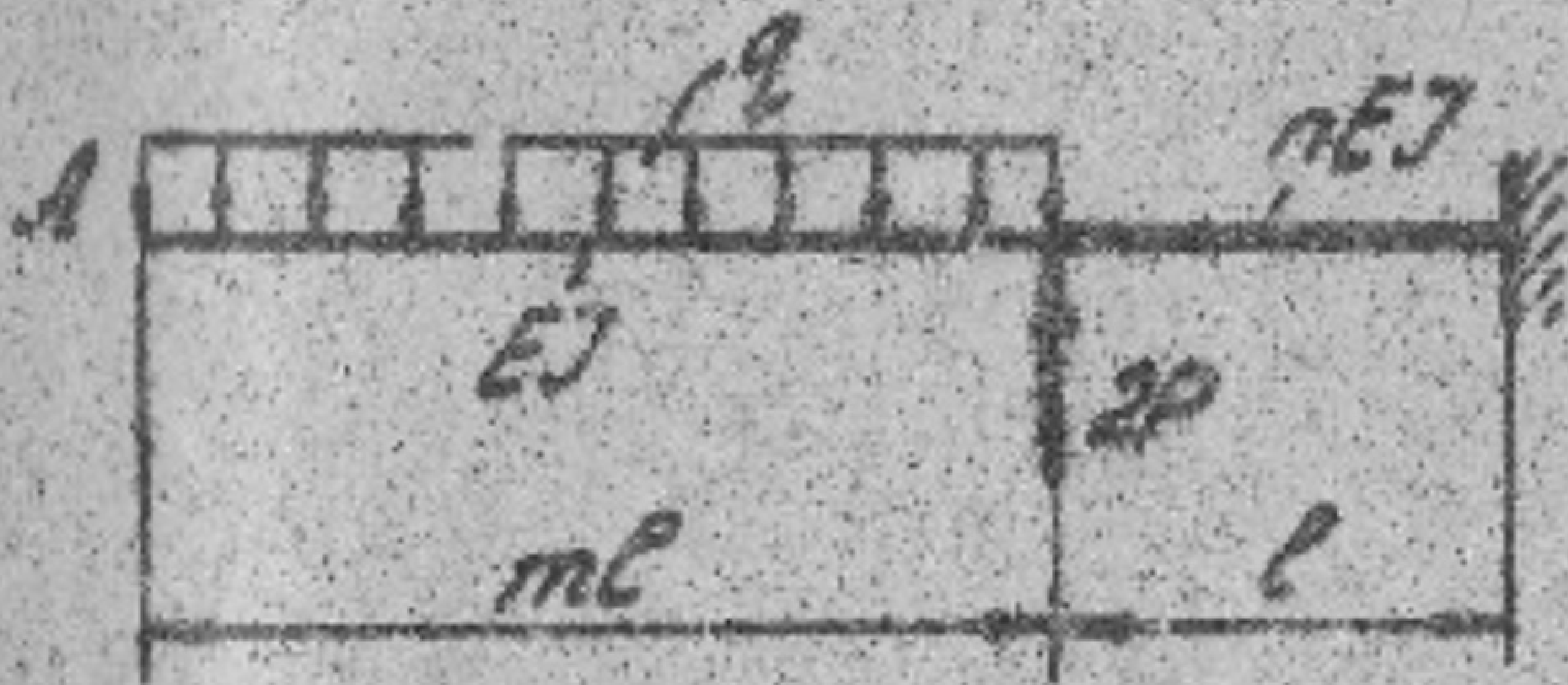
Для балок, расчетные схемы которых показаны на рис. I6.I, определить прогиб и угол поворота сечения А и показать форму изогнутой оси. Для решения воспользоваться интегралами Мора, вычисление которых следует провести либо аналитически, либо способом Верещагина.

Исходные данные для решения взять из таблицы I6.I. Принять $P = ql$, $M = ql^2$.

Таблица I6.I

Номер строки	Номер схемы: вариант А $g+e \le 10$	Номер схемы: вариант В $g+e > 10$	q кН/м	m	n	l см	EJ кН·м²
I	I	II	I 0	2	3	50	I00
2	2	I2	I 2	I	2	60	240
3	3	I3	I 4	5	4	I0	I20
4	4	I4	I 6	3	2	30	220
5	5	I5	I.8	4	4	20	I40
6	6	I6	2.0	3	3	35	I60
7	7	I7	I I	2	2	40	200
8	8	I8	I 3	I	2	70	220
9	9	I9	I 5	4	3	25	I60
0	I0	20	I 7	5	4	I5	I10
	е	е	г	g	е	г	в

15.



Пример. Для балки, которая показана на рисунке I6.2а, определить прогиб (y_A) и угол поворота (θ_A) сечения А. Известно, что $q = 2\frac{кН}{м}$, ℓ =40 см, жесткость балки при изгибе EJ= 200 кН м^2.

Решение: Для вычисления перемещения с помощью интегралов Мора поступают следующим образом: I) находят выражения для изгибающих моментов М(x) на каждом силовом участке балки (рисунок I6.2б, сечения I и П); 2) при определении прогиба рассматривают данную балку под действием единичной сосредоточенной силы, приложенной в том сечении, где ищется прогиб (рис. I6.2г), и также находят выражения изгибающих моментов $\bar{M}(x)$ в тех же сечениях; 3) при определении угла поворота сечения вместо единичной силы прикладывают единичный сосредоточенный момент (рис. I6.2д) и находят выражения изгибающих моментов М ; 4) разбивают балку на участки, в пределах которых произведение $\frac{M_i(x)\cdot\bar{M}_i(x)}{(EJ)_i}$ является непрерывной функцией; 5) искомое перемещение δ_A вычисляют по формуле

$$\delta_A = \sum_{i=1}^{n}\int_{\ell_i}\frac{M_i(x)\cdot\bar{M}_i(x)}{(EJ)_i}dx \quad , \qquad (I)$$

где n - число участков, ℓ_i- длина участка (i).

Проведем все эти операции для рассматриваемой задачи. Запишем выражения изгибающих моментов. Изгибающие моменты от заданных сил для участков балки I и П (рис. I6.2б) равны

$$M_1 = M_0 = 4q\ell^2 ; \quad M_2 = q\ell x_2 - \frac{qx_2^2}{2} . \qquad (2)$$

Изгибающие моменты от единичной сосредоточенной силы (рис. I6.2г) в тех же сечениях равны

$$\bar{M}_1 = x_1 \quad ; \quad M_2 = -\frac{x_2}{4} . \qquad (3)$$

Изгибающие моменты от сосредоточенного момента (рис. I6.2д) в тех же сечениях равны

$$\bar{M}_1 = 1 \quad ; \quad M_2 = -\frac{x_2}{4\ell} . \qquad (4)$$

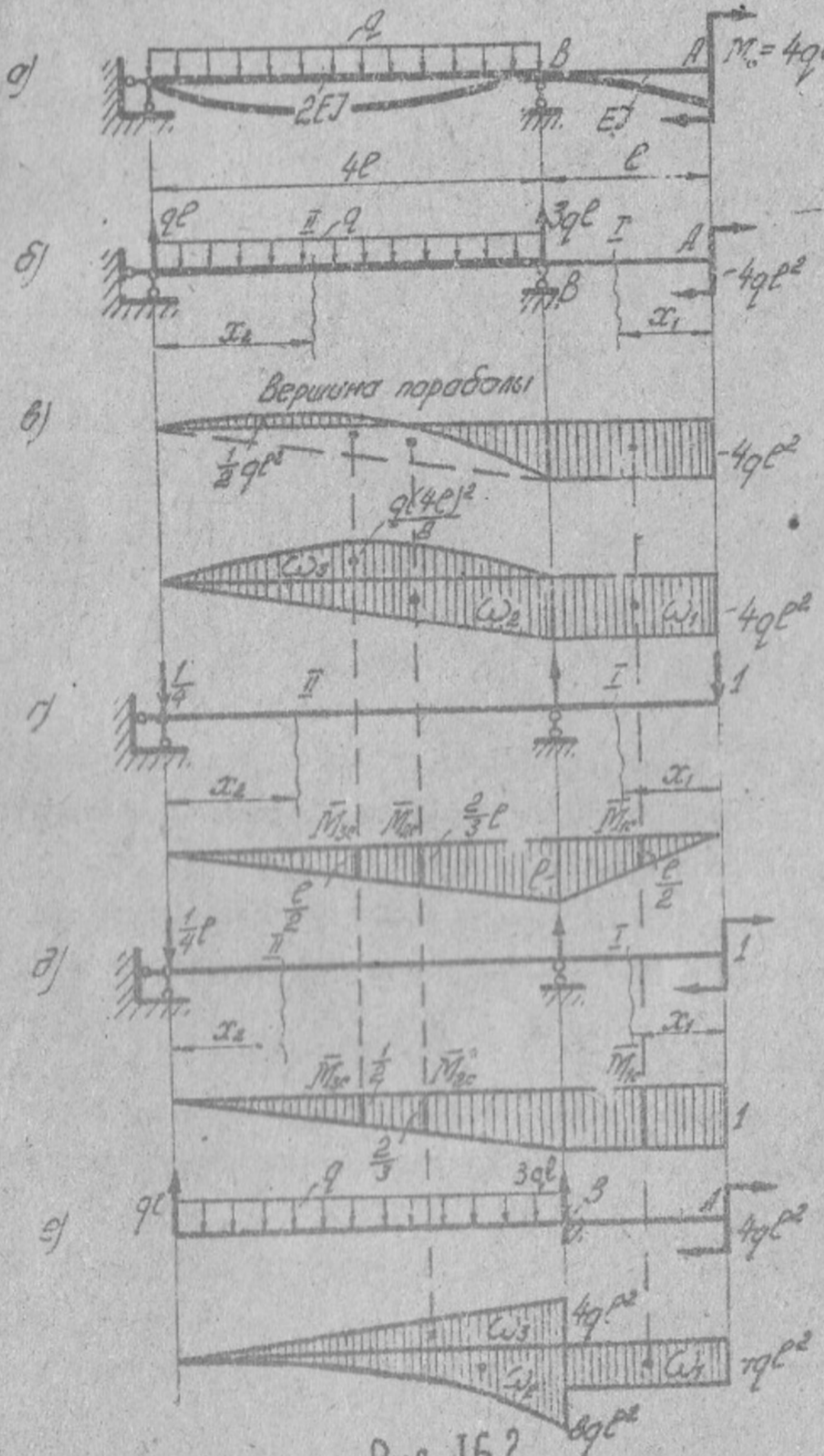

а)
q
B
A
$M_0 = 4ql^2$
2EJ
EJ
4l
l
б)
ql
q
3ql
A
B
$-4ql^2$
x_2
x_1
в)
Вершина параболы
$\frac{1}{2}ql^2$
$-4ql^2$
$\frac{q(4l)^2}{8}$
ω_3
ω_2
ω_1
$-4ql^2$
г)
$\frac{l}{4}$
1
x_2
x_1
$\frac{2}{3}l$
l
$\frac{l}{2}$
д)
$\frac{1}{4}l$
1
x_2
x_1
$\frac{1}{2}$
1
$\frac{2}{3}$
е)
ql
q
3ql
A
$4ql^2$
$4ql^2$
ω_3
ω_2
ω_1
$7ql^2$
$8ql^2$

Рис. 16.2

Здесь $0 \le x_1 \le a$; $0 \le x_2 \le 4a$.

Если изгибающие моменты одного направления (M_1 и $\bar{M}_1$), они должны быть одного знака; если M_2 и $\bar{M}_2$ разных направлений, то и знаки у них должны быть разные.

Для вычисления прогиба в сечении А подставляем выражения (2) (3) в формулу (I) и проводим интегрирование

$$y_A = \sum_{i=1}^{2}\int_{l}\frac{M_i \bar{M}_i}{(EJ)_i}dx = \int_0^l\frac{(-4ql^2)(-x_1)}{EJ}dx + \int_0^{4l}\frac{\left(qlx_2 - \frac{qx_2^2}{2}\right)\left(-\frac{1}{4}x_2\right)}{2EJ}dx_2 =$$

$$= \frac{4ql^2}{EJ}\int_0^l x_1\,dx_1 - \frac{q}{8EJ}\int_0^{4l}\left(lx_2^2 - \frac{1}{2}x_2^3\right)dx_2 = \frac{10}{3}\,\frac{ql^4}{EJ}. \quad (5)$$

Чтобы найти угол поворота ния А, подставим под интегралы (I) функции (2) и (4) и проинтегрируем их. Получим

$$y'_A = \sum_{i=1}^{n}\int_{l_i}\frac{M_i \bar{M}_i\,dx}{(EJ)_i} = \int_0^l\frac{(-4ql^2)(-1)}{EJ}dx_1 + \int_0^{4l}\frac{\left(qlx_2 - \frac{qx_2^2}{2}\right)\left(-\frac{1}{4l}x_2\right)}{2EJ}dx_2 =$$

$$= \frac{4ql^2}{EJ}\int_0^l dx_1 - \frac{q}{8EJ}\int_0^{4l}\left(x_2^2 - \frac{x_2^3}{2}\right)dx_2 = \frac{16}{3}\,\frac{ql^3}{EJ}. \quad (6)$$

Заметим, что найденные перемещения оказываются положительными. Это значит, что направление перемещений совпадает с направлением единичной силы и единичного момента.

Интегралы (5) и (6) можно вычислить, пользуясь способом Верещагина. Интегралы Мора способом Верещагина вычисляем по формуле

$$\delta_A = \sum_{i=1}^{n}\int_0^l\frac{M_i \bar{M}_i}{(EJ)_i}dx = \sum_{i=1}^{n}\frac{\omega_i \bar{M}_{ic}}{(EJ)_i}, \quad (7)$$

где ω_i – площадь грузовой эпюры (эпюры от заданных сил),

$\bar{M}_{ic}$ ордината единичной эпюры под центром тяжести площади грузовой эпюры.

Перемещения определяем в следующем порядке. Сначала строим грузовую эпюру от внешних сил (рис.I6.2в). При этом площадь грузовой эпюры разбиваем на составляющие так, чтобы площадь и координаты центра тяжести каждой из составляющих легко было определить. На рис. I6.3 приведены выражения для площадей и указаны положения центров тяжести для простейших фигур: треугольника, параболического треугольника и параболического сегмента.

В направлении искомого перемещения прикладываем единичную обобщенную силу и строим единичную эпюру. Перемещение находим как результат "перемножения" грузовой эпюры на единичную: площадь грузовой эпюры умножаем на ординату единичной эпюры под центром тяжести грузовой эпюры. При этом произведение считается положительным, если эпюры расположены по одну сторону от нулевой линии; отрицательным, если-по разные стороны.

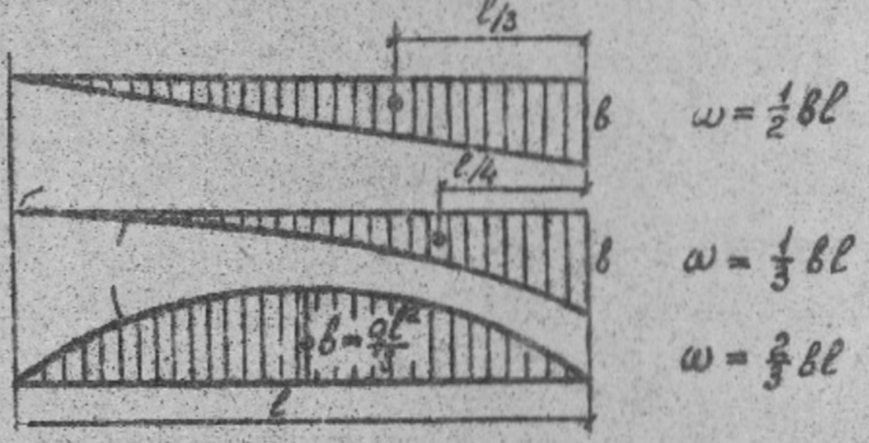


Рис. I6.3

Умножая, таким образом, грузовую эпюру (рис.16.2в) на единичную (рис.I6.2г), найдем прогиб сечения А:

$$y_A = \frac{1}{EJ}(\omega_1 \bar{M}_{1c}) + \frac{1}{2EJ}(\omega_2 \bar{M}_{2c} + \omega_3 \bar{M}_{3c}) = \frac{1}{EJ} 4ql^2 l \cdot \frac{l}{2} +$$

$$+ \frac{1}{2EJ}\left[\frac{1}{2} 4ql^2 \cdot 4l \cdot \frac{2}{3} l - \frac{2}{3} q \frac{(4l)^2}{8} \cdot 4l \cdot \frac{l}{2}\right] = \quad (8)$$

$$= \frac{10}{3} \frac{ql^4}{EJ} = \frac{10 \cdot 2 \cdot 0{,}4^4}{3 \cdot 200} = 8{,}5 \cdot 10^{-4} м$$

Угол поворота сечения В получим как произведение грузовой эпюры (рис.16.2в) на эпюру от единичного момента (рис.16.2д):

$$y_A' = \frac{1}{EJ}(\omega_1 \bar{M}_{1c}) + \frac{1}{2EJ}(\omega_2 \bar{M}_{2c} + \omega_3 \bar{M}_{3c}) =$$

$$= \frac{1}{EJ}(4q\ell^2 \ell \cdot 1) + \frac{1}{2EJ}\left[\frac{1}{2}4q\ell^2 \cdot 4\ell \cdot \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\frac{q(4\ell)^2}{8}4\ell \cdot \frac{1}{2}\right] = \quad (9)$$

$$= \frac{16}{3}\frac{q\ell^3}{EJ} = \frac{16 \cdot 2 \cdot 0{,}4^3}{3 \cdot 200} = 0.00341 \text{ рад.}$$

Этот же результат можно получить, если воспользоваться приемом "расслоения" эпюр. Для этого построим грузовую эпюру не от всех сил сразу, а от каждой силы в отдельности. При этом предположим, что в сечении В поставлена заделка. Для полученной балки строим грузовую эпюру от каждой силы в отдельности. "Перемножая" затем каждую из построенных эпюр (рис.16.2е) на единичную (рис.16.2г), также получим прогиб сечения А:

$$y_A = \frac{1}{EJ}(\omega_1 \bar{M}_{1c}) + \frac{1}{2EJ}(\omega_2 \bar{M}_{2c} + \omega_3 \bar{M}_{3c}) =$$

$$\frac{1}{EJ}(4q\ell^2 \ell \cdot \frac{\ell}{2}) + \frac{1}{EJ} + \left(\frac{1}{3}8q\ell^2 4\ell \cdot \frac{3}{4}\ell - \frac{1}{2}4q\ell^2 4\ell \cdot \frac{2}{3}\ell\right) = \quad (10)$$

$$= \frac{2q\ell^4}{EJ} + \frac{4q\ell^4}{EJ} - \frac{8}{3}\frac{q\ell^4}{EJ} = \frac{10q\ell^4}{3EJ}.$$

Аналогично получаем и угол поворота.

С учетом найденных перемещений и устройства опор изобразим форму оси изогнутой балки (рис.16.2а). Следует иметь в виду, что эпюра изгибающих моментов от внешних сил построена на сжатых слоях балки. Точке перегиба оси соответствует нуль на эпюре изгибающих моментов.