Задание I7

На рис. I7.I изображена плоская рама, элементы которой имеют одинаковую жесткость $(EJ = const)$.

На рис. I7.2 изображена плоскопространственная рама, элементы круглого поперечного сечения которой одного диаметра. Модули упругости связаны соотношением $G = 0,4E$. Требуется для обеих рам построить эпюры внутренних силовых факторов:

I) изгибающих моментов для плоской рамы;

2) изгибающих и крутящих моментов для плоскопространственной рамы.

Данные взять из таблицы I7.I.

Таблица I7.I

Номер строки	Вариант "А" $(g + e) = 10$		Вариант "В" $10 > (g + e)$		K_1	K_2
	рис. I7.I	рис. I7.2	рис. I7.I	рис. I7.2		
I	I	I	II	II	2	2
2	2	2	I2	I2	2	3
3	3	3	I3	I3	3	4
4	4	4	I4	I4	4	2
5	5	5	I5	I5	5	2
6	6	6	I6	I6	4	3
7	7	7	I7	I7	2	4
8	8	8	I8	I8	3	2
9	9	9	I9	I9	4	3
0	I0	I0	20	20	5	4
	g	e	e	g	e	z

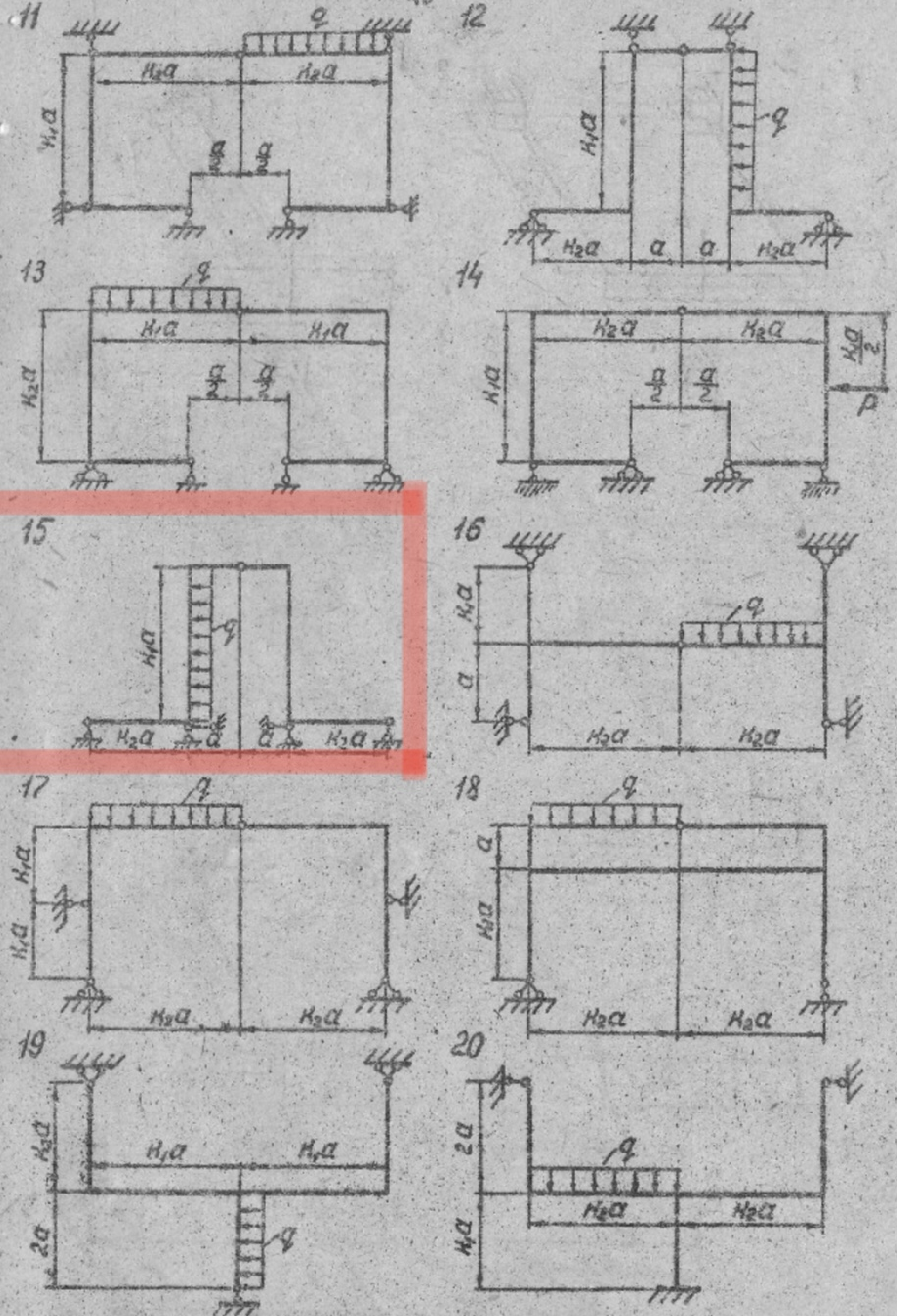


Рис. 17.1 Окончание

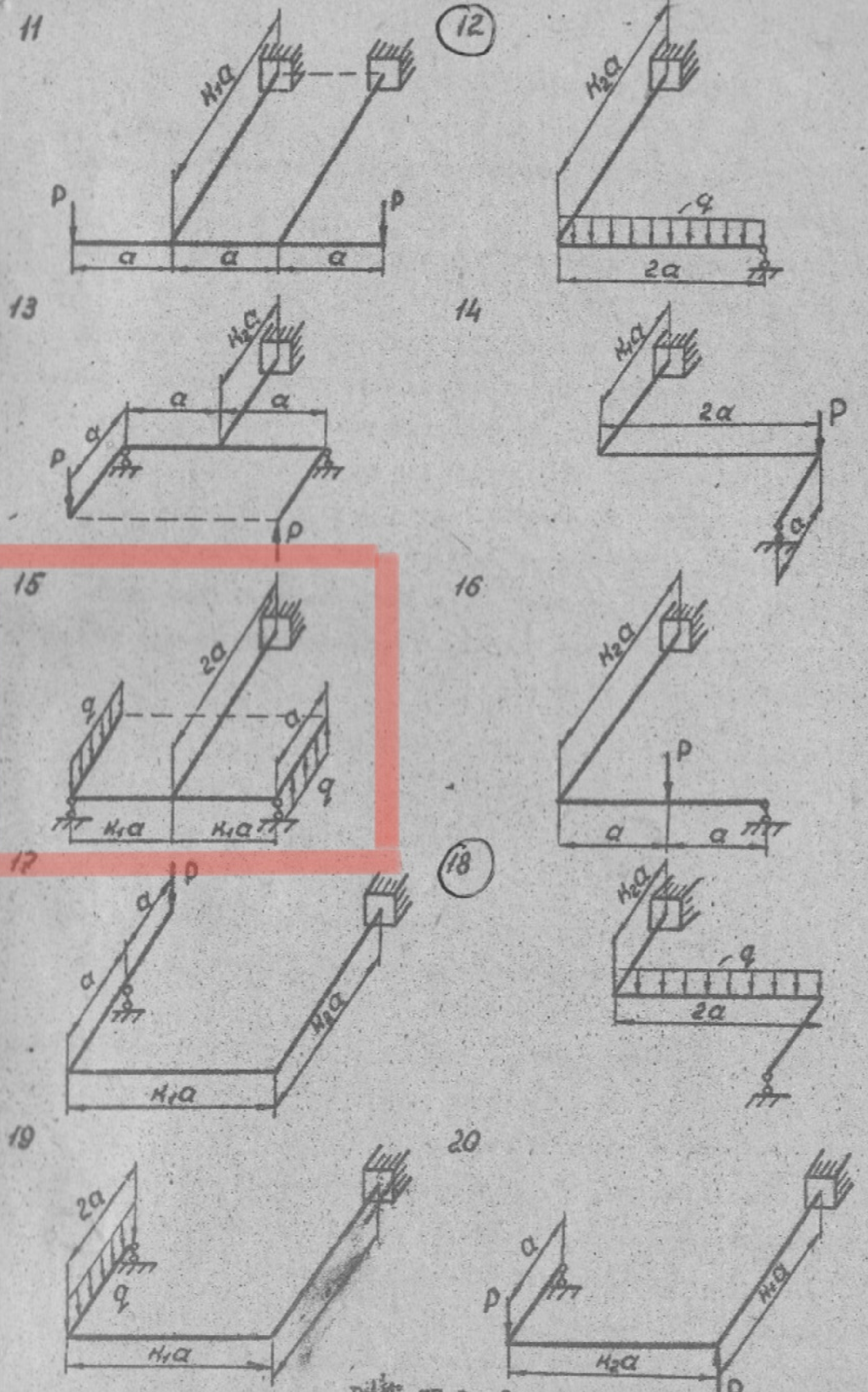


Рис. 17.2. Окончание

Указания к выполнению задания

При выполнении задания рекомендуется придерживаться следующей последовательности:

I) устанавливаем степень статической неопределимости системы, равную числу "лишних" связей.

2) выбираем основную систему, которая образуется из заданной статически неопределимой системы путем отбрасывания "лишних" связей.

При выборе основной системы рекомендуется учитывать ее симметрию и симметрию нагрузки (если последняя есть), так как в этом случае решение задачи упрощается.

3) изображаем эквивалентную систему, для чего основную систему загружаем заданными внешними нагрузками, всеми лишними неизвестными (Z_i), и записываем систему канонических уравнений метода сил, которая имеет следующий вид:

$$\Delta_K = \sum_{i=1}^{n} \delta_{Ki} Z_i + \Delta_{KP} = 0 \quad (K = 1, 2 \ldots n),$$

где n - степень статической неопределимости системы;

Z_i -"лишнее" неизвестное усилие, соответствующее отброшенной "лишней" связи;

δ_{Ki}- коэффициент, представляющий собой обобщенное перемещение, соответствующее силе Z_K от действия силы $\bar{Z}_i = 1$ в основной системе;

Δ_{KP}- свободный член, представляющий собой обобщенное перемещение, соответствующее силе Z_K от действия внешних нагрузок в основной системе.

4) в основной системе строим эпюры изгибающих (и крутящих для плоскопространственной рамы) моментов от действия единичной силы $\bar{Z}_i = 1$, соответствующей каждой "лишней" неизвестной, ("единичные" эпюры, ординаты которых обозначаются $\bar{M}_i$) и заданных нагрузок ("грузовые" эпюры, ординаты которой обозначаются $\bar{M}_P$).

5) используя способ Верещагина ("перемножение" эпюр), определяем все коэффициенты δ_{ki} и свободные члены Δ_{kp} системы канонических уравнений. Здесь следует учитывать теорему о взаимности перемещений:

$$\delta_{ki} = \delta_{ik} .$$

6) решаем систему уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_{ki} Z_i + \Delta_{kp} = 0 .$$

и определяем все лишние неизвестные.

7) в заданной неопределимой системе прикладываем все внешние нагрузки и найденные "лишние" неизвестные. Для полученной таким образом системы строим эпюры внутренних силовых факторов, как для статически определимой системы.

8) проводим проверку построенных эпюр-

статическую, которая заключается в соблюдении всех условий равновесия (в том числе и равновесия узлов).

Пример I. Построить эпюры M, N и Q для плоской рамы, изображенной на рис. I7.3. Жесткость элементов рамы (EJ) считать одинаковой.

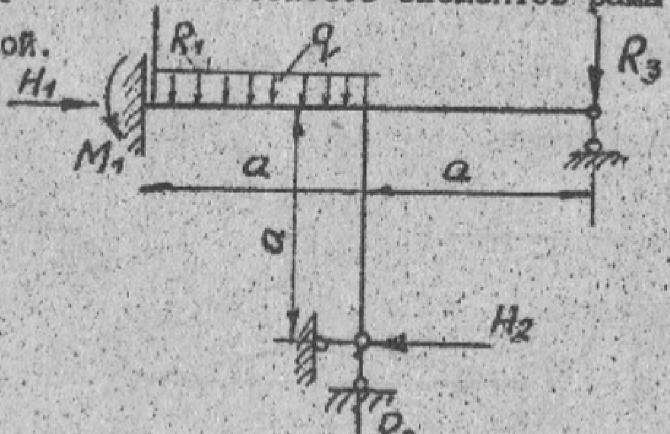


Рис. I7.3.

Решение: а) имеется 6 неизвестных усилий (R_1, R_2, R_3, H_1, H_2, M_1). Независимых уравнений равновесия здесь можно составить три. Тогда степень статической неопределимости $n = 6 - 3 = 3$.

б) основная система (отброшены три "лишние" связи)

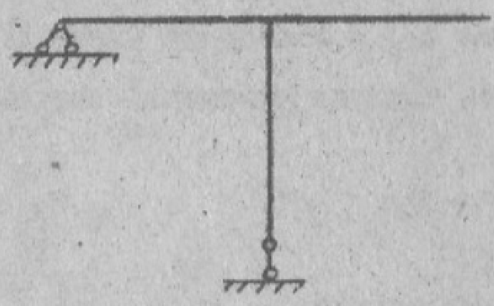


Рис. I7.4

в) эквивалентная система

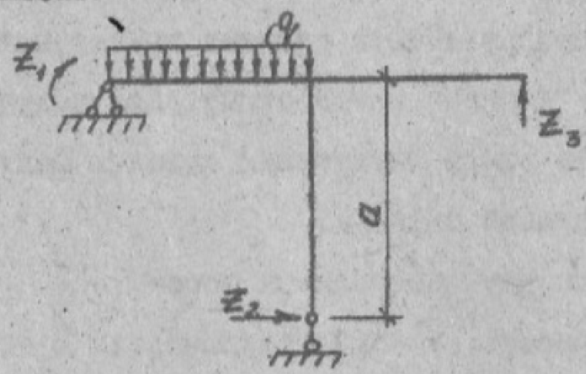
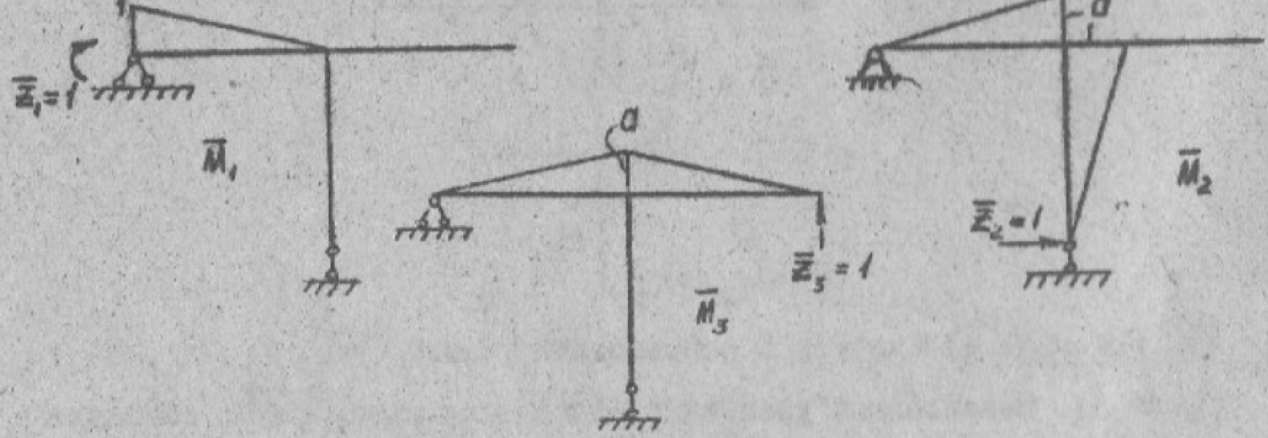


Рис. I7.5

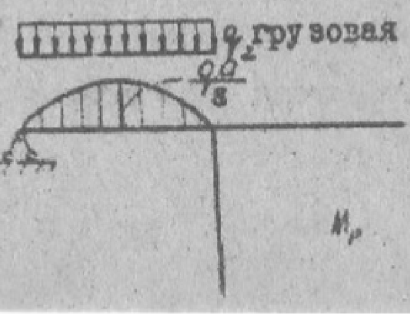
$$\left.\begin{aligned} \delta_{11} Z_1 + \delta_{12} Z_2 + \delta_{13} Z_3 + \Delta_{1P} &= 0 \\ \delta_{21} Z_1 + \delta_{22} Z_2 + \delta_{23} Z_3 + \Delta_{2P} &= 0 \\ \delta_{31} Z_1 + \delta_{32} Z_2 + \delta_{33} Z_3 + \Delta_{3P} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Система канонических уравнений

г) единичные эпюры



грузовая эпюра



д) Определяем δ_{ki} и Δ_{kp}

Для определения $\delta_{ki}EJ$ надо единичную эпюру $\overline{M}_k$ "умножить" по способу Верещагина на единичную эпюру M_i .

$$\delta_{11}EJ = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot a\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{a}{3}; \qquad \delta_{12}EJ = \delta_{21}EJ = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot a\cdot\frac{1}{3}a = \frac{a^2}{6};$$

$$\delta_{22}EJ = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot a\cdot a\cdot\frac{2}{3}a = \frac{2}{3}a^3; \qquad \delta_{23}EJ = \delta_{32}EJ = \frac{1}{2}a\cdot a\cdot\frac{2}{3}a = \frac{a^3}{3};$$

$$\delta_{33}EJ = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot a\cdot a\cdot\frac{2}{3}a = \frac{2}{3}a^3;$$

Для определения $\Delta_{kp}EJ$ надо грузовую эпюру M_p "умножить" по способу Верещагина на единичную эпюру $\overline{M}_k$.

$$\Delta_{1p}EJ = \frac{qa^3}{12}\cdot\frac{1}{2} = \frac{qa^3}{24}$$

$$\Delta_{2p}EJ = \frac{qa^3}{12}\cdot\frac{a}{2} = \frac{qa^4}{24}$$

$$\Delta_{3p}EJ = \frac{qa^3}{12}\cdot\frac{a}{2} = \frac{qa^4}{24}.$$

е) решаем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{a}{3}z_1 + \frac{a^2}{6}z_2 + \frac{a^2}{6}z_3 + \frac{qa^3}{24} = 0 \\ \frac{a^2}{6}z_1 + \frac{2a^3}{3}z_2 + \frac{a^3}{3}z_3 + \frac{qa^4}{24} = 0 \\ \frac{a^2}{6}z_1 + \frac{a^3}{3}z_2 + \frac{2a^3}{3}z_3 + \frac{qa^4}{24} = 0 \end{aligned}\right\}$$

и определяем все "лишние" неизвестные:

$$z_1 = -\frac{1}{10}qa^2; \quad z_2 = -\frac{1}{40}qa; \quad z_3 = -\frac{1}{40}qa.$$

ж) изображаем заданную систему и нагружаем ее всеми лишними неизвестными и заданной нагрузкой

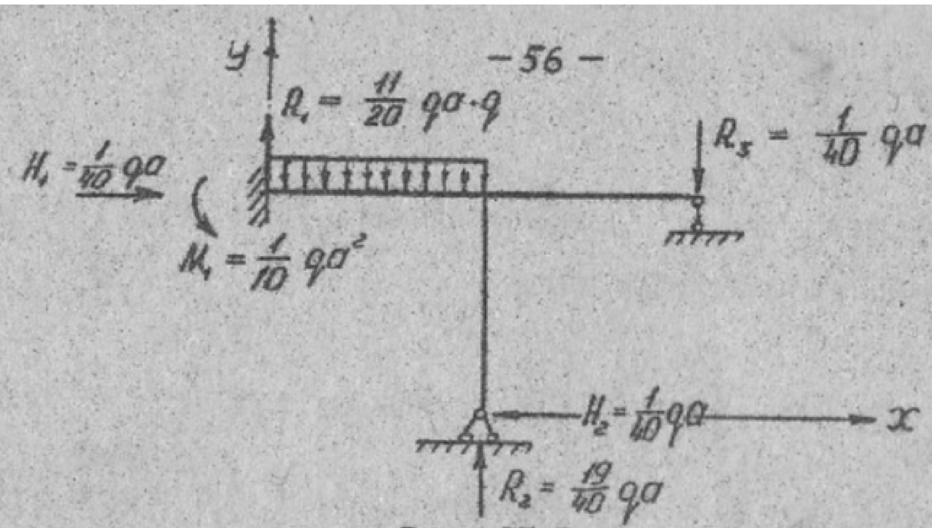


Рис. 17.7

Здесь учтено, что $M_1 = Z_1$; $H_2 = -Z_2$ и $R_3 = -Z_3$. Реакции: R_1; H_1 и R_2 определим из уравнений равновесия для всей системы.

1) $\sum P_x = 0$; $-H_2 + H_1 = 0$; $H_1 = H_2 = \frac{1}{40} qa$.

2) $\sum m_A = 0$; $M_1 - \frac{qa^2}{2} - R_3 2a - H_2 a + R_2 a = 0$

$$R_2 = -\frac{1}{a}\left(\frac{1}{10} qa^2 - \frac{qa^2}{2} - \frac{2}{40} qa^2 - \frac{1}{40} qa^2\right) = \frac{19}{40} qa$$

3) $\sum P_y = 0$; $R_1 + R_2 - qa - R_3 = 0$

$$R_1 = -\frac{19}{40} qa + qa + \frac{1}{40} qa = \frac{11}{20} qa$$

Далее строим эпюры M, N и Q обычным порядком.

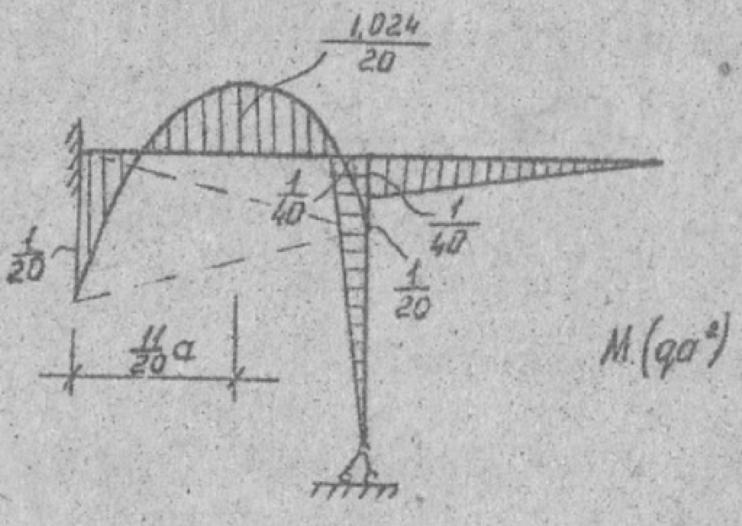


Рис. 17.8

з) проверка. Равновесие узла С удовлетворяется

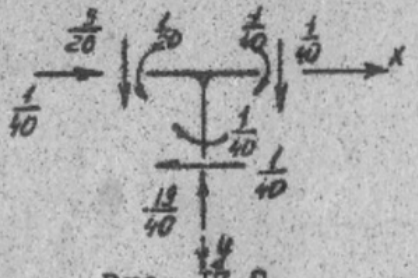


Рис. I7.9

$$\sum P_x = 0 \quad \frac{1}{40} - \frac{1}{40} = 0$$

$$\sum P_y = 0 \quad \frac{9}{20} + \frac{1}{40} - \frac{19}{40} = 0$$

$$\sum M = 0 \quad -\frac{1}{40} - \frac{1}{40} + \frac{1}{20} = 0$$

Пример 2. Построить эпюры изгибающих и крутящих моментов для плоскопространственной рамы, изображенной на рис. I7.I0. Элементы рамы имеют круглое поперечное сечение одного диаметра.

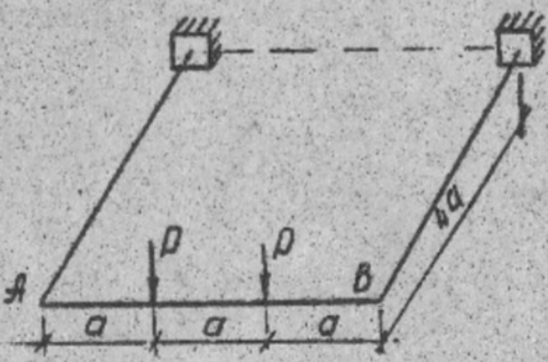


Рис. I7.I0

Решение. а) в случае плоскопространственной рамы все усилия, расположенные в плоскости рамы, равны нулю, поэтому рама будет три раза статически неопределима и в поперечных сечениях возникнут изгибающие моменты (M_u) в вертикальной плоскости, крутящие моменты (M_k) и поперечные силы, параллельные заданным силам P .

б) при выборе основной системы надо использовать симметрию рамы и нагрузки. Для этого надо разрезать раму в середине элемента АВ, отбросив 3 "лишние" связи.

Рис. I7.II

в) эквивалентная система. В проведенном сечении (ввиду симметри рамы и нагрузки) кососимметричные усилия ($M_к$ и Q) будут равны нулю, и отличный от нуля будет только изгибающий момент в вертикальной плоскости ($M_и = Z_1$).

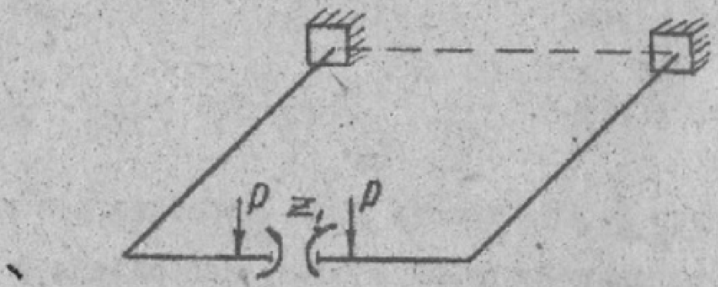


Рис. I7.I2

$\delta_{11} Z_1 + \Delta_{1P} = 0$ – каноническое уравнение

г) единичная эпюра

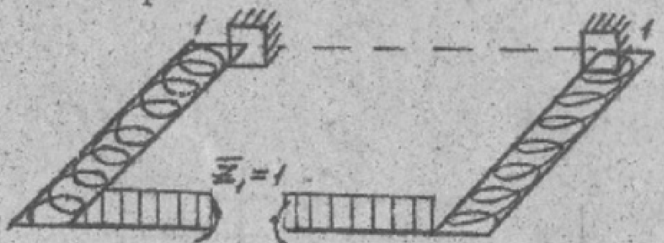


Рис. I7.I3

Примечание: спиральная штриховка использована для эпюры крутящих моментов ($M_к$)

грузовая эпюра

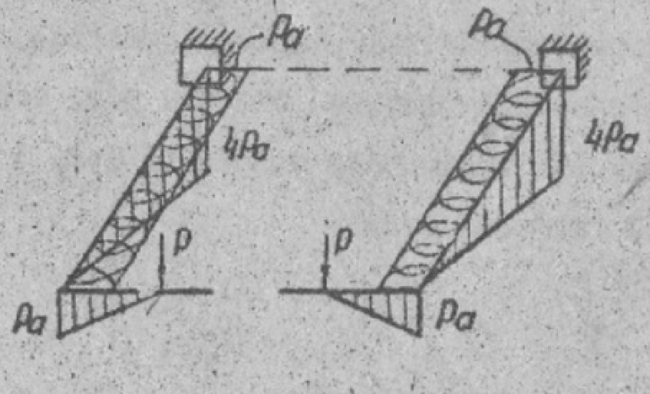


Рис. I7.I4

(эпюры изгибающих и крутящих моментов можно изображать и на разных схемах).

д) для круглого сечения $J_p = 2J$. У нас $G = 0{,}4E$; таким образом, жесткость при кручении будет выражаться через жесткость при изгибе следующим образом:

$$GJ_p = 0{,}8EJ.$$

Находим δ_{11} и Δ_{1P}, используя способ Верещагина:

$$\delta_{11}EJ = 2\cdot 1\cdot 1{,}5a\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 4a\cdot 1\cdot\frac{1}{0{,}8} = 13a.$$

$$\Delta_{1P}EJ = -2\cdot\frac{1}{2}\cdot Pa\cdot a\cdot 1 - Pa\cdot 4a\cdot 1\,\frac{1}{0{,}8}\cdot 2 = -11Pa^2.$$

е) из канонического уравнения

$$13aZ_1 - 11Pa^2 = 0$$

определяем лишнее неизвестное

$$Z_1 = \frac{11}{13}Pa.$$

ж) строим эпюры изгибающих и крутящих моментов, для чего находим значения моментов на границах участков по формулам:

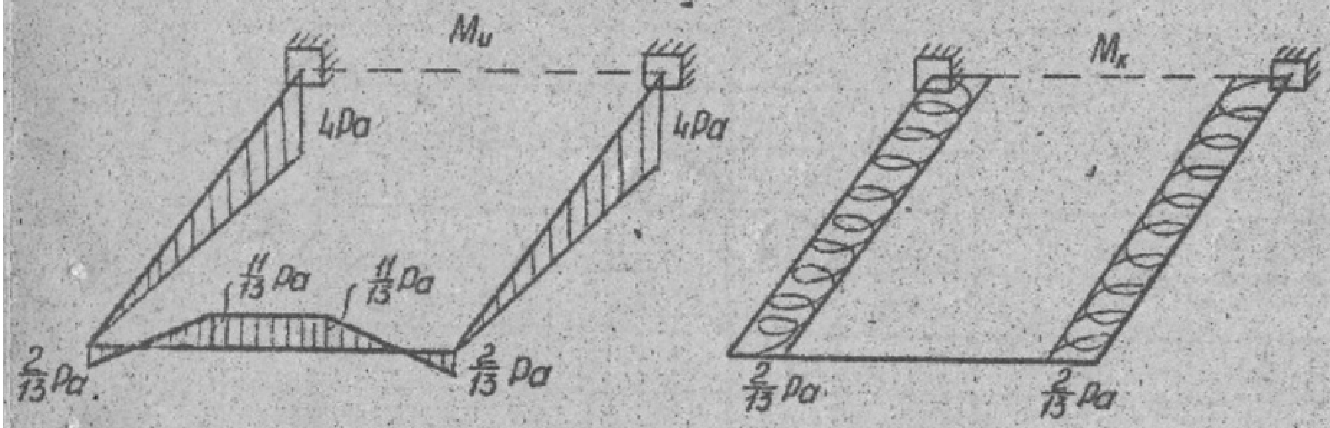


Рис. I7.I5

$$M_u = M_u(P) + \overline{M}_u Z_1 \qquad M_k = M_k(P) + \overline{M}_k Z_1$$

з) делаем проверку, как и в примере I.