

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

**Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»**

Институт прикладной математики и компьютерных наук

Утверждено на заседании
совета Института прикладной
математики и компьютерных наук
« » 202 г., протокол №
Директор ИПМиКН

_____ А.А. Сычугов

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению курсовой работы
по дисциплине (модулю)**

«Введение в математический анализ»

**основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы бакалавриата**

01.00.00 Математика и механика

09.00.00 Информатика и вычислительная техника

10.00.00 Информационная безопасность

Форма обучения: очная, заочная, очно-заочная

Тула 2024 год

Разработчики методических указаний

Боницкая О.В., к.ф.-м.н.

(подпись)

Инченко О.В., к.ф.-м.н.

(подпись)

Кузнецова В.А., к.ф.-м.н.

(подпись)

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ	4
Требования к оформлению курсовой работы	5
1. Неопределенные, определенные и несобственные интегралы. Вычисление в wxMaxima	9
1.1. Неопределенные интегралы	9
1.2. Вычисление определенных интегралов	27
1.3. Вычисление несобственных интегралов	41
2. Приложение определенных интегралов.	48
2.1. Площадь плоской фигуры.....	48
2.2. Длина дуги.....	64
2.3. Объем тела вращения	75
2.4. Площадь поверхности вращения.....	82
3. Приближенные вычисления определенных интегралов.....	85
3.1. Некоторые теоретические сведения	85
3.2. Методы численного интегрирования	88
3.2.1. Методы прямоугольников	88
3.2.2. Метод трапеций	91
3.2.3. Метод Симпсона (метод парабол)	93
3.3. Погрешность методов Ньютона-Котеса	96
3.4. Вычисление интегралов с заданной точностью	99
3.5. Численное интегрирование с помощью программы wxMaxima.....	101
4. Приближенное вычисление несобственных интегралов	117
4.1. Интегралы от разрывных функций	117
4.2. Интегралы с бесконечными пределами	119
ПРИЛОЖЕНИЕ	128
Список литературы.....	153

ВВЕДЕНИЕ

Цель выполнения курсовой работы в рамках дисциплины «Введение в математический анализ» - углубленное изучение теоретического материала и отработка практических навыков применения методов качественного исследования и программных пакетов при вычислении определенных и несобственных интегралов.

Основное требование к курсовой работе – умение сочетать классические качественные методы исследования и вычисления определенных и несобственных интегралов с современными численно-аналитическими методами их исследования и вычисления, предполагающими использование стандартных функций, заложенных в математическом пакете wxMaxima.

Исходные данные заданий курсовой работы содержатся в данных методических указаниях. Данные по каждому разделу курсовой работы предваряются формулировкой заданий, необходимым теоретическим материалом для их выполнения, а также рекомендациями и примерами выполнения аналогичных заданий.

Курсовая работа предусматривает выполнение заданий, тематика которых сформулирована непосредственно в тексте данных методических указаний. **Объем** курсовой работы не регламентируется и может варьироваться в зависимости от конкретного варианта задания.

Курсовая работа выполняется в течение 2-го семестра обучения.

Защита курсовой работы проходит в форме индивидуальной беседы с преподавателем в период с 14 по 16 неделю учебного семестра включительно. Перед защитой необходимо получить оценку рецензента.

Оформление курсовой работы осуществляется согласно требованиям, содержащимся в данных методических указаниях.

Требования к оформлению курсовой работы

Курсовая работа должна быть выполнена на бумаге формата А4 (210х297) в текстовом редакторе. Печатать следует, соблюдая следующие размеры полей: правое – 10 мм, верхнее – 20 мм, нижнее – 20 мм, левое – 20 мм. Абзацный отступ – 1,25 мм. Формулы должны быть аккуратно набраны средствами редактора формул. Межстрочный интервал – полуторный, шрифт – Times New Roman, размер шрифта – 14pt, скрепление – слева.

Обязательными структурными элементами курсовой работы являются:

- титульный лист;
- задание;
- основная часть;

Все страницы имеют сквозную нумерацию, начиная с титульного листа. Все страницы нумеруются арабскими цифрами (без точки) в центре нижней части листа.

Титульный лист - первая страница (должна быть без номера).

Задание должно содержать перечень всех заданий курсовой работы.

Основная часть курсовой работы должна содержать сведения, отражающие суть, методы и основные результаты выполненной работы. Каждое задание должно начинаться с новой страницы. При необходимости задания должны сопровождаться чертежами.

Однострочные и многострочные формулы набираются без выравнивания, с повторением знака операции на разрыве (при этом знак умножения обозначается «х»). Специальным образом выравниваются формулы, только если это действительно необходимо, например, для систем уравнений. Формулы в строке отделяются запятой (не точкой с запятой!) и после запятой используется увеличенный пробел.

Пояснительная записка (см. образец) сопровождается рецензией, которая не подшивается, а прилагается к работе. Рецензию можно подписать у любого преподавателя, ведущего математические дисциплины в ИПМКН.

Критерии оценивания курсовой работы:

25 баллов – оформление (соответствие ГОСТам, объем, структура работы и т.д.);

5 баллов – рецензия (оценка рецензента), (обязательно должна быть);

20 баллов – качество выполнения заданий;

50 баллов – зачет (ответы на вопросы, оценка уровня усвоения материала и т.д.)

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

к курсовой работе по курсу
«ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

на тему

«Приближенные методы вычисления интегралов»

вариант__

Автор работы _____ студент гр. _____
(дата, подпись) (фамилия и инициалы)

Руководитель работы _____
(дата, подпись) (должность) (фамилия и инициалы)

Работа защищена _____ с оценкой _____
(дата)

Члены комиссии _____
(дата, подпись) (должность) (фамилия и инициалы)

(дата, подпись) (должность) (фамилия и инициалы)

(дата, подпись) (должность) (фамилия и инициалы)

Тула 2024

ЗАДАНИЕ

на курсовую работу по дисциплине

«ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

студенту гр. _____

(фамилия, имя, отчество)

Тема работы: «Приближенные методы вычисления интегралов» вариант _____

Входные данные: (формулировка всех заданий варианта)

Задание получил _____
(подпись) (дата)

График выполнения работы:

Замечания консультанта _____

К защите. Руководитель работы _____
(подпись) (дата)

РЕЦЕНЗИЯ

на курсовую работу студента Тульского государственного университета,

гр. _____
(фамилия, имя, отчество)

по дисциплине Введение в математический анализ

на тему: Приближенные методы вычисления интегралов

вариант

Тематика работы (задание) _____ профилю (направленности)
(соответствует/не соответствует)
обязательной программы, а также в полной мере способствует формированию необходи-
мых компетенций (установленных в рабочей программе) у обучающихся.

Содержание работы _____ заданной тематике.
(соответствует/не соответствует)

Объем работы _____ для раскрытия темы.
(соответствует/не соответствует)

Оформление работы _____ установленным требованиям.
(соответствует/не соответствует)

Тема работы раскрыта в _____ мере.
(полной/неполной)

Использованная при выполнении работы литература _____.
(актуальна/не актуальна)

Качество приложений (при наличии) _____ установленным требованиям.
(соответствует/не соответствует)

Замечания: _____
(отсутствуют или перечисляются замечания рецензента к работе)

Качество выполнения работы свидетельствует о _____ уровне
(недостаточном/пороговом/повышенном)
сформированности необходимых компетенций (установленных в рабочей программе).

Работа выполнена на _____ уровне и, при соответствующей защите
(высоком/среднем/низком)
может быть оценена на << _____ >>.

Рецензент _____ / _____ /
подпись должность, звание, Ф.И.О.

Дата _____

1. Неопределенные, определенные и несобственные интегралы. Вычисление в wxMaxima

1.1. Неопределенные интегралы

Определение. Функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $f(x)$ на некотором промежутке I , если для всех $x \in I$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Определение. Выражение $F(x) + C$, где $F(x)$ - некоторая первообразная для функции $f(x)$, C – произвольная постоянная, называют **неопределённым интегралом** от функции $f(x)$ и символически обозначают $\int f(x)dx$.

Здесь $f(x)$ - подынтегральная функция, $f(x)dx$ - подынтегральное выражение.

Свойства неопределённого интеграла

1. Неопределённый интеграл от суммы нескольких интегрируемых функций равен сумме неопределённых интегралов от отдельных слагаемых:

$$\int (f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \dots + \int f_n(x)dx.$$

2. Постоянный множитель можно выносить из под знака неопределённого интеграла, т. е., если $k = const$, то

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx.$$

3. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx \right)' = f(x)$$

4. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная, т.е.

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

5. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\left(\int f(x)dx \right) = f(x)dx$$

6. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, $u = \varphi(x)$, то $\int f(u)du = F(u) + C$.

В частности, $\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C$.

Таблица основных неопределённых интегралов

1	$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C, m \neq -1$	9	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
2	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	10	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$
3	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	11	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right + C$
4	$\int \cos x dx = \sin x + C$	12	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
5	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	13	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C$
6	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$	14	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right + C$
7	$\int e^x dx = e^x + C$	15	$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x + C$
8	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	16	$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x + C$

Пример 1. Найти неопределенные интегралы.

$$\begin{aligned}
 1. \int \left(3x^5 - \frac{4}{x^{10}} + 5\sqrt[4]{x^5} + \frac{1}{7} \right) dx &= \\
 = \int \left(3x^5 - 4x^{-10} + 5x^{\frac{5}{4}} + \frac{1}{7} \right) dx &= 3 \frac{x^6}{6} - 4 \frac{x^{-9}}{-9} + 5x^{\frac{9}{4}} \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{7}x + C = \\
 &= \frac{1}{2}x^6 + \frac{4}{9x^9} - \frac{20}{9}\sqrt[4]{x^9} + \frac{1}{7}x + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \int \left(4^x - \frac{1}{\sqrt[4]{x}} + \frac{5}{x^2 - 1} \right) dx &= \\
 = \int \left(4^x - x^{-\frac{1}{4}} + \frac{5}{x^2 - 1} \right) dx &= \frac{4^x}{\ln 4} - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} + 5 \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C = \\
 &= \frac{4^x}{\ln 4} - \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + \frac{5}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C
 \end{aligned}$$

$$3. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + (\sqrt{2})^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + 2} \right| + C$$

$$4. \int \frac{x^2 - 5}{x^2 + 4} dx = \int \left(1 - \frac{9}{x^2 + 4} \right) dx = \int dx - 9 \int \frac{dx}{x^2 + 2^2} = x - 9 \cdot \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C$$

$$5. \int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x} dx = \int \frac{dx}{\cos x} - \int \cos x dx = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| - \sin x + C$$

$$6. \int \operatorname{ctg}^2 x dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int dx = -\operatorname{ctg} x - x + C$$

Методы интегрирования

1. Подведение под знак дифференциала

Метод подведения под знак дифференциала основан на применении свойства 6:

$$\int d(F(\varphi(x))) = \int f[\varphi(x)] d[\varphi(x)] = F[\varphi(x)] + C$$

При этом используют следующие соотношения, которые легко получить из таблицы интегралов:

$$\begin{array}{ll} 1. d(x+b) = dx, \quad b = \text{const}; & 5. d(\cos x) = -\sin x dx \\ 2. d(ax) = a \cdot dx & 6. d(\ln x) = \frac{dx}{x} \\ 3. d(x^2) = 2x dx & 7. d(\operatorname{tg} x) = \frac{dx}{\cos^2 x} \\ 4. d(\sin x) = \cos x dx & \end{array}$$

и так далее.

Пример 2. Найти неопределенные интегралы:

$$1. \int \frac{dx}{x+3} = \int \frac{d(x+3)}{x+3} = \ln|x+3| + C$$

$$2. \int (3x-1)^{24} dx = \frac{1}{3} \int (3x-1)^{24} d(3x-1) = \frac{(3x-1)^{25}}{75} + C$$

$$3. \int \sqrt{3-5x} dx = \int (3-5x)^{\frac{1}{2}} dx = \left(d(3-5x) = -5dx \right) =$$

$$= -\frac{1}{5} \int (3-5x)^{\frac{1}{2}} d(3-5x) = -\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} (3-5x)^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{15} \cdot \sqrt{(3-5x)^3} + C$$

$$4. \int \sin^2 6x dx = \int \frac{1 - \cos 12x}{2} dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 12x \cdot d\left(\frac{12x}{12}\right) \frac{1}{12} = \frac{1}{2} x - \frac{1}{24} \sin 12x + C$$

$$5. \int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$$

$$6. \int \frac{dx}{\operatorname{ctg}^5 x \cdot \sin^2 x} = - \int \operatorname{ctg}^{-5} x d(\operatorname{ctg} x) = \frac{1}{4 \operatorname{ctg}^4 x} + C$$

$$7. \int \frac{e^{\arcsin x} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int e^{\arcsin x} d(\arcsin x) = e^{\arcsin x} + C$$

2. Замена переменной

Если существует непрерывная функция $x = \varphi(t)$, имеющая непрерывную производную и однозначную обратную функцию, то справедливо равенство

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

или если $t = \varphi(x)$, то

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(t)dt.$$

Пример 3. Найти неопределенные интегралы.

$$1. \int x \cos(x^2 + 5)dx = \left(\begin{array}{l} t = x^2 + 5 \\ dt = 2x dx \end{array} \right) = \frac{1}{2} \int \cos t dt = \frac{1}{2} \sin t + C = \frac{1}{2} \sin(x^2 + 5) + C$$

$$2. \int x^2 e^{1-x^3} dx = \left(\begin{array}{l} t = 1 - x^3 \\ dt = -3x^2 dx \end{array} \right) = -\frac{1}{3} \int e^t dt = -\frac{1}{3} e^t + C = -\frac{1}{3} e^{1-x^3} + C$$

$$3. \int \frac{dx}{(\operatorname{ctg} 7x + 5) \sin^2 7x} = \left(\begin{array}{l} t = \operatorname{ctg} 7x + 5 \\ dt = -\frac{7dx}{\sin^2 7x} \end{array} \right) = -\frac{1}{7} \int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{7} \ln|t| + C = -\frac{1}{7} \ln|\operatorname{ctg} 7x + 5| + C$$

$$4. \int \cos^2 3x \sin 6x dx = \int \cos^2 3x \cdot 2 \sin 3x \cos 3x dx = \\ = 2 \int \cos^3 3x \sin 3x dx = \left(\begin{array}{l} t = \cos 3x \\ dt = -3 \sin 3x dx \end{array} \right) = -\frac{2}{3} \int t^3 dt = -\frac{2}{3} \cdot \frac{t^4}{4} + C = -\frac{1}{6} \cos^4 3x + C$$

Была использована тригонометрическая формула: $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$.

$$5. \int \frac{dx}{x(\ln 4x + 3)^3} = \left(\begin{array}{l} t = \ln 4x + 3 \\ dt = \frac{1}{4x} \cdot 4dx = \frac{dx}{x} \end{array} \right) = \int \frac{dt}{t^3} = \int t^{-3} dt = -\frac{1}{2t^2} + C =$$

$$= -\frac{1}{2(\ln 4x + 3)^2} + C$$

$$6. \int \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)} dx = \left(\begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{array} \right) = \int \frac{1-t}{t(t^2+1)} 2t dt = 2 \int \frac{1-t}{t^2+1} dt = 2 \int \frac{dt}{t^2+1} - 2 \int \frac{t dt}{t^2+1} =$$

$$= 2 \arctg t - \ln|t^2 + 1| + C = 2 \arctg \sqrt{x} - \ln|x + 1| + C$$

$$7. \int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x} + 1)} = \left(\begin{array}{l} x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right) = \int \frac{6t^5 dt}{t^3(t^2+1)} = 6 \int \frac{t^2 dt}{t^2+1} = 6 \int \frac{(t^2+1)-1}{t^2+1} dt =$$

$$= 6 \int \left(1 - \frac{1}{t^2+1} \right) dt = 6(t - \arctg t) + C = 6(\sqrt[6]{x} - \arctg \sqrt[6]{x}) + C$$

3. Метод интегрирования «по частям»

Интегрированием «по частям» называется нахождение интеграла по формуле

$$\int u dv = uv - \int v du ,$$

где $u = u(x)$, $v = v(x)$ - непрерывно дифференцируемые функции от x . При этом за u берется такая функция, которая при дифференцировании упрощается, а за dv та часть подынтегрального выражения, интеграл от которого известен или может быть найден. Последний интеграл должен быть либо проще исходного, либо подобен ему.

Рассмотрим некоторые случаи, в которых целесообразно применение метода интегрирования по частям.

1) Подынтегральная функция представляет собой произведение многочлена $P_n(x)$ на e^{ax} или $\sin ax$, $\cos ax$:

$$f(x) = P_n(x)e^{ax},$$

$$f(x) = P_n(x)\cos ax,$$

$$f(x) = P_n(x)\sin ax.$$

В этом случае удобно принять

$$u = P_n(x), \quad dv = \sin ax dx, \text{ или } dv = \cos ax dx, \text{ или } dv = e^{ax} dx.$$

2) Подынтегральная функция представляет собой произведение многочлена $P_n(x)$ на $\ln x$, $\arctg x$, $\arcsin x$:

$$f(x) = P_n(x)\ln x,$$

$$f(x) = P_n(x)\arctg x,$$

$$f(x) = P_n(x)\arcsin x.$$

В этом случае полагают

$$u = \ln x, \text{ или } u = \arctg x, \text{ или } u = \arcsin x, \quad dv = P_n(x)dx.$$

Пример 4. Найти неопределенные интегралы.

$$\begin{aligned} 1. \int (x-7)\cos 3x dx &= \left(\begin{array}{ll} u = x-7 & dv = \cos 3x dx \\ du = dx & v = \frac{1}{3}\sin 3x \end{array} \right) = \\ &= \frac{x-7}{3}\sin 3x - \frac{1}{3}\int \sin 3x dx = \frac{x-7}{3}\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x + C \end{aligned}$$

$$2. \int (3-x)e^{-2x} dx = \left(\begin{array}{ll} u = 3-x & dv = e^{-2x} dx \\ du = -dx & v = -\frac{e^{-2x}}{2} \end{array} \right) =$$

$$= -\frac{3-x}{2}e^{-2x} - \frac{1}{2}\int e^{-2x}dx = -\frac{3-x}{2}e^{-2x} + \frac{1}{4}e^{-2x} + C$$

$$3. \int \ln x dx = \left(\begin{array}{ll} u = \ln x & dv = dx \\ du = \frac{1}{x} dx & v = x \end{array} \right) = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

$$4. \int x^5 \ln x dx = \left(\begin{array}{ll} u = \ln x & dv = x^5 dx \\ du = \frac{dx}{x} & v = \frac{1}{6} x^6 \end{array} \right) = \frac{1}{6} x^6 \ln x - \frac{1}{6} \int x^6 \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{1}{6} x^6 \ln x - \frac{1}{6} \int x^5 dx = \frac{1}{6} x^6 \ln x - \frac{1}{36} x^6 + C$$

$$5. \int \frac{5x-1}{\sin^2 5x} dx = \left(\begin{array}{ll} u = 5x-1 & dv = \frac{dx}{\sin^2 5x} \\ du = 5dx & v = -\frac{1}{5} \operatorname{ctg} 5x \end{array} \right) = -\frac{1}{5} (5x-1) \operatorname{ctg} 5x + \int \operatorname{ctg} 5x dx =$$

$$= -\frac{1}{5} (5x-1) \operatorname{ctg} 5x + \int \frac{\cos 5x}{\sin 5x} dx = -\frac{1}{5} (5x-1) \operatorname{ctg} 5x + \left(\begin{array}{l} t = \sin 5x \\ dt = 5 \cos 5x dx \end{array} \right) =$$

$$= -\frac{1}{5} (5x-1) \operatorname{ctg} 5x + \frac{1}{5} \int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{5} (5x-1) \operatorname{ctg} 5x + \frac{1}{5} \ln |t| + C =$$

$$= -\frac{1}{5} (5x-1) \operatorname{ctg} 5x + \frac{1}{5} \ln |\sin 5x| + C$$

4. Интегрирование рациональных дробей

Определение. Рациональной дробью (дробно-рациональной функцией) называется функция вида

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$

где $P_m(x)$, $Q_n(x)$ – многочлены степеней m и n соответственно. Коэффициенты этих многочленов – действительные числа.

Если степень числителя меньше степени знаменателя, т.е. $m < n$, то рациональную дробь называют *правильной*.

Если же степень числителя больше или равна степени знаменателя, т.е. $m \geq n$, то рациональную дробь называют *неправильной*.

В последнем случае, выполняя деление числителя на знаменатель, неправильную дробь можно представить как сумму многочлена и правильной рациональной дроби.

Простейшими дробями называют дроби следующих четырех типов:

$$1. \frac{A}{x-a}, \quad 2. \frac{A}{(x-a)^\alpha}, \quad 3. \frac{Bx+C}{x^2+px+q}, \quad 4. \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^\beta}, \quad \text{где } p^2-4q < 0.$$

Всякую правильную рациональную дробь можно представить как алгебраическую сумму простейших дробей.

Для интегрирования рациональных дробей необходимо сделать следующее:

1) если дана неправильная рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ (т.е. степень числителя

больше или равна степени знаменателя), то нужно выделить из нее целую часть, т.е. представить в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

где $M(x)$ - многочлен, а $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ - правильная рациональная дробь (степень

числителя меньше степени знаменателя);

2) разложить знаменатель дроби на линейные и квадратичные множители:

$$Q(x) = (x-a)^m \cdots (x^2+px+q)^n \cdots,$$

где $p^2-4q < 0$;

3) правильную рациональную дробь $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ разложить на простейшие дроби с

неопределенными коэффициентами:

$$\begin{aligned} \frac{P_1(x)}{Q(x)} = & \frac{A_1}{(x-a)^m} + \frac{A_2}{(x-a)^{m-1}} + \cdots + \frac{A_m}{x-a} + \cdots + \\ & + \frac{B_1x+C_1}{(x^2+px+q)^n} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \cdots + \frac{B_nx+C_n}{x^2+px+q} + \cdots \end{aligned}$$

4) вычислить неопределенные коэффициенты $A_1, A_2, \dots, A_m, B_1, C_1, B_2, C_2, \dots, B_n, C_n, \dots$, для чего необходимо привести правую часть равенства к общему знаменателю, приравнять коэффициенты при одинаковых степенях переменной x в левой и правой частях полученного тождества, и решить систему линейных уравнений относительно искомых коэффициентов. Можно определить коэффициенты, придавая различные значения переменной x и подставляя их в полученное тождество.

В результате интегрирование рациональной дроби сведется к нахождению интегралов от многочлена и от простейших рациональных дробей.

Пример 5. Найти неопределенные интегралы от некоторых простейших дробей:

$$1. \int \frac{5}{x-3} dx = 5 \ln|x-3| + C$$

$$2. \int \frac{3}{(4-x)^3} dx = -3 \int (4-x)^{-3} d(4-x) = \frac{3(4-x)^{-2}}{2} + C = \frac{3}{2(4-x)^2} + C$$

$$3. \int \frac{dx}{x^2+10x+29} = \int \frac{dx}{(x+5)^2+2^2} = \int \frac{d(x+5)}{(x+5)^2+2^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+5}{2} + C$$

$$\begin{aligned} 4. \int \frac{6x+1}{x^2+4x+13} dx &= [6x+1 = 3(2x+4) - 11] = \int \left(\frac{3(2x+4)}{x^2+4x+13} - \frac{11}{x^2+4x+13} \right) dx = \\ &= 3 \int \frac{2x+4}{x^2+4x+13} dx - 11 \int \frac{dx}{x^2+4x+13} = 3 \int \frac{d(x^2+4x+13)}{x^2+4x+13} - 11 \int \frac{dx}{(x+2)^2+3^2} = \\ &= 3 \ln|x^2+4x+13| - 11 \operatorname{arctg} \frac{x+2}{3} + C \end{aligned}$$

Пример 6. Найти неопределенные интегралы:

$$1. \int \frac{5x+6}{(x+2)^2(x-2)} dx$$

Дана правильная рациональная дробь: степень числителя - первая, степень знаменателя - третья. Разложим подынтегральную функцию в сумму простейших дробей:

$$\frac{5x+6}{(x+2)^2(x-2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{x-2}.$$

Освобождаемся от знаменателя:

$$5x+6 = A(x+2)(x-2) + B(x-2) + C(x+2)^2.$$

Действительными корнями знаменателя являются числа 2 и -2.

Пусть $x=2$, тогда $16=16C$, $C=1$.

Пусть $x=-2$, тогда $-4=-4B$, $B=1$.

Возьмем еще одно произвольное значение x , например, пусть $x=0$, тогда $6=-4A-2B+4C$, $6=-4A+2$, $A=-1$.

Получили

$$\frac{5x+6}{(x+2)^2(x-2)} = -\frac{1}{x+2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{x-2}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{5x+6}{(x+2)^2(x-2)} dx = \int \left(-\frac{1}{x+2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{x-2} \right) dx =$$

$$= -\ln|x+2| - \frac{1}{x+2} + \ln|x-2| + C = -\frac{1}{x+2} + \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$$

$$2. \int \frac{5x^2 - 2x + 31}{(x-1)(x^2+16)} dx$$

Подынтегральная функция – правильная рациональная дробь.

Разложим ее в сумму простейших дробей.

$$\frac{5x^2 - 2x + 31}{(x-1)(x^2+16)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+16},$$

Освобождаемся от знаменателя:

$$5x^2 - 2x + 31 = A(x^2 + 16) + (Bx + C)(x - 1).$$

Знаменатель имеет один действительный корень $x=1$.

Пусть $x=1$, тогда $5 - 2 + 31 = 17A$, $34 = 17A$, $A = 2$.

Для нахождения B, C раскроем скобки и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x :

$$5x^2 - 2x + 31 = Ax^2 + 16A + Bx^2 + Cx - Bx - C$$

Сравним коэффициенты при x^2 :

$$5 = A + B,$$

тогда $B = 5 - A = 5 - 2 = 3$, т.е. $B = 3$.

Сравним коэффициенты при x^0 :

$$31 = 16A - C,$$

тогда $C = 16A - 31 = 16 \cdot 2 - 31 = 1$, т.е. $C = 1$.

Получили

$$\frac{5x^2 - 2x + 31}{(x-1)(x^2+16)} = \frac{2}{x-1} + \frac{3x+1}{x^2+16},$$

откуда

$$\begin{aligned} \int \frac{5x^2 - 2x + 31}{(x-1)(x^2+16)} dx &= \int \left(\frac{2}{x-1} + \frac{3x+1}{x^2+16} \right) dx = \int \frac{2}{x-1} dx + \int \frac{3x+1}{x^2+16} dx = \\ &= 2 \int \frac{dx}{x-1} + 3 \int \frac{x}{x^2+16} dx + \int \frac{dx}{x^2+16} = 2 \int \frac{dx}{x-1} + \frac{3}{2} \int \frac{d(x^2+16)}{x^2+16} + \int \frac{dx}{x^2+4^2} = \\ &= 2 \ln|x-1| + \frac{3}{2} \ln|x^2+16| + \frac{1}{4} \arctg \frac{x}{4} + C. \end{aligned}$$

Пример 7. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{5x^3 + 9x^2 - 22x - 8}{x^3 - 4x} dx$

Дана неправильная рациональная дробь: степень числителя - третья, степень знаменателя - третья. Выделим из дроби целую часть и остаток в виде правильной дроби, разделив числитель на знаменатель уголком:

$$\int \frac{5x^3 + 9x^2 - 22x - 8}{x^3 - 4x} dx = \int \left(5 + \frac{9x^2 - 2x - 8}{x^3 - 4x} \right) dx$$

Разложим полученную правильную дробь в сумму простейших дробей:

$$\begin{aligned} \frac{9x^2 - 2x - 8}{x^3 - 4x} &= \frac{9x^2 - 2x - 8}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2} = \\ &= \frac{A(x-2)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-2)}{x(x-2)(x+2)} \end{aligned}$$

Освободимся от знаменателя:

$$9x^2 - 2x - 8 = A(x-2)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-2)$$

Пусть $x=0$, тогда $A=2$

Пусть $x=-2$, тогда $B=3$

Пусть $x=2$, тогда $C=4$

$$\begin{aligned} \int \frac{5x^3 + 9x^2 - 22x - 8}{x^3 - 4x} dx &= \int 5dx + \int \frac{2}{x} dx + \int \frac{3dx}{x-2} + \int \frac{4dx}{x+2} = \\ &= 5x + 2\ln|x| + 3\ln|x+2| + C \end{aligned}$$

Нахождение неопределенных интегралов в программе wxMaxima выполняется функцией *integrate(выражение, переменная интегрирования)*. Далее необходимо нажать одновременно клавиши **Shift** и **Enter**. Ответ компьютер выдает в следующей после задания строке, но без произвольной постоянной C . Следует помнить, что некоторые математические функции имеют отличное от привычного обозначение, например, **tg** заменен на **tan**, **ctg** – на **cot**, **arctg** – на **atan**. Функция **ln** имеет представление **log**, а логарифмы по основаниям, отличным от числа e , не рассматриваются, либо должны быть приведены к основанию e . Постоянные, такие как e , записываются со значком % перед ними. То есть, e - записывается как %e, π – как %pi. Все функции записываются с маленькой буквы, а аргументы указываются в скобках. Например, $\sin x$ запишется как **sin(x)**. Знак умножения вводится знаком *. Степень вводится при помощи значка ^. Корень **sqrt(x)**.

Пример 8. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{x(a+bx)^3}$

```
(%i1) integrate(1/(x*(a+b*x)^3), x);
```

$$(\%o1) -\frac{\log(bx+a)}{a^3} + \frac{\log(x)}{a^3} + \frac{2bx+3a}{2a^2b^2x^2+4a^3bx+2a^4}$$

Пример 9. Найти интеграл $\int \frac{x^{\frac{3}{2}} dx}{(a^2 - b^2 x)^2}$

```
(%i1) integrate(x^(3/2)/((a^2-b^2*x)^2), x);
```

$$(\%o1) -\frac{a^2\sqrt{x}}{b^6x-a^2b^4} + \frac{2\sqrt{x}}{b^4} - \frac{3a\log(b\sqrt{x}+a)}{2b^5} + \frac{3a\log(b\sqrt{x}-a)}{2b^5}$$

Пример 10. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$

Поле Махита уравнения Матрица Анализ Упростить Список Графики Численные расчеты Ст

⚙️ ✂️ 📄 📋 📑 🔍 ↺️ ❌ ⬆️ ➡️ ↻️ ⬇️ ➡️ 👁️ Расчёты

```
(%i2) integrate(1/cos(x)^3, x);
```

$$(\%o2) \frac{\log(\sin(x)+1)}{4} - \frac{\log(\sin(x)-1)}{4} - \frac{\sin(x)}{2\sin(x)^2-2}$$

ЗАДАНИЕ 1

Задача 1. Найти неопределенный интеграл двумя способами (аналитически и с помощью программы wxMaxima).

1	$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}.$	2	$\int \frac{1+\ln x}{x} dx.$
3	$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$	4	$\int \frac{x^2 + \ln x^2}{x} dx.$
5	$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}.$	6	$\int \frac{(\arccos x)^3 - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$
7	$\int \operatorname{tg} x \ln \cos x dx.$	8	$\int \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)} dx.$
9	$\int \frac{x^3}{(x^2+1)^2} dx.$	10	$\int \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2} dx.$
11	$\int \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^5} dx.$	12	$\int \frac{x \cos x + \sin x}{(x \sin x)^2} dx.$
13	$\int \frac{x^3+x}{x^4+1} dx.$	14	$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4-x^2-1}}.$
15	$\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x-1}}.$	16	$\int \frac{1+\ln(x-1)}{x-1} dx.$
17	$\int \frac{4 \operatorname{arctg} x - x}{1+x^2} dx.$	18	$\int \frac{(x^2+1)dx}{(x^3+3x+1)^5}.$
19	$\int \frac{x^3}{x^2+4} dx.$	20	$\int \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x} dx.$
21	$\int \frac{2\cos x + 3\sin x}{(2\sin x - 3\cos x)^3} dx.$	22	$\int \frac{8x - \operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2} dx.$

23	$\int \frac{1/(2\sqrt{x}) + 1}{(\sqrt{x} + x)^2} dx.$	24	$\int \frac{x}{x^4 + 1} dx.$
25	$\int \frac{x - 1/x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$	26	$\int \frac{x + 1/x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$
27	$\int \frac{\operatorname{arctg} x + x}{1 + x^2} dx.$	28	$\int \frac{x - (\operatorname{arctg} x)^4}{1 + x^2} dx.$
29	$\int \frac{x^3}{x^2 + 1} dx.$	30	$\int \frac{(\arcsin x)^2 + 1}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$
31	$\int \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}(x + 1)} dx.$	32	$\int \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} dx$
33	$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}} dx$	34	$\int \frac{\sin 3x dx}{\sqrt{7 - 5 \cos 3x}}$
35	$\int \frac{dx}{x\sqrt{6 - \ln^2 x}}$	36	$\int \frac{e^{-\operatorname{arctg} x}}{1 + x^2} dx$
37	$\int \frac{(\arccos x)^2 + 2}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$	38	$\int \frac{1 - \ln(x + 1)}{x + 1} dx.$
39	$\int \frac{2 + \operatorname{ctg}^2 x}{\sin^2 x} dx$	40	$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} dx$

Задача 2. Найти неопределенный интеграл двумя способами (аналитически и с помощью программы wxMaxima).

1	$\int (4 - 3x)e^{-3x} dx.$	2	$\int \operatorname{arctg} \sqrt{4x - 1} dx.$
3	$\int (3x + 4)e^{3x} dx.$	4	$\int (4x - 2) \cos 2x dx.$
5	$\int (4 - 16x) \sin 4x dx.$	6	$\int (5x - 2)e^{3x} dx.$

7	$\int (1-6x)e^{2x} dx.$	8	$\int \ln(x^2+4) dx.$
9	$\int \ln(4x^2+1) dx.$	10	$\int (2-4x)\sin 2x dx.$
11	$\int \operatorname{arctg} \sqrt{6x-1} dx.$	12	$\int e^{-2x}(4x-3) dx.$
13	$\int e^{-3x}(2-9x) dx.$	14	$\int \operatorname{arctg} \sqrt{3x-1} dx.$
15	$\int \operatorname{arctg} \sqrt{2x-1} dx.$	16	$\int \operatorname{arctg} \sqrt{5x-1} dx.$
17	$\int (5x+6)\cos 2x dx.$	18	$\int (3x-2)\cos 5x dx.$
19	$\int (x\sqrt{2}-3)\cos 2x dx.$	20	$\int (4x+7)\cos 3x dx.$
21	$\int (2x-5)\cos 4x dx.$	22	$\int (8-3x)\cos 5x dx.$
23	$\int (x+5)\sin 3x dx.$	24	$\int (2-3x)\sin 2x dx.$
25	$\int (4x+3)\sin 5x dx.$	26	$\int (7x-10)\sin 4x dx.$
27	$\int (\sqrt{2}-8x)\sin 3x dx.$	28	$\int \frac{x dx}{\cos^2 x}.$
29	$\int \frac{x dx}{\sin^2 x}$	30	$\int x \sin^2 x dx.$
31	$\int \frac{x \cos x dx}{\sin^3 x}.$	32	$\int (1+x) \cdot 3^{-2x} dx$
33	$\int \operatorname{arctg} 3x dx$	34	$\int (2x+3) \cdot e^{-5x} dx$
35	$\int \sqrt{x} \ln 2x dx$	36	$\int (2x-8) \cdot 6^{5x} dx$
37	$\int (x-5) \cdot 7^{-2x} dx$	38	$\int \frac{x \sin x dx}{\cos^3 x}.$
39	$\int x \cos^2 x dx$	40	$\int (x-2) \cdot \ln 5x dx$

Задача 3. Найти неопределенный интеграл двумя способами (аналитически и с помощью программы wxMaxima).

1	$\int \frac{x^3 + 1}{x^2 - x} dx.$	2	$\int \frac{3x^3 + 1}{x^2 - 1} dx.$
3	$\int \frac{x^3 - 17}{x^2 - 4x + 3} dx.$	4	$\int \frac{2x^3 + 5}{x^2 - x - 2} dx.$
5	$\int \frac{2x^3 - 1}{x^2 + x - 6} dx.$	6	$\int \frac{3x^3 + 25}{x^2 + 3x + 2} dx.$
7	$\int \frac{x^3 + 2x^2 + 3}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx.$	8	$\int \frac{3x^3 + 2x^2 + 1}{(x+2)(x-2)(x-1)} dx.$
9	$\int \frac{x^3}{(x-1)(x+1)(x+2)} dx.$	10	$\int \frac{x^3 - 3x^2 - 12}{(x-4)(x-3)(x-2)} dx.$
11	$\int \frac{x^3 - 3x^2 - 12}{(x-4)(x-3)x} dx.$	12	$\int \frac{4x^3 + x^2 + 2}{x(x-1)(x-2)} dx.$
13	$\int \frac{3x^3 - 2}{x^3 - x} dx.$	14	$\int \frac{x^3 - 3x^2 - 12}{(x-4)(x-2)x} dx.$
15	$\int \frac{x^5 - x^3 + 1}{x^2 - x} dx.$	16	$\int \frac{x^5 - x^3 + 1}{x^2 - x} dx.$
17	$\int \frac{2x^5 - 8x^3 + 3}{x^2 - 2x} dx.$	18	$\int \frac{3x^5 - 12x^3 - 7}{x^2 + 2x} dx.$
19	$\int \frac{-x^5 + 9x^3 + 4}{x^2 + 3x} dx.$	20	$\int \frac{-x^5 + 25x^3 + 1}{x^2 + 5x} dx.$
21	$\int \frac{x^3 - 5x^2 + 5x + 23}{(x-1)(x+1)(x-5)} dx.$	22	$\int \frac{x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x + 9}{x(x-1)(x+3)} dx.$
23	$\int \frac{2x^4 - 5x^2 - 8x - 8}{x(x-2)(x+2)} dx.$	24	$\int \frac{4x^4 + 2x^2 - x - 3}{x(x-1)(x+1)} dx.$

25	$\int \frac{3x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 2}{x(x-1)(x+2)} dx.$	26	$\int \frac{2x^4 + 2x^3 - 41x^2 + 20}{x(x-4)(x+5)} dx.$
27	$\int \frac{x^5 - x^4 - 6x^3 + 13x + 6}{x(x-3)(x+2)} dx.$	28	$\int \frac{3x^3 - x^2 - 12x - 2}{x(x+1)(x-2)} dx.$
29	$\int \frac{2x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x - 9}{x(x-1)(x+3)} dx.$	30	$\int \frac{2x^3 - x^2 - 7x - 12}{x(x-3)(x+1)} dx.$
31	$\int \frac{2x^3 - 40x - 8}{x(x+4)(x-2)} dx.$	32	$\int \frac{x^3 + 3}{x(x^2 - x - 6)} dx$
33	$\int \frac{2x^3 - 1}{x(x-2)(x-3)} dx$	34	$\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx$
35	$\int \frac{x^3 + 3}{x^3 - x^2 - 6x} dx$	36	$\int \frac{x^3 + 4x^2 + 4x + 3}{(x+1)(x+2)(x-1)} dx.$
37	$\int \frac{3x^3 + 2}{x^3 - 4x} dx.$	38	$\int \frac{3x^3 + 4x^2 + 1}{x(x^2 + 3x + 2)} dx.$
39	$\int \frac{x^3 + x + 2}{(x-4)(x-3)} dx$	40	$\int \frac{2x^4 - x^3 + 5}{x^3 - 9x} dx.$

Задача 4. Найти неопределенный интеграл с помощью программы wxMaxima.

1	$\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x^4\sqrt{x^3}} dx.$	2	$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x^3\sqrt{x^2}} dx.$
3	$\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt{x}} dx.$	4	$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}{x^9\sqrt{x^4}} dx.$
5	$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x^9\sqrt{x^8}} dx.$	6	$\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x})^2}}{x^9\sqrt{x^5}} dx.$

7	$\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x^2})^2}}{x^2 \sqrt[9]{x}} dx.$	8	$\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})^2}}{x^6 \sqrt{x^5}} dx.$
9	$\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x^2} dx.$	10	$\int \frac{\sqrt{1+x}}{x^2 \sqrt{x}} dx.$
11	$\int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt{x})^3}}{x^8 \sqrt{x^7}} dx.$	12	$\int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt[3]{x})^3}}{x^{12} \sqrt{x^7}} dx.$
13	$\int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt[3]{x^2})^3}}{x^2 \sqrt[6]{x}} dx.$	14	$\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[4]{x^3}}}{x^2 \sqrt[8]{x}} dx.$
15	$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}{x^2} dx.$	16	$\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x^3})^2}}{x^2 \sqrt[4]{x}} dx.$
17	$\int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt{x})^4}}{x^{10} \sqrt{x^9}} dx.$	18	$\int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt[3]{x})^4}}{x^5 \sqrt{x^3}} dx.$
19	$\int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt[3]{x^2})^4}}{x^2 \sqrt[5]{x}} dx.$	20	$\int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt[4]{x^3})^4}}{x^2 \sqrt[20]{x^7}} dx.$
21	$\int \frac{\sqrt[5]{1+\sqrt[5]{x^4}}}{x^2 \cdot \sqrt[5]{x^{11}}} dx.$	22	$\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[5]{x^4}}}{x^2 \sqrt[5]{x}} dx.$
23	$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[5]{x^4}}}{x^2 \sqrt[15]{x}} dx.$	24	$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[5]{x^4}}}{x^2 \sqrt[15]{x}} dx.$
25	$\int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt[5]{x^4})^3}}{x^2 \sqrt[5]{x^2}} dx.$	26	$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{x^3 \sqrt{x}} dx.$

27	$\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^2}}{x^{12}\sqrt{x^5}} dx.$	28	$\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^2}}{x^{12}\sqrt{x^5}} dx.$
29	$\int \frac{\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x^6\sqrt{x^5}} dx.$	30	$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[5]{x}}}{x^{15}\sqrt{x^4}} dx.$
31	$\int \frac{\sqrt[5]{1+\sqrt[3]{x}}}{x^5\sqrt{x^2}} dx.$	32	$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx.$
33	$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[6]{x}}}{\sqrt{x}} dx.$	34	$\int \sqrt{x(1+x^3)} dx.$
35	$\int x^3 \cdot \sqrt[3]{1+x^2} dx.$	36	$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x} dx.$
37	$\int \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2} dx.$	38	$\int \sqrt[3]{x(1-x^2)} dx.$
39	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x}+1)^{10}}$	40	$\int \sqrt[3]{x} \sqrt{\sqrt[3]{x^4}+1} dx$

1.2. Вычисление определенных интегралов

Определенный интеграл вычисляем по формуле **Ньютона – Лейбница**: если $F(x)$ - первообразная для $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Формула интегрирования «по частям»:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

где $u = u(x)$, $v = v(x)$ - непрерывно дифференцируемые на отрезке $[a, b]$ функции переменной x .

Замена переменной

Пусть имеется определённый интеграл $\int_a^b f(x) dx$, причем $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Если существует функция $x = \varphi(t)$, имеющая непрерывную производную $x = \varphi'(t)$ на промежутке с концами α и β , где $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, и при этом $f(\varphi(t))$ непрерывна на этом же промежутке, то справедливо равенство

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Пример 11. Вычислить определенные интегралы:

$$1. \int_1^2 \frac{x+1}{x^2} dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx = \left(\ln|x| - \frac{1}{x} \right) \Big|_1^2 = \ln 2 - \frac{1}{2} - \ln 1 + 1 = \frac{1}{2} + \ln 2.$$

$$2. \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{\sin x}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^{-1/3} d(\sin x) = \frac{3}{2} \sin^{2/3} x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\sin^2 x} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}} - 1 \right)$$

$$3. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-x^2+2x-1+1+3}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-(x-1)^2}} = \arcsin \frac{x-1}{2} \Big|_0^1 = \arcsin 0 - \arcsin \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{6}$$

$$4. \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx = \left(\begin{array}{ll} u = \arcsin x & dv = dx \\ du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} & v = x \end{array} \right) = (x \arcsin x) \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{2} - \left(\begin{array}{l} t = 1 - x^2 \\ dt = -2x dx \\ x dx = -\frac{1}{2} dt \end{array} \right) \left(\begin{array}{l} x_1 = 0 \Rightarrow t_1 = 1; \\ x_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow t_2 = \frac{3}{4} \end{array} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \int_1^{\frac{3}{4}} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2} \int_1^{\frac{3}{4}} t^{-\frac{1}{2}} dt =$$

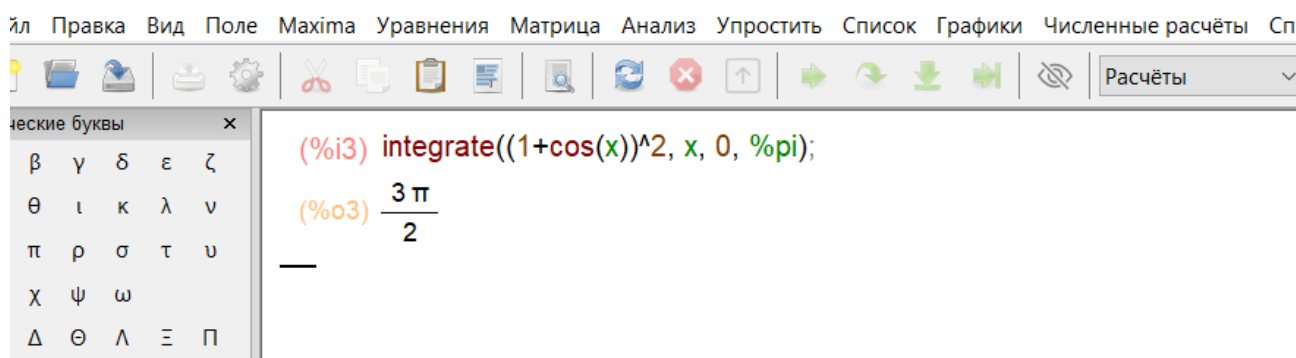
$$= \frac{\pi}{12} + \left(t^{\frac{1}{2}} \right)_1^{\frac{3}{4}} = \frac{\pi}{12} + \left(\sqrt{t} \right) \Big|_1^{\frac{3}{4}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1.$$

$$5. \int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}} = \left(\begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{array} \right) \left(\begin{array}{l} x_1 = 0 \Rightarrow t_1 = 0 \\ x_2 = 4 \Rightarrow t_2 = 2 \end{array} \right) = \int_0^2 \frac{2t dt}{1+t} = 2 \int_0^2 \frac{t+1-1}{1+t} dt =$$

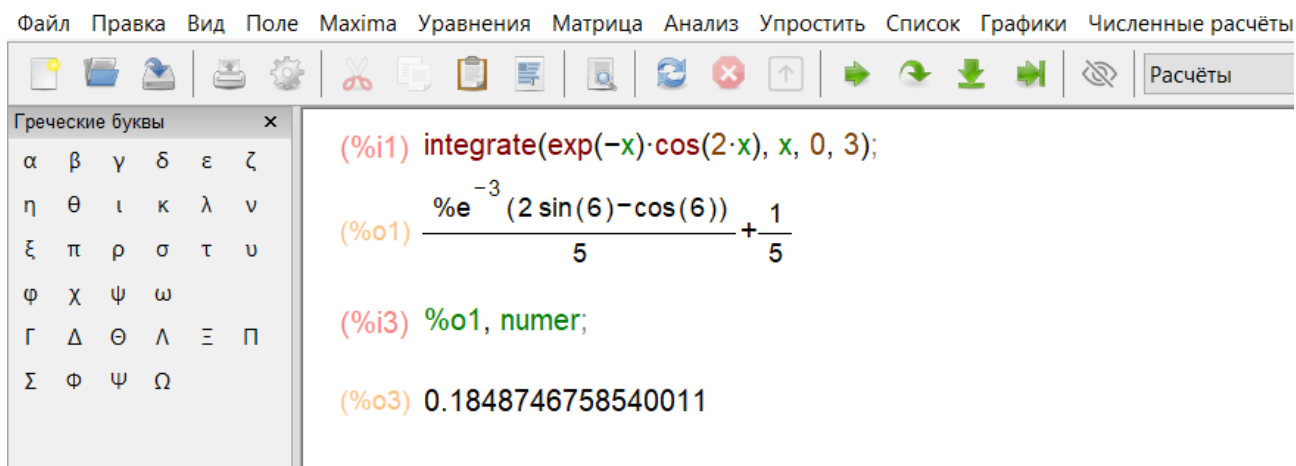
$$= 2 \int_0^2 \left(1 - \frac{1}{1+t} \right) dt = 2(t - \ln(t+1)) \Big|_0^2 = 2(2 - \ln 3)$$

Определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ в символьном режиме (аналитически) вычисляется с помощью команды ***integrate(f, x, a, b)***, где f – подынтегральная функция, x – переменная интегрирования, a и b соответственно верхний и нижний пределы интегрирования.

Пример 12. Вычислить интеграл: $\int_0^{\pi} (1 + \cos x)^2 dx$



Пример 13. Вычислить интеграл: $\int_0^3 e^{-x} \cos 2x dx$



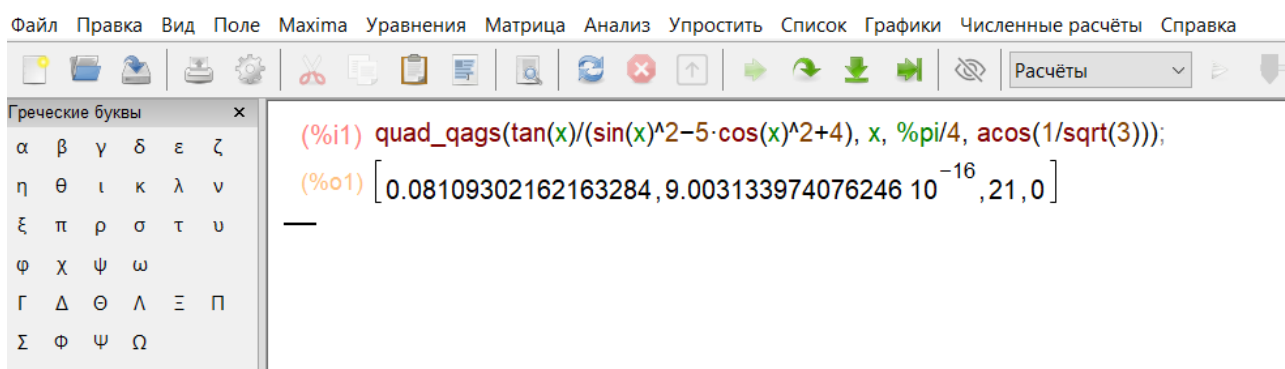
Результат вычисления: 0.184874675854

Численное интегрирование выполняется функцией **romberg** или при помощи функций пакета **quadpack**.

Пример 14. Вычислить интеграл
$$\int_{\pi/4}^{\arccos(1/\sqrt{3})} \frac{\operatorname{tg} x \, dx}{\sin^2 x - 5 \cos^2 x + 4}$$

В стоке меню выбираем кнопку **Анализ** → **Integrate...**, в результате появляется диалоговое окно для ввода подынтегральной функции и пределов интегрирования «**Интегрировать**», здесь же указывается режим интегрирования (численное), а также метод интегрирования **romberg** или **quadpack**.

После нажатия клавиши **Ok** в рабочем окне видим результат интегрирования



В ячейке вывода массив результата вычисления содержит:

0.081093021621633 – приближённое значение интеграла;

$9.0031339740762459 \cdot 10^{-16}$ – относительная погрешность вычислений;

21 – число интервалов разбиения;

0 – признак корректности вычислений (0 – без проблем).

Задача 5. Вычислить определенный интеграл двумя способами (аналитически и с помощью программы wxMaxima).

1	$\int_{e+1}^{e^2+1} \frac{1 + \ln(x-1)}{x-1} dx.$	2	$\int_0^1 \frac{(x^2 + 1) dx}{(x^3 + 3x + 1)^2}.$
3	$\int_0^1 \frac{4 \operatorname{arctg} x - x}{1 + x^2} dx.$	4	$\int_0^2 \frac{x^3 dx}{x^2 + 4}.$
5	$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{x + \cos x}{x^2 + 2 \sin x} dx.$	6	$\int_0^{\pi/4} \frac{2 \cos x + 3 \sin x}{(2 \sin x - 3 \cos x)^3} dx.$
7	$\int_0^{1/2} \frac{8x - \operatorname{arctg} 2x}{1 + 4x^2} dx.$	8	$\int_1^4 \frac{1/(2\sqrt{x}) + 1}{(\sqrt{x} + x)^2} dx.$
9	$\int_0^1 \frac{x dx}{x^4 + 1}.$	10	$\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x + 1/x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$
11	$\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x - 1/x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$	12	$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} x + x}{1 + x^2} dx.$
13	$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x - (\operatorname{arctg} x)^4}{1 + x^2} dx.$	14	$\int_0^1 \frac{x^3}{x^2 + 1} dx.$
15	$\int_0^{\sin 1} \frac{(\arcsin x)^2 + 1}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$	16	$\int_1^3 \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}(x + 1)} dx.$
17	$\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + 1}}.$	18	$\int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx.$
19	$\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}}.$	20	$\int_1^e \frac{x^2 + \ln x^2}{x} dx.$
21	$\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}.$	22	$\int_0^1 \frac{x^3 dx}{(x^2 + 1)^2}.$

23	$\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x \ln \cos x dx.$	24	$\int_{-1}^0 \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)} dx.$
25	$\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{(\arccos x)^3 - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$	26	$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{1 - \cos x}{(x - \sin x)^2} dx.$
27	$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^5} dx.$	28	$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x \cos x + \sin x}{(x \sin x)^2} dx.$
29	$\int_0^1 \frac{x^3 + x}{x^4 + 1} dx.$	30	$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{x^4 - x^2 - 1}}.$
31	$\int_2^9 \frac{xdx}{\sqrt[3]{x-1}}.$	32	$\int_e^{e^9} \frac{\sqrt{1+5\ln x}}{2x} dx$
33	$\int_{e-1}^{e^2-1} \frac{1 + \ln(x+1)}{x+1} dx.$	34	$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg} 2x - x}{1 + 4x^2} dx.$
35	$\int_{2\pi}^{4\pi} \frac{x^2 + \cos x}{x^3 + 3\sin x} dx.$	36	$\int_0^2 \frac{\operatorname{tg}(x-2)}{\cos^2(x-2)} dx.$
37	$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{ctg} x \ln \sin x dx.$	38	$\int_{-1}^6 \frac{xdx}{\sqrt[3]{x+2}}.$
39	$\int_0^{\pi/2} \frac{2\sin x - \cos x}{(2\cos x + \sin x)^3} dx.$	40	$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2 dx}{x^6 + 4}$

Задача 6. Вычислить определенный интеграл двумя способами (аналитически и с помощью программы wxMaxima).

1	$\int_{-2}^0 (x^2 + 5x + 6) \cos 2x dx.$	2	$\int_{-2}^0 (x^2 - 4) \cos 3x dx.$
3	$\int_{-1}^0 (x^2 + 4x + 3) \cos x dx.$	4	$\int_{-2}^0 (x+2)^2 \cos 3x dx.$

5	$\int_{-2}^2 (x^2 - 1) e^{-\frac{x}{2}} dx.$	6	$\int_{-1}^0 x^2 e^{-x} dx.$
7	$\int_0^{\pi} (9x^2 + 9x + 11) \cos 3x dx.$	8	$\int_0^{\pi} (8x^2 + 16x + 17) \cos 4x dx.$
9	$\int_0^{2\pi} (3x^2 + 5) \cos 2x dx.$	10	$\int_0^{2\pi} (2x^2 - 15) \cos 3x dx.$
11	$\int_0^{2\pi} (3 - 7x^2) \cos 2x dx.$	12	$\int_0^{2\pi} (1 - 8x^2) \cos 4x dx.$
13	$\int_{-1}^0 (x^2 + 2x + 1) \sin 3x dx.$	14	$\int_0^3 (x^2 - 3x) \sin 2x dx.$
15	$\int_{-1}^0 (x^2 + 1) e^{-2x} dx.$	16	$\int_{-2}^{-1} (x + 2)^2 e^{-x} dx.$
17	$\int_{-3}^0 (x^2 + 6x + 9) \sin 2x dx.$	18	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (x^2 + 17,5) \sin 2x dx.$
19	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 5x^2) \sin x dx.$	20	$\int_{\frac{\pi}{4}}^3 (3x - x^2) \sin 2x dx.$
21	$\int_1^2 x \ln^2 x dx.$	22	$\int_1^{e^2} \frac{\ln^2 x dx}{\sqrt{x}}.$
23	$\int_1^8 \frac{\ln^2 x dx}{\sqrt[3]{x^2}}.$	24	$\int_0^1 (x + 1) \ln^2 (x + 1) dx.$
25	$\int_2^3 (x - 1)^3 \ln^2 (x - 1) dx.$	26	$\int_{-1}^0 (x + 2)^3 \ln^2 (x + 2) dx.$
27	$\int_1^2 x^2 \ln^2 x dx.$	28	$\int_1^e \sqrt{x} \ln^2 x dx.$

29	$\int_{-1}^1 x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx.$	30	$\int_0^1 x^2 e^{3x} dx.$
31	$\int_{-2}^0 (x^2 + 2) e^{\frac{x}{2}} dx.$	32	$\int_1^2 \frac{\ln^2 x dx}{x^2}.$
33	$\int_{-4}^0 (x^2 + 7x + 12) \cos x dx.$	34	$\int_0^{\pi} (2x^2 + 4x + 7) \cos 2x dx.$
35	$\int_2^3 (x-1) \ln^2 (x-1) dx.$	36	$\int_0^2 (x+1)^2 \ln^2 (x+1) dx.$
37	$\int_0^{\pi} (x^2 - 3x + 2) \sin x dx.$	38	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 - 5x + 6) \sin 3x dx.$
39	$\int_{-1}^0 x^2 e^{-3x} dx.$	40	$\int_{-1}^0 (x+1)^2 e^{-2x} dx.$

Задача 7. Вычислить определенный интеграл с помощью программы wxMaxima.

1	$\int_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \sin^8 x dx.$	2	$\int_0^{\pi} 2^4 \sin^6 x \cos^2 x dx.$
3	$\int_0^{2\pi} \sin^4 x \cos^4 x dx.$	4	$\int_0^{\pi} \sin^4 (x/4) \cos^5 (x/4) dx.$
5	$\int_0^{\pi} 2^4 \cos^8 (x/2) dx.$	6	$\int_{-\pi/2}^0 2^8 \sin^8 x dx.$
7	$\int_{\pi/2}^{\pi} 2^4 \sin^6 x \cos^2 x dx.$	8	$\int_0^{\pi} \sin^7 x \cos^4 x dx.$
9	$\int_0^{2\pi} \sin^2 x \cos^6 x dx.$	10	$\int_0^{2\pi} \cos^8 (x/4) dx.$

11	$\int_0^{\pi} 2^4 \sin^8(x/2) dx.$	12	$\int_{-\pi/2}^0 \sin^6 x \cos^3 x dx.$
13	$\int_{\pi/2}^{2\pi} 2^8 \sin^4 x \cos^4 x dx.$	14	$\int_0^{\pi} 2^4 \sin^2 x \cos^6 x dx.$
15	$\int_0^{2\pi} \cos^8 x dx.$	16	$\int_{-\pi}^0 \sin^7 x \cos^6 x dx.$
17	$\int_0^{\pi} 2^4 \sin^6(x/2) \cos^2(x/2) dx.$	18	$\int_{-\pi/2}^0 2^8 \sin^4 x \cos^4 x dx.$
19	$\int_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \sin^2 x \cos^6 x dx.$	20	$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^4 x \cos^7 x dx.$
21	$\int_0^{2\pi} \sin^8 x dx.$	22	$\int_0^{2\pi} \sin^6(x/4) \cos^2(x/4) dx.$
23	$\int_0^{\pi} 2^4 \sin^4(x/2) \cos^4(x/2) dx.$	24	$\int_{\pi/2}^{\pi} \sin^5 x \cos^6 x dx.$
25	$\int_{\pi/2}^{2\pi} 2^8 \cos^8 x dx.$	26	$\int_0^{\pi} 2^4 \sin^8 x dx.$
27	$\int_0^{2\pi} \sin^6 x \cos^2 x dx.$	28	$\int_0^{2\pi} \sin^6(x/4) \cos^5(x/4) dx.$
29	$\int_0^{\pi} 2^4 \sin^2(x/2) \cos^6(x/2) dx.$	30	$\int_{-\pi/2}^0 2^8 \cos^8 x dx.$
31	$\int_0^{2\pi} \sin^4 3x \cos^4 3x dx.$	32	$\int_{-\pi/4}^{-\pi/2} \sin^5 2x \cos^4 2x dx.$
33	$\int_0^{2\pi} \sin^8(x/4) dx.$	34	$\int_{-\pi/2}^0 2^8 \sin^2 x \cos^6 x dx.$

35	$\int_{-\pi}^0 2^8 \sin^6 x \cos^2 x \, dx.$	36	$\int_{-\pi/4}^0 \sin^8 2x \cos^3 2x \, dx.$
37	$\int_0^{\pi} 2^4 \sin^4 x \cos^4 x \, dx.$	38	$\int_0^{\pi} 2^4 \cos^8 x \, dx.$
39	$\int_0^{2\pi} \sin^2(x/4) \cos^6(x/4) \, dx.$	40	$\int_{-\pi}^0 \sin^3 x \cos^8 x \, dx.$

Задача 8. Вычислить определенный интеграл с помощью программы wxMaxima.

1	$\int_0^1 \frac{4\sqrt{1-x} - \sqrt{3x+1}}{(\sqrt{3x+1} + 4\sqrt{1-x})(3x+1)^2} dx.$	2	$\int_1^{64} \frac{1 - \sqrt[6]{x} + 2\sqrt[3]{x}}{x + 2\sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^4}} dx.$
3	$\int_{-14/15}^{-7/8} \frac{6\sqrt{x+2}}{(x+2)^2 \sqrt{x+1}} dx.$	4	$\int_6^9 \sqrt{\frac{9-2x}{2x-21}} dx.$
5	$\int_0^5 e^{\sqrt{\frac{5-x}{5+x}}} \frac{dx}{(5+x)\sqrt{25-x^2}}.$	6	$\int_8^{12} \sqrt{\frac{6-x}{x-14}} dx.$
7	$\int_0^1 e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}.$	8	$\int_{5/2}^{10/3} \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}}{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2})(x-2)^2} dx.$
9	$\int_1^8 \frac{5\sqrt{x+24}}{(x+24)^2 \sqrt{x}} dx.$	10	$\int_1^2 \frac{x + \sqrt{3x-2} - 10}{\sqrt{3x-2} + 7} dx.$
11	$\int_6^{10} \sqrt{\frac{4-x}{x-12}} dx.$	12	$\int_0^2 \frac{(4\sqrt{2-x} - \sqrt{2x+2}) dx}{(\sqrt{2x+2} + 4\sqrt{2-x})(2x+2)^2}.$
13	$\int_{-1/2}^0 \frac{x dx}{2 + \sqrt{2x+1}}.$	14	$\int_0^4 e^{\sqrt{\frac{4-x}{4+x}}} \frac{dx}{(4+x)\sqrt{16-x^2}}.$
15	$\int_{1/8}^1 \frac{15\sqrt{x+3}}{(x+3)^2 \sqrt{x}} dx.$	16	$\int_{-5/3}^1 \frac{\sqrt[3]{3x+5} + 2}{1 + \sqrt[3]{3x+5}} dx.$

17	$\int_2^3 \sqrt{\frac{3-2x}{2x-7}} dx.$	18	$\int_0^7 \frac{\sqrt{x+25}}{(x+25)^2 \sqrt{x+1}} dx.$
19	$\int_0^2 \frac{(4\sqrt{2-x} - \sqrt{3x+2}) dx}{(\sqrt{3x+2} + 4\sqrt{2-x})(3x+2)^2}.$	20	$\int_0^2 e^{\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}} \frac{dx}{(2+x)\sqrt{4-x^2}}.$
21	$\int_3^5 \sqrt{\frac{2-x}{x-6}} dx.$	22	$\int_{1/24}^{1/3} \frac{5\sqrt{x+1}}{(x+1)^2 \sqrt{x}} dx.$
23	$\int_9^{15} \sqrt{\frac{6-x}{x-18}} dx.$	24	$\int_0^1 \frac{(4\sqrt{1-x} - \sqrt{2x+1}) dx}{(\sqrt{2x+1} + 4\sqrt{1-x})(2x+1)^2}.$
25	$\int_1^{64} \frac{(2 + \sqrt[3]{x}) dx}{(\sqrt[6]{x} + 2\sqrt{x^3} + \sqrt{x})\sqrt{x}}.$	26	$\int_{16/15}^{4/3} \frac{4\sqrt{x}}{x^2 \sqrt{x-1}} dx.$
27	$\int_0^6 \frac{e^{\sqrt{(6-x)/(6+x)}} dx}{(6+x)\sqrt{36-x^2}}.$	28	$\int_1^{64} \frac{6 - \sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x^3} - 7x - 6\sqrt[4]{x^3}} dx.$
29	$\int_0^1 \frac{(4\sqrt{1-x} - \sqrt{x+1}) dx}{(\sqrt{x+1} + 4\sqrt{1-x})(x+1)^2}.$	30	$\int_0^3 \frac{e^{\sqrt{(3-x)/(3+x)}} dx}{(3+x)\sqrt{9-x^2}}.$
31	$\int_0^1 \sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3} dx.$	32	$\int_1^{64} \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})} dx.$
33	$\int_1^{64} \frac{\sqrt[6]{x}}{x(\sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{x})} dx.$	34	$\int_0^4 \frac{x^2 dx}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}.$
35	$\int_0^7 \frac{e^{\sqrt{(7-x)/(7+x)}} dx}{(7+x)\sqrt{49-x^2}}.$	36	$\int_1^{63} \frac{(\sqrt{x+1} + 1) dx}{\sqrt[3]{x+1} - 1}.$
37	$\int_1^{64} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x^5}} dx.$	38	$\int_0^{1/2} x \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx.$

39	$\int_{1/4}^1 \sqrt{\frac{2+x}{x}} dx.$	40	$\int_0^2 \frac{(4\sqrt{2-x} - \sqrt{x+2}) dx}{(\sqrt{x+2} + 4\sqrt{2-x})(x+2)^2}.$
----	---	----	---

Задача 9. Вычислить определенный интеграл с помощью программы wxMaxima.

1	$\int_0^{16} \sqrt{256 - x^2} dx.$	2	$\int_0^1 x^2 \sqrt{1 - x^2} dx.$
3	$\int_0^5 \frac{dx}{(25 + x^2) \sqrt{25 + x^2}}.$	4	$\int_0^3 \frac{dx}{(9 + x^2)^{3/2}}.$
5	$\int_0^{\sqrt{5}/2} \frac{dx}{\sqrt{(5 - x^2)^3}}.$	6	$\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^4} dx.$
7	$\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}.$	8	$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(4 - x^2)^3}}.$
9	$\int_0^1 \frac{x^4 dx}{(2 - x^2)^{3/2}}.$	10	$\int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{16 - x^2}}.$
11	$\int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx.$	12	$\int_0^4 \frac{dx}{(16 + x^2)^{3/2}}.$
13	$\int_0^4 x^2 \sqrt{16 - x^2} dx.$	14	$\int_0^{5/2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{25 - x^2}}.$
15	$\int_0^5 x^2 \sqrt{25 - x^2} dx.$	16	$\int_0^4 \sqrt{16 - x^2} dx.$
17	$\int_0^{4\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(64 - x^2)^3}}.$	18	$\int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2 - 2}}{x^4} dx.$

19	$\int_0^{2\sqrt{2}} \frac{x^4 dx}{(16-x^2)\sqrt{16-x^2}}.$	20	$\int_{-3}^0 x^2 \sqrt{9-x^2} dx.$
21	$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$	22	$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{(16-x^2)^3}}.$
23	$\int_4^{4\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-8)^3}}.$	24	$\int_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4} dx.$
25	$\int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx.$	26	$\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4} dx.$
27	$\int_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{(x^2-3)\sqrt{x^2-3}}.$	28	$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x^4 dx}{(4-x^2)^{3/2}}.$
29	$\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$	30	$\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}.$
31	$\int_0^3 \sqrt{(9-x^2)^3} dx.$	32	$\int_0^2 \sqrt{16-x^2} dx.$
33	$\int_0^3 x^2 \sqrt{9-x^2} dx.$	34	$\int_4^8 \frac{\sqrt{x^2-16}}{x^4} dx.$
35	$\int_{\sqrt{10}}^{2\sqrt{5}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-5)^3}}.$	36	$\int_0^2 \frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}}.$
37	$\int_0^2 \frac{x^4 dx}{\sqrt{(8-x^2)^3}}.$	38	$\int_0^2 \sqrt{(4-x^2)^3} dx.$
39	$\int_0^{3/2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}.$	40	$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} dx.$

Задача 10. Вычислить определенный интеграл с помощью программы wxMaxima.

1	$\int_{\pi/2}^{2\operatorname{arctg} 2} \frac{dx}{\sin^2 x (1 - \cos x)}.$	2	$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{2 + \cos x}.$
3	$\int_{\pi/2}^{2\operatorname{arctg} 2} \frac{dx}{\sin^2 x (1 + \cos x)}.$	4	$\int_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 3} \frac{dx}{(3\operatorname{tg} x + 5) \sin 2x}.$
5	$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x - \sin x}{(1 + \sin x)^2} dx.$	6	$\int_{2\operatorname{arctg} 2}^{2\operatorname{arctg} 3} \frac{dx}{\cos x (1 - \cos x)}.$
7	$\int_{2\operatorname{arctg}(1/3)}^{2\operatorname{arctg}(1/2)} \frac{dx}{\sin x (1 - \sin x)}.$	8	$\int_{\arccos(4/\sqrt{17})}^{\pi/4} \frac{(2\operatorname{ctg} x + 1) dx}{(2 \sin x + \cos x)^2}.$
9	$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{5 + 4 \cos x}.$	10	$\int_0^{2\pi/3} \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x + \sin x} dx.$
11	$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{1 + \sin x - \cos x}.$	12	$\int_0^{\operatorname{arctg} 2} \frac{(12 + \operatorname{tg} x) dx}{3 \sin^2 x + 12 \cos^2 x}.$
13	$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{1 + \sin x + \cos x}.$	14	$\int_0^{2\operatorname{arctg}(1/2)} \frac{1 + \sin x}{(1 - \sin x)^2} dx.$
15	$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{1 + \sin x + \cos x}.$	16	$\int_0^{\pi/4} \frac{(7 + 3\operatorname{tg} x) dx}{(\sin x + 2 \cos x)^2}.$
17	$\int_{-2\pi/3}^0 \frac{\cos x dx}{1 + \cos x - \sin x}.$	18	$\int_{-\pi/2}^0 \frac{\cos x dx}{(1 + \cos x - \sin x)^2}.$
19	$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{(1 + \cos x + \sin x)^2}.$	20	$\int_0^{\operatorname{arctg}(2/3)} \frac{(6 + \operatorname{tg} x) dx}{9 \sin^2 x + 4 \cos^2 x}.$
21	$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{(1 + \sin x)^2}.$	22	$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{(1 + \cos x + \sin x)^2}.$

23	$\int_{-\pi/2}^0 \frac{\sin x dx}{(1 + \cos x - \sin x)^2}.$	24	$\int_{-\arccos(1/\sqrt{10})}^0 \frac{(3tg^2 x - 50)dx}{2tgx + 7}.$
25	$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x dx}{(1 + \cos x + \sin x)^2}.$	26	$\int_0^{2\pi/3} \frac{\cos^2 x dx}{(1 + \cos x + \sin x)^2}.$
27	$\int_{\pi/2}^{2\arctg 2} \frac{dx}{\sin x(1 + \sin x)}.$	28	$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(1 + \cos x + \sin x)^2}.$
29	$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{2 + \sin x}.$	30	$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x(1 + \cos x)}.$
31	$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{5 + 3\sin x}.$	32	$\int_0^{\pi/4} \frac{6\sin^2 x dx}{3\cos 2x - 4}.$
33	$\int_0^{2\arctg(1/3)} \frac{\cos x dx}{(1 - \sin x)(1 + \cos x)}.$	34	$\int_0^{2\arctg(1/2)} \frac{(1 - \sin x) dx}{\cos x(1 + \cos x)}.$
35	$\int_0^{\pi/2} \frac{(1 + \cos x) dx}{1 + \sin x + \cos x}.$	36	$\int_0^{\pi/3} \frac{tg^2 x dx}{3\cos 2x + 4}.$
37	$\int_{2\arctg(1/2)}^{\pi/2} \frac{dx}{(1 + \sin x - \cos x)^2}.$	38	$\int_{-2\pi/3}^0 \frac{\cos^2 x dx}{(1 + \cos x - \sin x)^2}.$
39	$\int_{2\arctg(1/2)}^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{(1 - \cos x)^3}.$	40	$\int_0^{\pi/4} \frac{(5tgx + 2)dx}{2\sin 2x + 5}.$

1.3. Вычисление несобственных интегралов

Интегралы с бесконечными пределами интегрирования

Пусть $f(x)$ есть функция, определённая и непрерывная для всех $x \in [a, +\infty)$. Тогда для каждого конечного b существует определённый интеграл $\int_a^b f(x)dx$. Он изменяется вместе с b .

Определение. Если существует конечный предел $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx$ то его называют **несобственным интегралом** от функции $f(x)$ на промежутке $[a, +\infty)$. Символически его обозначают $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. Таким образом,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Если же конечный предел не существует, то говорят, что несобственный интеграл расходится.

Пример 15. Вычислить несобственный интеграл или убедиться, что он расходится:

$$\begin{aligned} 1. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 9} &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{dx}{x^2 + 9} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} \right)_0^a = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{a}{3} - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} 0 \right) = \\ &= \left(\frac{1}{3} \operatorname{arctg} (+\infty) - 0 \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

$$2. \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_e^b \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln \ln x \Big|_e^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln \ln b - \ln \ln e) = +\infty$$

Конечный предел не существует, следовательно, несобственный интеграл расходится.

$$\begin{aligned} 3. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{8 + 2x^2 + 4x} &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{2(x^2 + 2x + 4)} + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{2(x^2 + 2x + 4)} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{d(x+1)}{(x+1)^2 + 3} + \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{d(x+1)}{(x+1)^2 + 3} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{3}} \Big|_a^0 + \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{3}} \Big|_0^b = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\sqrt{3}} \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg} \frac{a+1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{1}{2\sqrt{3}} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{b+1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

Интегралы от неограниченных функций

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b)$ и $f(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow b$.

Точку $x = b$ называют в этом случае особой. Возьмем как угодно малое число $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < b - a$). Функция на $[a, b - \varepsilon]$ непрерывна, поэтому существует

интеграл $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$. Рассмотрим существование предела $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$.

Определение. Если существует конечный предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, то его

называют несобственным интегралом (второго рода) от неограниченной функции $f(x)$ на $[a, b]$, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

Обычно в этом случае говорят, что несобственный интеграл сходится. Если же предел не существует или равен бесконечности, то говорят, что несобственный интеграл расходится.

Несобственный интеграл от функции $f(x)$, непрерывной везде на отрезке $[a, b]$ за исключением точки $c \in (a, b)$ и для которой верно следующее:

$$f(x) \rightarrow \infty \text{ при } x \rightarrow c,$$

понимается как сумма двух несобственных интегралов:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится лишь тогда, когда сходятся оба интеграла в правой части.

Пример 16. Вычислить несобственный интеграл $\int_7^{16} \frac{dx}{\sqrt{16-x}}$ или доказать, что он расходится.

$$\int_7^{16} \frac{dx}{\sqrt{16-x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_7^{16-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{16-x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-2\sqrt{16-x}) \Big|_7^{16-\varepsilon} = -2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{9}] = 6$$

Интеграл сходится.

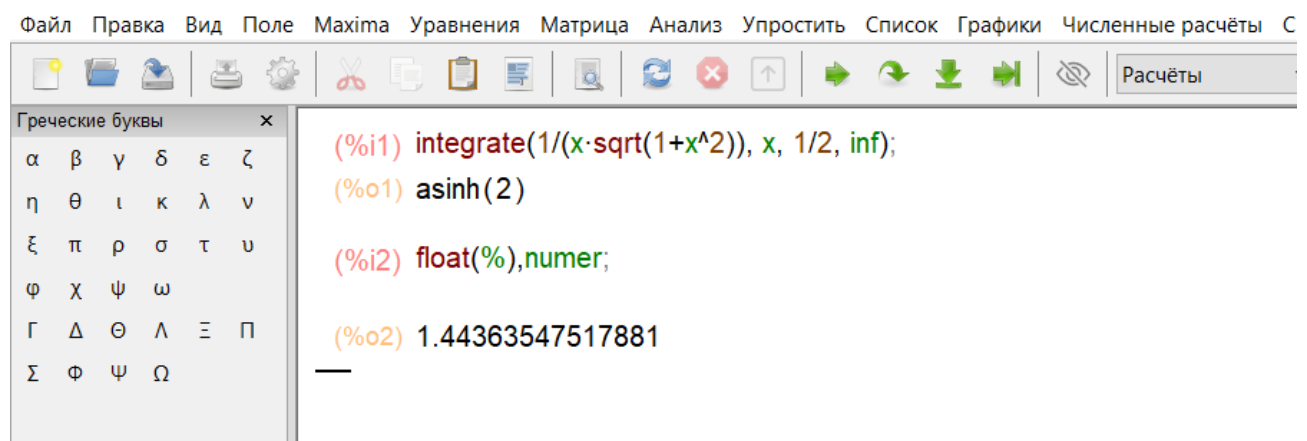
Пример 17. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{xdx}{1-x^2}$ или доказать, что он расходится.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{xdx}{1-x^2} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{xdx}{1-x^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{d(1-x^2)}{1-x^2} \right) = -\frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\ln|1-x^2| \right) \Big|_0^{1-\varepsilon} = \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\ln(1-(1-\varepsilon)^2) - \ln 1) = -\frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\ln(2\varepsilon - \varepsilon^2)) = \infty. \end{aligned}$$

Интеграл расходится.

В символьном режиме несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования вычисляются, если в параметрах команды *integrate* указывать, например, x , 0 , inf .

Пример 18. Вычислить несобственный интеграл $\int_{0,5}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$



Пример 19. Вычислить несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 12}$

→

```
(%i3) integrate(1/(x^2+6*x+12), x, -inf, inf);
(%o3) π/√3

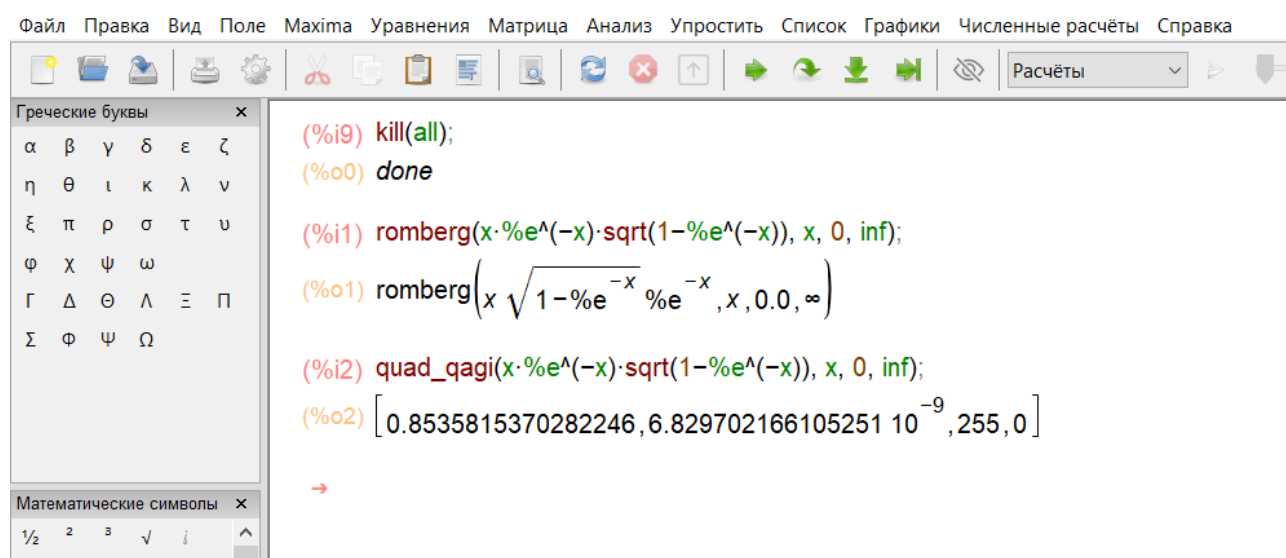
(%i4) float(%),numer;
(%o4) 1.813799364234218
```

Численное интегрирование выполняется при помощи функций пакета *quadpack*.

Пример 20. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$.

```
(%i6) quad_qags(1/sqrt(1-x^3), x, 0, 1);
(%o6) [1.402182105325893, 1.003805927268786 10^-10, 315, 0]
```

Пример 21. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^{\infty} x e^{-x} \sqrt{1-e^{-x}} dx$.



Результат вычисления содержит:

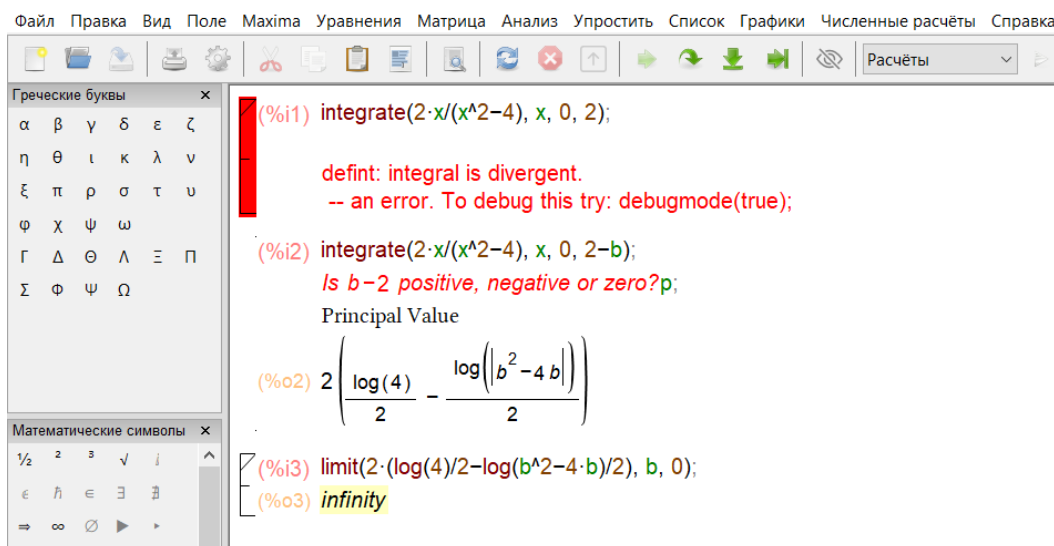
0.8535815370282246 – приближённое значение интеграла;

$6.829702166105251 \cdot 10^{-9}$ – относительная погрешность вычислений;

255 – число интервалов разбиения;

0 – признак корректности вычислений (0 – без проблем).

Пример 22. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^2 \frac{2x dx}{x^2 - 4}$



Если сразу вычислить данный интеграл, то ответ мы не получим:

```
integrate(2*x/(x^2-4), x, 0, 2);
```

defint: integral is divergent.

-- an error. To debug this try: debugmode(true);

Поэтому поступим следующим образом. Вычислим сначала интеграл:

```
integrate(2*x/(x^2-4), x, 0, 2-b);
```

"Is "b-2" positive, negative or zero?"p;

Principal Value

```
2*(log(4)/2-log(abs(b^2-4*b))/2)
```

а затем предел

```
limit(2*(log(4)/2-log(b^2-4*b)/2), b, 0);
```

```
infinity
```

Получим ответ: интеграл расходящийся.

Задача 11. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость двумя способами (аналитически и с помощью программы wxMaxima).

1	$\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{16x^4 + 1}$	2	$\int_1^{+\infty} \frac{16xdx}{16x^4 - 1}$	3	$\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^4 + 1}}$
4	$\int_2^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^4 - 1}}$	5	$\int_{-\infty}^0 \frac{xdx}{\sqrt{(x^2 + 4)^3}}$	6	$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(x^3 + 8)^2}}$

7	$\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt[4]{(18+x^2)^5}}$	8	$\int_4^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^2-4x+1}}$	9	$\int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{\pi(x^2+4x+5)}$
10	$\int_{-1}^{+\infty} \frac{xdx}{x^2+4x+5}$	11	$\int_4^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^2-4x+1}}$	12	$\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{16dx}{4x^2+4x+5}$
13	$\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{4x^2+4x+5}$	14	$\int_0^{+\infty} \frac{(x+2)dx}{\sqrt[3]{(x^2+4x+1)^4}}$	15	$\int_0^{+\infty} \frac{3-x^2}{x^2+4}dx$
16	$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} 3x}}{1+9x^2}dx$	17	$\int_1^{+\infty} \frac{4dx}{x(1+\ln^2 x)}$	18	$\int_0^{+\infty} x \cdot e^{-3x}dx$
19	$\int_{-\infty}^{-1} \frac{7dx}{x^2-4x}$	20	$\int_{\frac{1}{3}}^{+\infty} \frac{dx}{(1+9x^2) \cdot \operatorname{arctg}^2 3x}$	21	$\int_1^{+\infty} \frac{x^2dx}{1+x^6}$
22	$\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot e^x dx$	23	$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x^2}{x^3+1} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx$	24	$\int_0^{+\infty} e^{-5x} \cdot 2x dx$
25	$\int_1^{+\infty} \frac{\ln^3 x}{4x} dx$	26	$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$	27	$\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x - 1)^2}$
28	$\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{xdx}{x^4+9}$	29	$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$	30	$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2-3x+2}$
31	$\int_{-\infty}^0 \frac{xdx}{\sqrt{(x^2+9)^5}}$	32	$\int_{-\infty}^0 x \cdot e^{-4x} dx$	33	$\int_{-\infty}^0 \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(x^3+4)^2}}$

34	$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x + 2)^3}$	35	$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{\operatorname{arctg}^3 2x}}{1 + 4x^2} dx$	36	$\int_{-\infty}^0 x \cdot e^{5x} dx$
37	$\int_1^{+\infty} \frac{3dx}{x^2 + 6x}$	38	$\int_1^{+\infty} \frac{\ln^2(3x)}{6x} dx$	39	$\int_1^{+\infty} \frac{12x^3 dx}{12x^4 - 1}$
40	$\int_{-\infty}^{-1} \frac{6x dx}{16x^4 - 1}$				

2. Приложение определенных интегралов.

2.1. Площадь плоской фигуры

1) Если $f(x) \geq 0$ на $[a, b]$, то интеграл $\int_a^b f(x) dx$ геометрически представляет собой *площадь криволинейной трапеции*, которая ограничена графиком функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox , т.е.

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

2) Пусть криволинейная трапеция ограничена слева и справа прямыми $x = a$, $x = b$, сверху - графиком функции $f(x)$, снизу - графиком функции $g(x)$. Тогда площадь фигуры, ограниченной данными линиями вычислим по формуле:

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

Если функция $f(x)$ задана в параметрической форме $x = x(t)$, $y = y(t)$, то формула нахождения площади преобразуется к виду

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t) x'(t) dt,$$

так как $dx = x'(t) dt$, $x(\alpha) = a$, $y(\beta) = b$.

Пусть кривая, ограничивающая искомую площадь, задана в полярной системе координат. Получим выражение для вычисления площади криволинейного сектора, ограниченного кривой $\rho = \rho(\varphi)$ и прямыми $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$. Площадь криволинейного сектора в полярной системе координат вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\varphi.$$

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = x^2 - 2x + 4$, $y = 3$, $x = -1$

Построим графики данных функций.

Найдем точку пересечения прямой $y = 3$ и параболы $y = x^2 - 2x + 4$. Для этого приравняем значения y : $3 = x^2 - 2x + 4$. Отсюда получаем $x^2 - 2x + 1 = 0$, $(x - 1)^2 = 0$, $x = 1$. При этом $y = 3$.

Если $x = -1$, то

$$y = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 4 = 7.$$

Найдем вершину параболы:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1, \quad y(1) = 3 - \text{это точка}$$

пересечения прямой и параболы.

Строим область, площадь которой надо вычислить:

Тогда площадь фигуры, ограниченной данными линиями вычислим по формуле:

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx,$$

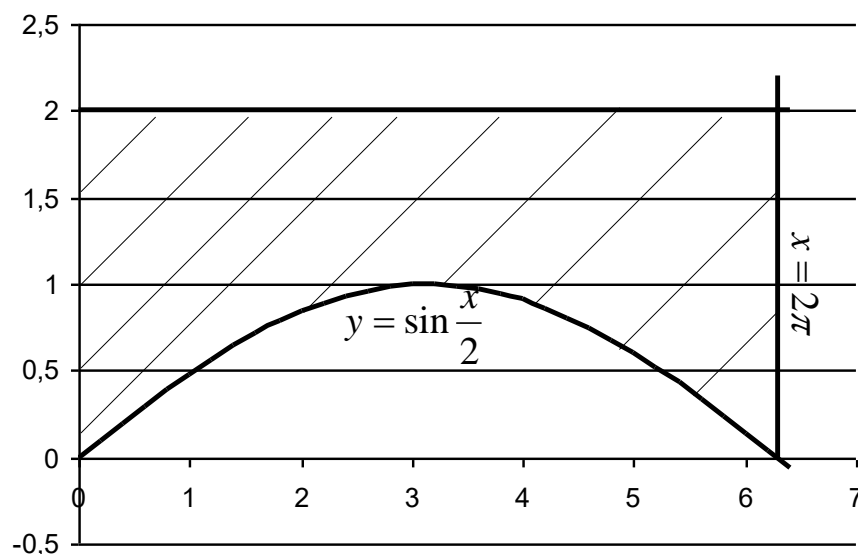
где $f(x) = x^2 - 2x + 4$ - уравнение линии, которая ограничивает фигуру сверху, а $g(x) = 3$ ограничивает снизу, $x \in [-1, 1]$.

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 (x^2 - 2x + 4 - 3) dx = \int_{-1}^1 (x^2 - 2x + 1) dx = \int_{-1}^1 (x - 1)^2 dx = \\ &= \left(\frac{1}{3} (x - 1)^3 \right)_{-1}^1 = \frac{1}{3} (0 - (-8)) = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Итак, $S = \frac{8}{3} \text{ (ед}^2\text{)}.$

2) $y = \sin \frac{x}{2}$, $y = 2$, $x = 0$, $x = 2\pi$.

Построим чертеж.



$$S = \int_0^{2\pi} \left(2 - \sin \frac{x}{2} \right) dx = \left(2x + 2 \cos \frac{x}{2} \right)_0^{2\pi} = (4\pi - 2) - 2 = 4\pi - 4,$$

т.е. $S = (4\pi - 4)(e\partial^2)$.

3) $y = 2x^2 + 8x + 4$, $y = -x^2 - x + 4$.

$y = 2x^2 + 8x + 4$ - парабола, ветви направлены вверх, $y = -x^2 - x + 4$ - парабола, ветви направлены вниз. Значит, фигура ограничена сверху параболой $y = -x^2 - x + 4$, а снизу параболой $y = 2x^2 + 8x + 4$.

Найдем точки пересечения линий:

$$2x^2 + 8x + 4 = -x^2 - x + 4,$$

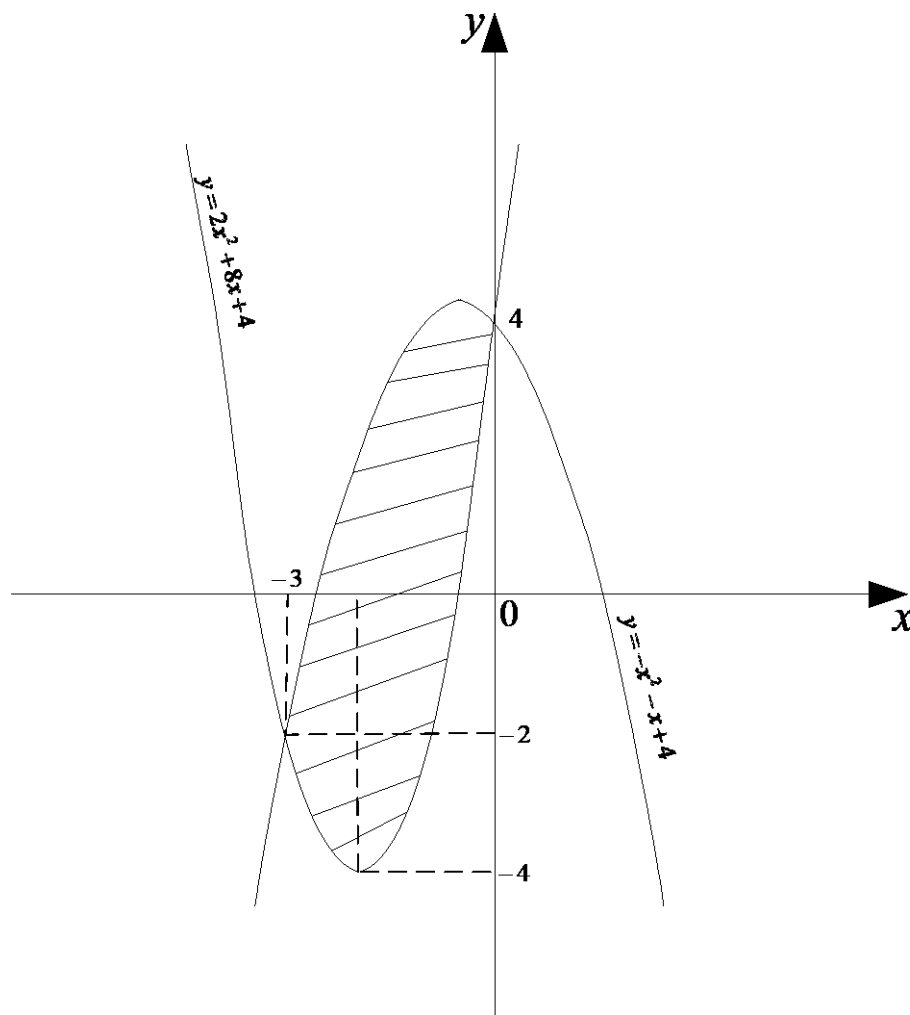
$$3x^2 + 9x = 0,$$

$$3x(x + 3) = 0,$$

$$\text{откуда } x_1 = 0, \quad x_2 = -3.$$

Вычислим значения ординат: при $x_1 = 0$ получаем $y_1 = 4$, при $x_2 = -3$ получаем $y_2 = -2$.

Построим графики парабол и найдем область, площадь которой надо вычислить:



Найдем площадь фигуры:

$$S = \int_{-3}^0 \left(-x^2 - x + 4 - (2x^2 + 8x + 4) \right) dx = \int_{-3}^0 (-3x^2 - 9x) dx = \left(-x^3 - \frac{9}{2}x^2 \right)_{-3}^0 =$$

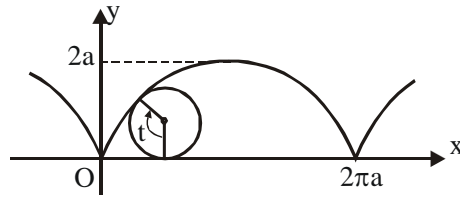
$$= 0 - \left(27 - \frac{81}{2} \right) = \frac{27}{2},$$

т.е. $S = \frac{27}{2} (\text{ед}^2)$.

Пример 2.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной первой аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ и отрезком оси Ox .

Когда круг радиуса a , производящий циклоиду, сделает полный оборот, абсцисса той точки окружности круга, которая в начале движения совпала с началом координат, станет равной $2\pi a$, при этом параметр $t \in [0, 2\pi]$.



Так как $\psi(t) = y = a(1 - \cos t)$, а $\varphi(t) = x = a(t - \sin t) \Rightarrow \varphi'(t) = a(1 - \cos t)$, то

$$S = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) a(1 - \cos t) dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{1}{2} \cos 2t \right) dt = a^2 \left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4} \sin 2t \right) \Big|_0^{2\pi} = a^2 (2\pi + \pi) = 3\pi a^2 (\text{ед}^2).$$

Пример 3.

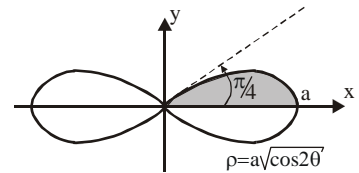
Вычислить площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли, уравнение которой $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

Очевидно, что луч опишет четверть искомой площади, если угол изменится в пределах $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$.

Следовательно

$$S = 4 \cdot S_{1/4} = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^2 d\varphi = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi d\varphi = 2a^2 \frac{\sin 2\varphi}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2$$

(ед²).



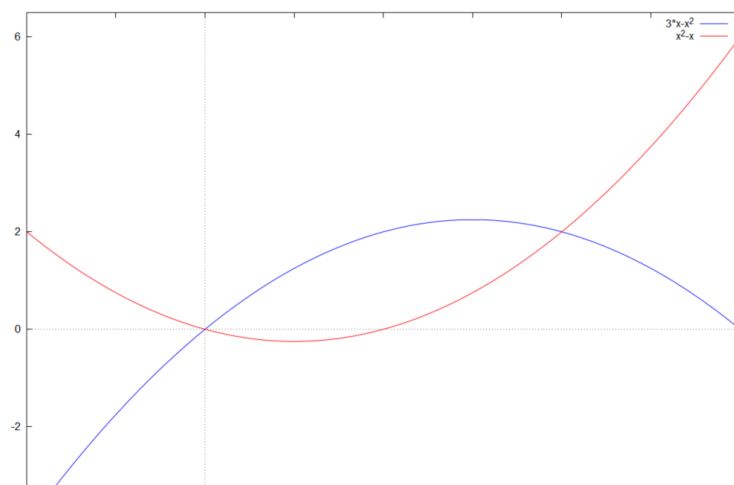
Для решения подобных задач в Maxima следует выполнить следующие действия:

1. Изобразить кривые, которые задают рассматриваемый объект.
2. Найти точки пересечения этих кривых.
3. При необходимости разбить фигуру на области.
4. Вычислить определенные интегралы с помощью программы Maxima и вручную.
5. Записать ответ.

Пример 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной следующими линиями $y = 3x - x^2$ и $y = x^2 - x$.

Зададим функции и построим графики:

```
(%i3) f(x):=3*x-x^2;  
      g(x):=x^2-x;  
  
(%o2) f(x):=3 x -x2  
(%o3) g(x):=x2 -x  
  
(%i4) wxplot2d([f(x), g(x)], [x,-1,3])$
```



Из графика видно, что функции пересекаются в двух точках, и область является простой, т.е. ее не нужно делить на подобласти.

Найдем точки пересечения кривых, затем составим и вычислим определенный интеграл, результат которого и есть площадь данной фигуры

```

(%i4) solve (f(x)=g(x),x);
(%o4) [x = 0, x = 2]

(%i5) integrate(f(x)-g(x), x, 0, 2);
(%o5) 8/3

--
(%i1) kill(all);
(%o0) done

```

Пример 5.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной следующими линиями

$$y = \frac{4}{x}, y = 0, y = 4, x = 0, x = 4.$$

Зададим функции $y = \frac{4}{x}, y = 0, y = 4,$

Вертикальные прямые $x = 4$ $x = 0$ в Maxima можно построить только, представив их уравнения в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases}.$$

```

(%i8) kill(all);
(%o0) done

(%i3) f1(x):=4/x; f2(x):=0; f3(x):=4;
(%o1) f1(x):=4/x
(%o2) f2(x):=0
(%o3) f3(x):=4

(%i5) r1(t):=4; r2(t):=t;
(%o4) r1(t):=4
(%o5) r2(t):=t

(%i7) h1(t):=0; h2(t):=t;
(%o6) h1(t):=0
(%o7) h2(t):=t

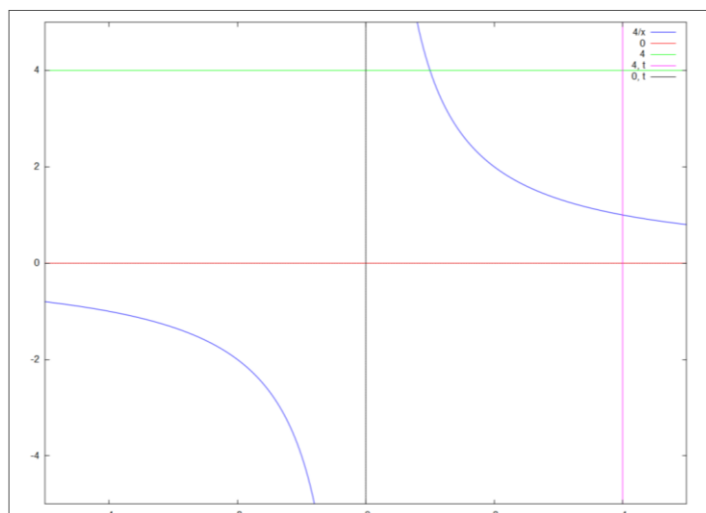
```

Теперь построим графики всех этих функций:

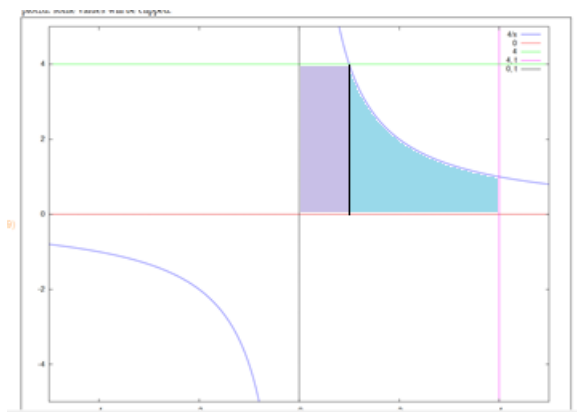
```

--
(%i9) wxplot2d([f1(x), f2(x), f3(x), [ 'parametric, r1(t), r2(t), [t, -5, 5]],
[ 'parametric, h1(t), h2(t), [t, -5, 5]] ], [x,-5,5], [y,-5,5], [nticks, 300])$

```



Чтобы вычислить площадь интересующей нас фигуры, необходимо поделить область на две части: от прямой $x=1$.



Первая фигура является прямоугольником, ее площадь равна $S_1 = 4 \cdot 1 = 4$. Площадь второй фигуры вычисляем с помощью определенного интеграла:

```
(%i10) solve(f1(x)=4,x);
(%o10) [x = 1]

(%i11) integrate(f1(x), x, 1, 4);
(%o11) 4 log(4)
```

Площадь искомой фигуры равна $4 + 4 \ln 4$.

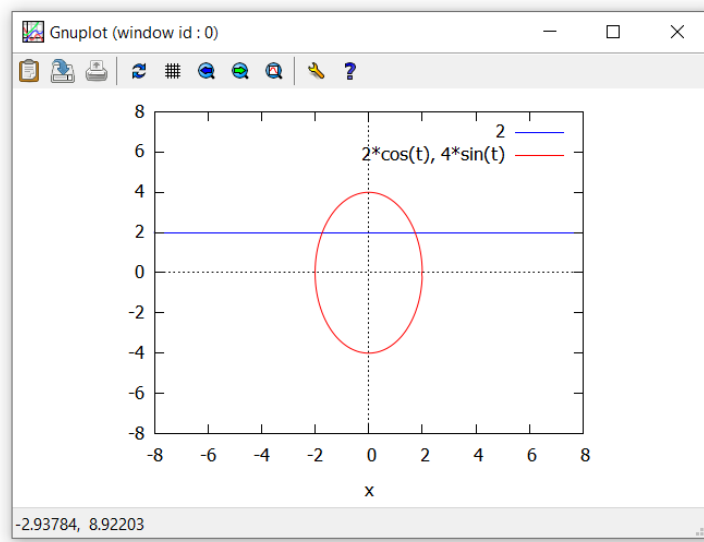
Пример 6.

Вычислить площади фигур, ограниченных линиями, заданными уравнениями: $\begin{cases} x(t) = 2 \cos t \\ y(t) = 4 \sin t \end{cases}, y = 2 \quad (y \geq 2)$

Нарисуем область.

```
(%i4) f(x):=2;
      x1(t):= 2*cos(t);
      y1(t):=4*sin(t);
      plot2d([f(x), [parametric, x1(t), y1(t),[t,-%pi,%pi]]],
            [x,-8,8],[y,-8,8], [gnuplot_preamble, "set size ratio 1"])$

(%o1) f(x):=2
(%o2) x1(t):=2*cos(t)
(%o3) y1(t):=4*sin(t)
```



Найдем точки пересечения эллипса и прямой.

```
(%i5) solve(y1(t)=f(x),t);
      solve: using arc-trig functions to get a solution.
      Some solutions will be lost.

(%o5) [t = pi/6]

(%i6) %pi-%pi/6;

(%o6) 5*pi/6
```

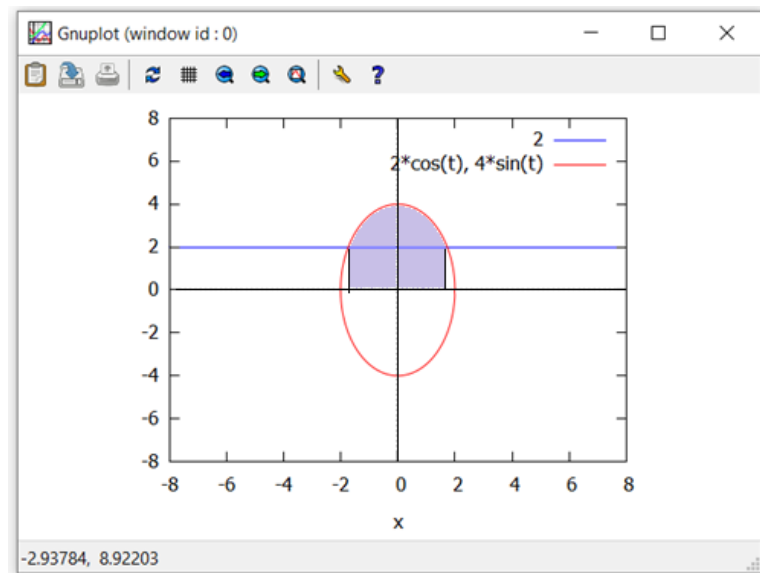
Получили точки $t_1 = \frac{5\pi}{6}$, $t_2 = \frac{\pi}{6}$.

Найдем площадь S_I .

```
(%i8) S1(t):= integrate(y1(t)-diff(x1(t),t,1),t,5-%pi/6, %pi/6);
      S1(t);
```

$$(\%o7) S1(t) := \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} y1(t) \left(\frac{d}{dt} x1(t) \right) dt$$

$$(\%o8) 8 \left(\frac{10\pi + 3^{3/2}}{24} - \frac{2\pi - 3^{3/2}}{24} \right)$$



Чтобы получить желаемую площадь, вычтем из общей S_1 площадь нижнего прямоугольника

```
(%i10) S2(t):=(x1(%pi/6)-x1(5*%pi/6))*2;
      S2(t);
(%o9) S2(t):=⎛x1⎛⎛π⎞⎞-x1⎛⎛5π⎞⎞⎞⎞2
      4√3
(%i12) S(t):=S1(t)-S2(t);
      S(t);
(%o11) S(t):=S1(t)-S2(t)
(%o12) 8⎛⎛10π+3⎞⎞3/2-⎛⎛2π-3⎞⎞3/2⎞⎞-4√3
(%i13) float(S(t)), numer;
(%o13) 4.913478794435012
```

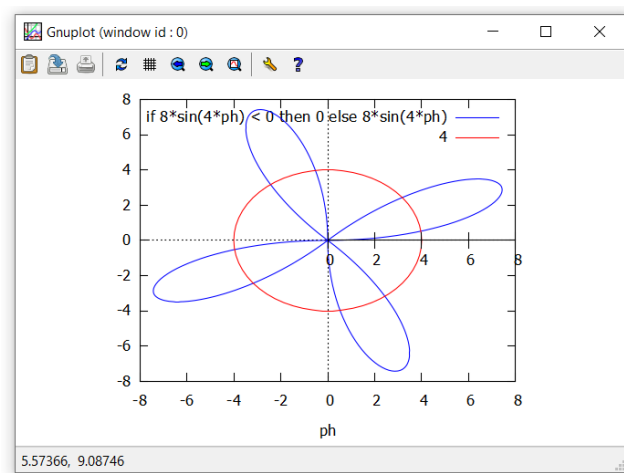
Площадь искомой фигуры равна 4,913478794435012.

Пример 7.

Вычислить площади фигур, ограниченных линиями, заданными в полярных координатах $r = 8 \sin 4\varphi$, $r = 4$ ($r \geq 4$)/

Нарисуем область.

```
(%i3) kill(all);
      r1(ph) := if 8*sin(4*ph)<0 then 0 else 8*sin(4*ph) ;
      r2(ph) := 4;
      plot2d([r1(ph), r2(ph)], [ph, 0, 4*%pi], [x, -8, 8], [y, -8, 8],
      [gnuplot_preamble, "set polar"]);
(%o0) done
(%o1) r1(ph):=if 8 sin(4 ph)<0 then 0 else 8 sin(4 ph)
(%o2) r2(ph):=4
```

Так как область симметричная, то будет 8 одинаковых площадей от 0 до $\frac{\pi}{8}$.

Вычислим площадь фигуры.

```
(%i6) S(ph):=8*0.5*integrate((8*sin(4*ph))^2-(r2(ph))^2,ph, 0, %pi/8);
      S(ph);
      float(S(ph)), numer;
```

```
(%o4) S(ph):=8*0.5*integrate((8*sin(4*ph))^2-(r2(ph))^2,ph, 0, %pi/8);
      S(ph);
      float(S(ph)), numer;
```

```
(%o5) 8.0 pi
```

```
(%o6) 25.13274122871822
```

Площадь искомой фигуры равна 8π .

ЗАДАНИЕ 2

Задача 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций (аналитически и с помощью программы wxMaxima). Выполнить построение.

1	$y = (x - 2)^3,$ $y = 4x - 8.$	2	$y = x\sqrt{9 - x^2}, \quad y = 0,$ $(0 \leq x \leq 3).$
3	$y = 4 - x^2,$ $y = x^2 - 2x.$	4	$y = \sin x \cos^2 x, \quad y = 0,$ $(0 \leq x \leq \pi/2).$
5	$y = \sqrt{4 - x^2}, \quad y = 0,$ $x = 0, \quad x = 1.$	6	$y = x^2 \sqrt{4 - x^2}, \quad y = 0,$ $(0 \leq x \leq 2).$

7	$y = \cos x \sin^2 x, \quad y = 0,$ $(0 \leq x \leq \pi/2).$	8	$y = \sqrt{e^x - 1}, \quad y = 0,$ $x = \ln 2.$
9	$y = \frac{1}{x\sqrt{1 + \ln x}}, \quad y = 0,$ $x = 1, \quad x = e^3.$	10	$y = \arccos x, \quad y = 0,$ $x = 0.$
11	$y = (x + 1)^2,$ $y^2 = x + 1.$	12	$y = 2x - x^2 + 3,$ $y = x^2 - 4x + 3.$
13	$y = x\sqrt{36 - x^2}, \quad y = 0,$ $(0 \leq x \leq 6).$	14	$x = \arccos y, \quad x = 0,$ $y = 0.$
15	$y = \operatorname{arctg} x, \quad y = 0,$ $x = \sqrt{3}.$	16	$y = x^2\sqrt{8 - x^2}, \quad y = 0,$ $(0 \leq x \leq 2\sqrt{2}).$
17	$x = \sqrt{e^y - 1}, \quad x = 0,$ $y = \ln 2.$	18	$y = x\sqrt{4 - x^2}, \quad y = 0,$ $(0 \leq x \leq 2).$
19	$y = \frac{x}{1 + \sqrt{x}}, \quad y = 0,$ $x = 1.$	20	$y = \frac{1}{1 + \cos x}, \quad y = 0,$ $x = \pi/2, \quad x = -\pi/2.$
21	$x = (y - 2)^3,$ $x = 4y - 8.$	22	$y = \cos^5 x \sin 2x, \quad y = 0,$ $(0 \leq x \leq \pi/2).$
23	$y = \frac{x}{(x^2 + 1)^2}, \quad y = 0,$ $x = 1.$	24	$x = 4 - y^2,$ $x = y^2 - 2y.$
25	$y = \frac{x}{(x^2 + 1)^2}, \quad y = 0,$ $x = 1.$	26	$y = \frac{e^{1/x}}{x^2}, \quad y = 0,$ $x = 2, \quad x = 1.$

27	$y = x^2 \sqrt{16 - x^2}, \quad y = 0,$ $(0 \leq x \leq 4).$	28	$x = \sqrt{4 - y^2}, \quad x = 0,$ $y = 0, \quad y = 1.$
29	$y = (x - 1)^2,$ $y^2 = x - 1.$	30	$y = x^2 \cos x, \quad y = 0,$ $(0 \leq x \leq \pi/2).$
31	$x = 4 - (y - 1)^2,$ $x = y^2 - 4y + 3.$	32	$y = \sqrt{x}, \quad x = 16,$ $y = \frac{1}{x}.$
33	$y = \arcsin x, \quad y = 0,$ $y = \frac{\pi}{2}.$	34	$x = 8 - y^2,$ $x = -2y.$
35	$y = e^x, \quad x = 1,$ $y = e^{-x}.$	36	$y = \sin x, \quad y = \cos x,$ $x = 0, \quad (x \geq 0).$
37	$y = 17 - x^2, \quad x > 0,$ $y = \frac{16}{x^2}.$	38	$y = 2x + x^2 + 16,$ $y = 4x - 8.$
39	$y = \frac{x^2}{2}, \quad y = \frac{1}{1 + x^2}.$	40	$y = \frac{3\sqrt{x}}{2}, \quad x = 9,$ $y = \frac{3}{2x}.$

Задача 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций (аналитически и с помощью программы wxMaxima). Выполнить построение.

1	$\begin{cases} x = 4\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin^3 t, \\ x = 2 \quad (x \geq 2). \end{cases}$	2	$\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin t, \\ y = 2 \quad (y \geq 2). \end{cases}$
3	$\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \\ y = 4 \quad (0 < x < 8\pi, \quad y \geq 4). \end{cases}$	4	$\begin{cases} x = 16 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t, \\ x = 2 \quad (x \geq 2). \end{cases}$

5	$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 6\sin t, \\ y = 3 \quad (y \geq 3). \end{cases}$	6	$\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \\ y = 3 \quad (0 < x < 4\pi, \quad y \geq 3). \end{cases}$
7	$\begin{cases} x = 16\cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \\ x = 6\sqrt{3} \quad (x \geq 6\sqrt{3}). \end{cases}$	8	$\begin{cases} x = 6\cos t, \\ y = 2\sin t, \\ y = \sqrt{3} \quad (y \geq \sqrt{3}). \end{cases}$
9	$\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \\ y = 3 \quad (0 < x < 6\pi, \quad y \geq 3). \end{cases}$	10	$\begin{cases} x = 8\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t, \\ x = 4 \quad (x \geq 4). \end{cases}$
11	$\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t, \\ y = 3\sqrt{2}\sin t, \\ y = 3 \quad (y \geq 3). \end{cases}$	12	$\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \\ y = 9 \quad (0 < x < 12\pi, \quad y \geq 9). \end{cases}$
13	$\begin{cases} x = 32\cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \\ x = 4 \quad (x \geq 4). \end{cases}$	14	$\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 8\sin t, \\ y = 4 \quad (y \geq 4). \end{cases}$
15	$\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \\ y = 6 \quad (0 < x < 12\pi, \quad y \geq 6). \end{cases}$	16	$\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \\ x = 3\sqrt{3} \quad (x \geq 3\sqrt{3}). \end{cases}$
17	$\begin{cases} x = 6\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \\ x = 2\sqrt{3} \quad (x \geq 2\sqrt{3}). \end{cases}$	18	$\begin{cases} x = 10(t - \sin t), \\ y = 10(1 - \cos t), \\ y = 15 \quad (0 < x < 20\pi, \quad y \geq 15). \end{cases}$

19	$\begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = \sqrt{2} \sin^3 t, \\ x = 1 \quad (x \geq 1). \end{cases}$	20	$\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t, \\ y = 4\sqrt{2} \sin t, \\ y = 4 \quad (y \geq 4). \end{cases}$
21	$\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \\ y = 1 \quad (0 < x < 2\pi, \quad y \geq 1). \end{cases}$	22	$\begin{cases} x = 8 \cos^3 t, \\ y = 8 \sin^3 t, \\ x = 1 \quad (x \geq 1). \end{cases}$
23	$\begin{cases} x = 9 \cos t, \\ y = 4 \sin t, \\ y = 2 \quad (y \geq 2). \end{cases}$	24	$\begin{cases} x = 8(t - \sin t), \\ y = 8(1 - \cos t), \\ y = 12 \quad (0 < x < 16\pi, \quad y \geq 12). \end{cases}$
25	$\begin{cases} x = 24 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t, \\ x = 9\sqrt{3} \quad (x \geq 9\sqrt{3}). \end{cases}$	26	$\begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 8 \sin t, \\ y = 4\sqrt{3} \quad (y \geq 4\sqrt{3}). \end{cases}$
27	$\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \\ y = 2 \quad (0 < x < 4\pi, \quad y \geq 2). \end{cases}$	28	$\begin{cases} x = 4\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = \sqrt{2} \sin^3 t, \\ x = 2 \quad (x \geq 2). \end{cases}$
29	$\begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos t, \\ y = 5\sqrt{2} \sin t, \\ y = 5 \quad (y \geq 5). \end{cases}$	30	$\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \\ y = 6 \quad (0 < x < 8\pi, \quad y \geq 6). \end{cases}$
31	$\begin{cases} x = 32 \cos^3 t, \\ y = 3 \sin^3 t, \\ x = 12\sqrt{3} \quad (x \geq 12\sqrt{3}). \end{cases}$	32	$\begin{cases} x = 4\sqrt{3} \cos t, \\ y = 6 \sin t, \\ y = 3 \quad (y \geq 3). \end{cases}$
33	$\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \\ y = 5 \quad (0 < x < 10\pi, \quad y \geq 5). \end{cases}$	34	$\begin{cases} x = 8\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin^3 t, \\ x = 4 \quad (x \geq 4). \end{cases}$

35	$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 6\sin t, \\ y = 3\sqrt{3} \quad (y \geq 3\sqrt{3}). \end{cases}$	36	$\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \\ y = 8 \quad (0 < x < 8\pi, \quad y \geq 8). \end{cases}$
37	$\begin{cases} x = 24\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \\ x = 3 \quad (x \geq 3). \end{cases}$	38	$\begin{cases} x = 8\sqrt{2}\cos t, \\ y = 2\sqrt{2}\sin t, \\ y = 2 \quad (y \geq 2). \end{cases}$
39	$\begin{cases} x = 8(t - \sin t), \\ y = 8(1 - \cos t), \\ y = 4 \quad (0 < x < 16\pi, \quad y \geq 4). \end{cases}$	40	$\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \\ x = 1 \quad (x \geq 1). \end{cases}$

Задача 3. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями, заданными в полярных координатах. (аналитически и с помощью программы wxMaxima)

1	$r = 4\cos 3\varphi, \quad r = 2 \quad (r \geq 2).$	2	$r = \cos 2\varphi.$
3	$r = \sqrt{3}\cos \varphi, \quad r = \sin \varphi, \\ (0 \leq \varphi \leq \pi/2).$	4	$r = 4\sin 3\varphi, \quad r = 2 \quad (r \geq 2).$
5	$r = 2\cos \varphi, \quad r = 2\sqrt{3}\sin \varphi, \\ (0 \leq \varphi \leq \pi/2).$	6	$r = \sin 3\varphi.$
7	$r = 6\sin 3\varphi, \quad r = 3 \quad (r \geq 3).$	8	$r = \cos 3\varphi.$
9	$r = \cos \varphi, \\ r = \sqrt{2}\sin(\varphi - \pi/4), \\ (-\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/2).$	10	$r = \sin \varphi, \\ r = \sqrt{2}\cos(\varphi - \pi/4), \\ (0 \leq \varphi \leq 3\pi/4).$
11	$r = 6\cos 3\varphi, \quad r = 3 \quad (r \geq 3).$	12	$r = 1/2 + \sin \varphi.$

13	$r = \cos \varphi, \quad r = \sin \varphi,$ $(0 \leq \varphi \leq \pi/2).$	14	$r = \sqrt{2} \cos(\varphi - \pi/4),$ $r = \sqrt{2} \sin(\varphi - \pi/4),$ $(\pi/4 \leq \varphi \leq 3\pi/4).$
15	$r = \cos \varphi, \quad r = 2 \cos \varphi.$	16	$r = \sin \varphi, \quad r = 2 \sin \varphi.$
17	$r = 1 + \sqrt{2} \cos \varphi.$	18	$r = 1/2 + \cos \varphi.$
19	$r = 1 + \sqrt{2} \sin \varphi.$	20	$r = (5/2) \sin \varphi, \quad r = (3/2) \sin \varphi.$
21	$r = (3/2) \cos \varphi, \quad r = (5/2) \cos \varphi.$	22	$r = 4 \cos 4\varphi.$
23	$r = \sin 6\varphi.$	24	$r = 2 \cos \varphi, \quad r = 3 \cos \varphi.$
25	$r = \cos \varphi + \sin \varphi.$	26	$r = 2 \sin 4\varphi.$
27	$r = 2 \cos 6\varphi.$	28	$r = \cos \varphi - \sin \varphi.$
29	$r = 3 \sin \varphi, \quad r = 5 \sin \varphi.$	30	$r = 2 \sin \varphi, \quad r = 4 \sin \varphi.$
31	$r = 6 \sin \varphi, \quad r = 4 \sin \varphi.$	32	$\rho = 2 \sin 2\varphi$
33	$\rho = 4 \cos 2\varphi,$ $\rho = 2 \quad (\rho \geq 2)$	34	$\rho = \frac{1}{2} - \cos \varphi$
35	$\rho = 1 - \sqrt{2} \sin \varphi$	36	$\rho = 4 \sin 2\varphi,$ $\rho = 2 \quad (\rho \geq 2)$
37	$\rho = \sqrt{2} \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right),$ $\rho = \sqrt{2} \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)$ $\left(-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}\right)$	38	$\rho = 3 \sin 3\varphi$
39	$\rho = \frac{1}{2} - \sin \varphi$	40	$\rho = 1 - \sqrt{2} \cos \varphi$

2.2. Длина дуги

Длина дуги кривой $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ вычисляется по формуле:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Если уравнение кривой задано в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

то для вычисления длины этой кривой применяют формулу:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

Для функции заданной в полярных координатах.

Пусть кривая АВ задана уравнением в полярных координатах:

$$\begin{cases} x = \rho(\varphi) \cos \varphi, \\ y = \rho(\varphi) \sin \varphi, \end{cases} \quad \alpha \leq \varphi \leq \beta$$

то применяется формула для кривой заданной параметрическим уравнением с параметром φ , имеем

$$\begin{aligned} x &= \rho(\varphi) \cos \varphi \Rightarrow x'_\varphi = \rho'(\varphi) \cos \varphi - \rho(\varphi) \sin \varphi \\ y &= \rho(\varphi) \sin \varphi \Rightarrow y'_\varphi = \rho'(\varphi) \sin \varphi + \rho(\varphi) \cos \varphi \\ dL &= \sqrt{(x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2} d\varphi = \sqrt{(\rho'(\varphi))^2 + \rho(\varphi)^2} d\varphi \\ L &= \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi \end{aligned}$$

Пример 8. Вычислить длину дуги кривой $y = \ln \sin x$ от $x_1 = \frac{\pi}{3}$ до $x_2 = \frac{\pi}{2}$.

Из уравнения линии $y = \ln \sin x$ находим $y' = \frac{\cos x}{\sin x}$ и $dl = \sqrt{1 + \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2} dx$

Тогда

$$L = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right) \right| \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \ln 3$$

Пример 9. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрически уравне-

ниями $\begin{cases} x = \frac{t^3}{3} - t, \\ y = t^2 + 2, \end{cases}$ где $0 \leq t \leq 3$.

Найдем производные $x'_t = t^2 - 1$, $y'_t = 2t$, тогда

$$dl = \sqrt{(t^2 - 1)^2 + (2t)^2} dt = \sqrt{t^4 + 2t^2 + 1} dt = \sqrt{(t^2 + 1)^2} dt$$

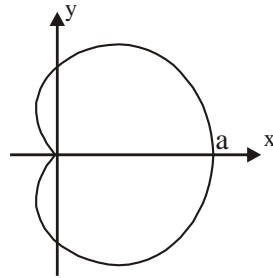
Вычислим длину дуги кривой:

$$L = \int_0^3 \sqrt{(t^2 + 1)^2} dt = \int_0^3 (t^2 + 1) dt = \left(\frac{t^3}{3} + t \right)_0^3 = \frac{27}{3} + 3 = 12$$

Пример 10.

Найти длину кардиоиды $\rho = a(1 + \cos \varphi)$.

Найдем производную функции $\rho = a(1 + \cos \varphi) \Rightarrow \rho' = -a \sin \varphi$



$$dl = \sqrt{a^2 (1 - \cos \varphi)^2 + a^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = a \sqrt{2(1 - \cos \varphi)^2} d\varphi$$

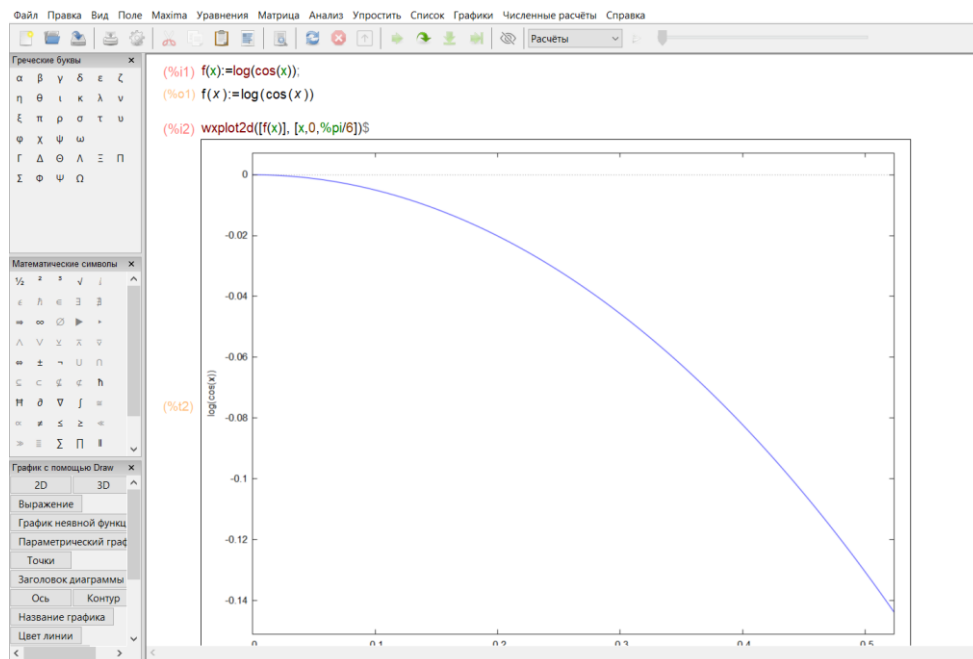
$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi = \int_0^{2\pi} a \sqrt{2(1 - \cos \varphi)^2} d\varphi = 2a \int_0^{\pi} \sqrt{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} d\varphi = 8a \sin \frac{\varphi}{2} \Big|_0^{\pi} = 8a$$

Для решения подобных задач в **wxMaxima** следует выполнить следующие действия:

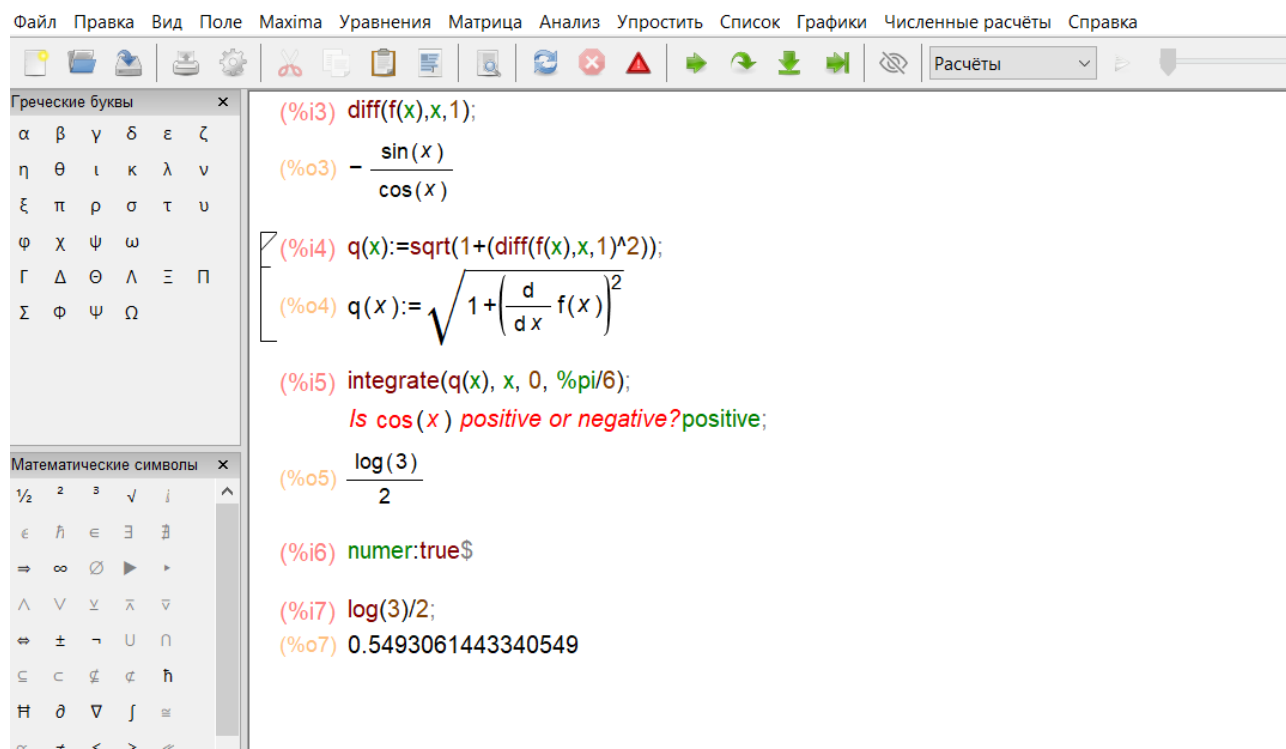
1. Построить кривую.
2. Вычислить производные функции.
3. В зависимости от способа задания кривой, составить и вычислить определенный интеграл с помощью программы **Maxima** и вручную.
4. Записать ответ.

Пример 11. Вычислить длину дуги кривой $y = \ln(\cos x)$, отсеченной прямыми $x = 0$, $x = \frac{\pi}{6}$.

Построим график функции:

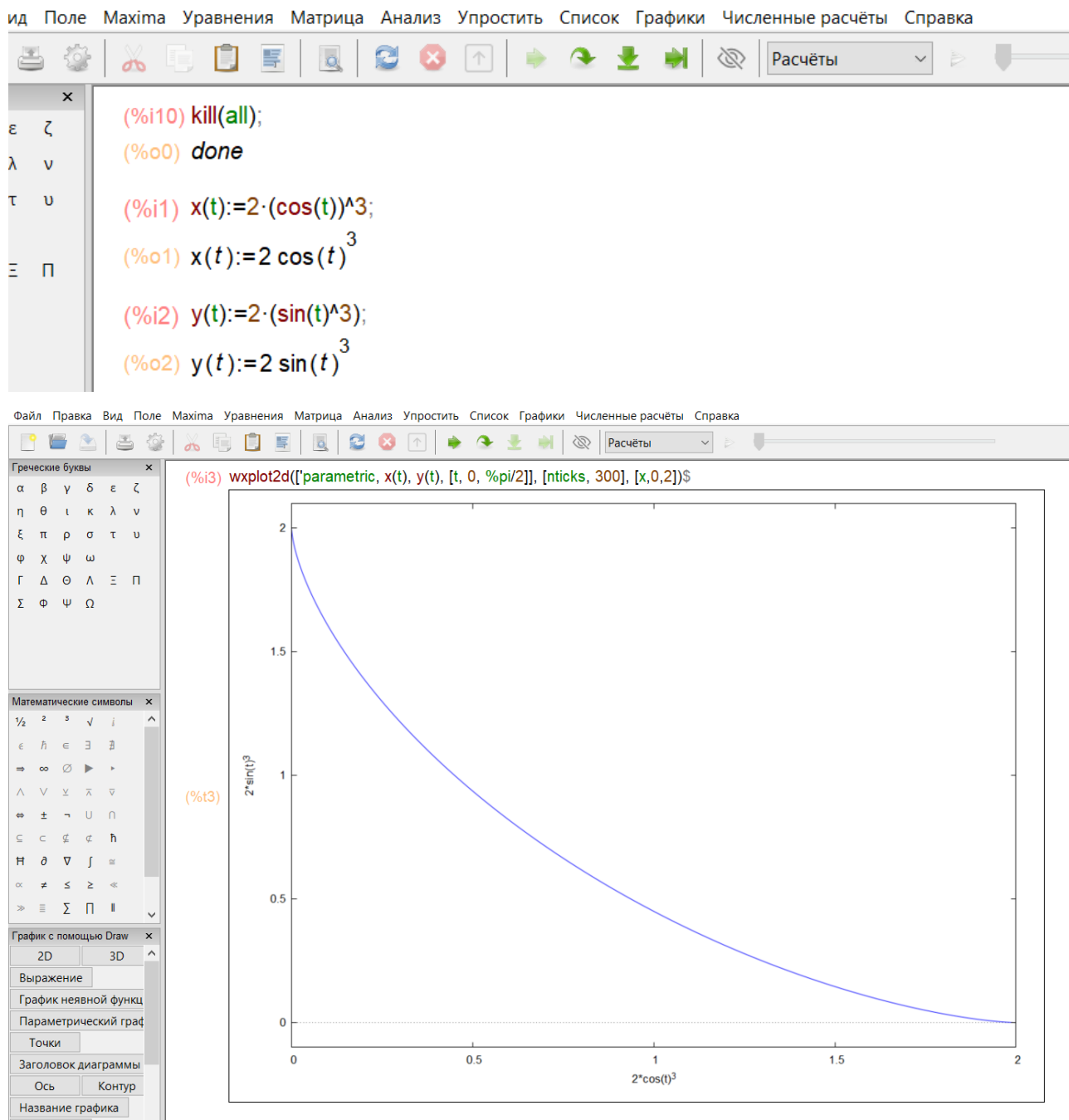


Найдем первую производную от данной функции и, затем, вычислим определенный интеграл. При вычислении интеграла появляется вопрос о знаке функции $\cos x$. Интегрирование мы проводим на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$, здесь $\cos x > 0$, значит, набираем positive.



Пример 12. Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x = 2 \cos^3 t \\ y = 2 \sin^3 t \end{cases}$ при $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Зададим функцию и построим график функции:



Найдем производные функций и вычислим определенный интеграл:

Файл Правка Вид Поле Maxima Уравнения Матрица Анализ Упростить Список Графики Численные расчёты Справка

Греческие буквы

α β γ δ ε ζ
η θ ι κ λ ν
ξ π ρ σ τ υ
φ χ ψ ω
Γ Δ Θ Λ Ξ Π
Σ Φ Ψ Ω

Математические символы

1/2 ² ³ √ ∫
∞ ∫ ∫ ∫ ∫
⇒ ∞ ∅ ▶ ▶
∧ ∨ ∩ ∪ ∩
⇒ ± ∓ ∪ ∩
≤ ≥ ∉ ∉ ∉

```
(%i14) g(t):=diff(x(t),t,1); g(t);
(%o13) g(t):=d/dt x(t)
(%o14) -6 cos(t)^2 sin(t)
(%i16) h(t):=diff(y(t),t,1); h(t);
(%o15) h(t):=d/dt y(t)
(%o16) 6 cos(t) sin(t)^2
(%i17) q(t):=sqrt((g(t))^2+(h(t))^2);
(%o17) q(t):=sqrt(g(t)^2+h(t)^2)
(%i18) integrate(q(t), t, %pi/4, 0);
(%o18) 3/2
```

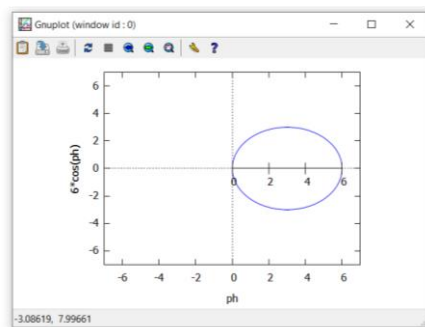
При вычислении интеграла появляется вопрос о знаке функции $\cos x, \sin x$. Интегрирование мы проводим на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, здесь $\cos x > 0, \sin x > 0$, значит, positive.

Пример 13.

Вычислить длину дуги кривой, заданной в полярных координатах $\rho = 6 \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi/3$.

Зададим функцию и построим график функции:

```
(%i2) r(ph):=6*cos(ph);
plot2d([r(ph)], [ph, 0, 2*%pi], [x, 0, 8], [y, -7, 7],
[gnuplot_preamble, "set polar"]);
(%o1) r(ph):=6*cos(ph)
```



Вычислим интеграл по известной формуле.

```
(%i5) L(ph):=integrate(sqrt(r(ph)^2+diff(r(ph),ph,1)^2), ph,-%pi/3, 0);
L(ph);
float(L(ph)), numer;
(%o3) L(ph):= \int_{-\pi/3}^0 \sqrt{r(ph)^2 + \left(\frac{d}{dph} r(ph)\right)^2} dph
(%o4) 2 \pi
(%o5) 6.283185307179585
```

Результат вычисления: длина заданной дуги равняется 6, 28318530717985.

Задача 4. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в прямоугольной системе координат (аналитически и с помощью программы wxMaxima).

1	$y = \ln x, \quad \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{15}.$
2	$y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}, \quad 1 \leq x \leq 2.$
3	$y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x, \quad 0 \leq x \leq 7/9.$
4	$y = \ln \frac{5}{2x}, \quad \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}.$
5	$y = -\ln \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi/6.$
6	$y = e^x + 6, \quad \ln \sqrt{8} \leq x \leq \ln \sqrt{15}.$
7	$y = 2 + \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{x-x^2}, \quad 1/4 \leq x \leq 1.$
8	$y = \ln(x^2 - 1), \quad 2 \leq x \leq 3.$
9	$y = \sqrt{1-x^2} + \arccos x, \quad 0 \leq x \leq 8/9.$
10	$y = \ln(1-x^2), \quad 0 \leq x \leq 1/4.$
11	$y = 2 + \operatorname{ch} x, \quad 0 \leq x \leq 1.$
12	$y = 1 - \ln \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi/6.$
13	$y = e^x + 13, \quad \ln \sqrt{15} \leq x \leq \ln \sqrt{24}.$

14	$y = -\arccos \sqrt{x} + \sqrt{x-x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1/4.$
15	$y = 2 - e^x, \quad \ln \sqrt{3} \leq x \leq \ln \sqrt{8}.$
16	$y = \arcsin x - \sqrt{1-x^2}, \quad 0 \leq x \leq 15/16.$
17	$y = 1 - \ln \sin x, \quad \pi/3 \leq x \leq \pi/2.$
18	$y = 1 - \ln(x^2 - 1), \quad 3 \leq x \leq 4.$
19	$y = \sqrt{x-x^2} - \arccos \sqrt{x} + 5, \quad 1/9 \leq x \leq 1.$
20	$y = -\arccos x + \sqrt{1-x^2} + 1, \quad 0 \leq x \leq 9/16.$
21	$y = \ln \sin x, \quad \pi/3 \leq x \leq \pi/2.$
22	$y = \ln 7 - \ln x, \quad \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}.$
23	$y = \operatorname{ch} x + 3, \quad 0 \leq x \leq 1.$
24	$y = 1 + \arcsin x - \sqrt{1-x^2}, \quad 0 \leq x \leq 3/4.$
25	$y = \ln \cos x + 2, \quad 0 \leq x \leq \pi/6.$
26	$y = e^x + 26, \quad \ln \sqrt{8} \leq x \leq \ln \sqrt{24}.$
27	$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + 3, \quad 0 \leq x \leq 2.$
28	$y = \arccos \sqrt{x} - \sqrt{x-x^2} + 4, \quad 0 \leq x \leq 1/2.$
29	$y = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 3}{4}, \quad 0 \leq x \leq 1.$
30	$y = e^x + e, \quad \ln \sqrt{3} \leq x \leq \ln \sqrt{15}.$
31	$y = \frac{1 - e^x - e^{-x}}{2}, \quad 0 \leq x \leq 3.$
32	$y = \frac{x^2}{2}, \quad 0 \leq x \leq 1.$
33	$y = \ln(1-x^2), \quad 0 \leq x \leq 0,5.$

34	$y = \ln(2\cos x), \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}.$
35	$y = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}, \quad 0 \leq x \leq 2.$
36	$y = \ln(2x+1), \quad \frac{5}{2} \leq x \leq \frac{29}{5}.$
37	$y^2 = (x+1)^3, \quad 0 \leq x \leq 3.$
38	$y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}, \quad 1 \leq x \leq 3.$
39	$y = \ln(1-x^2), \quad -0,5 \leq x \leq 0,5.$
40	$y = \frac{2}{5}x\sqrt[4]{x} - \frac{2}{3}\sqrt[4]{x^3}, \quad 0 \leq x \leq \frac{25}{9}.$

Задача 5. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями (аналитически и с помощью программы wxMaxima).

1	$\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \\ 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$	2	$\begin{cases} x = 3(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 3(2\sin t - \sin 2t), \\ 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$
3	$\begin{cases} x = 4(\cos t + t \sin t), \\ y = 4(\sin t - t \cos t), \\ 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$	4	$\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t \sin t, \\ 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$
5	$\begin{cases} x = 10\cos^3 t, \\ y = 10\sin^3 t, \\ 0 \leq t \leq \pi/2. \end{cases}$	6	$\begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \\ 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$

7	$\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases}$ $\pi \leq t \leq 2\pi.$	8	$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{4}\cos 2t, \\ y = \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{4}\sin 2t, \end{cases}$ $\pi/2 \leq t \leq 2\pi/3.$
9	$\begin{cases} x = 3(\cos t + t \sin t), \\ y = 3(\sin t - t \cos t), \end{cases}$ $0 \leq t \leq \pi/3.$	10	$\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t \sin t, \end{cases}$ $0 \leq t \leq \pi/3.$
11	$\begin{cases} x = 6\cos^3 t, \\ y = 6\sin^3 t, \end{cases}$ $0 \leq t \leq \pi/3.$	12	$\begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \end{cases}$ $\pi/2 \leq t \leq \pi.$
13	$\begin{cases} x = 2,5(t - \sin t), \\ y = 2,5(1 - \cos t), \end{cases}$ $\pi/2 \leq t \leq \pi.$	14	$\begin{cases} x = 3,5(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 3,5(2\sin t - \sin 2t), \end{cases}$ $0 \leq t \leq \pi/2.$
15	$\begin{cases} x = 6(\cos t + t \sin t), \\ y = 6(\sin t - t \cos t), \end{cases}$ $0 \leq t \leq \pi.$	16	$\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t \sin t, \end{cases}$ $0 \leq t \leq \pi/2.$
17	$\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 8\sin^3 t, \end{cases}$ $0 \leq t \leq \pi/6.$	18	$\begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \end{cases}$ $0 \leq t \leq 2\pi.$
19	$\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases}$ $\pi/2 \leq t \leq 2\pi/3.$	20	$\begin{cases} x = 2(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 2(2\sin t - \sin 2t), \end{cases}$ $0 \leq t \leq \pi/3.$

21	$\begin{cases} x = 8(\cos t + t \sin t), \\ y = 8(\sin t - t \cos t), \\ 0 \leq t \leq \pi/4. \end{cases}$	22	$\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t \sin t, \\ 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$
23	$\begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \\ \pi/6 \leq t \leq \pi/4. \end{cases}$	24	$\begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \\ 0 \leq t \leq 3\pi/2. \end{cases}$
25	$\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \\ 0 \leq t \leq \pi/2. \end{cases}$	24	$\begin{cases} x = 4(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 4(2\sin t - \sin 2t), \\ 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$
27	$\begin{cases} x = 2(\cos t + t \sin t), \\ y = 2(\sin t - t \cos t), \\ 0 \leq t \leq \pi/2. \end{cases}$	28	$\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t \sin t, \\ 0 \leq t \leq 3\pi. \end{cases}$
29	$\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \\ 0 \leq t \leq \pi/4. \end{cases}$	30	$\begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \\ \pi/6 \leq t \leq \pi/4. \end{cases}$
31	$\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t \sin t, \\ 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$	32	$\begin{cases} x = 7(t - \sin t), \\ y = 7(1 - \cos t), \\ \pi/6 \leq t \leq \pi/2. \end{cases}$
33	$\begin{cases} x = 5(\cos t + t \sin t), \\ y = 5(\sin t - t \cos t), \\ \pi/4 \leq t \leq \pi/2. \end{cases}$	34	$\begin{cases} x = (t^2 - 3)\sin t + 3t \cos t, \\ y = (3 - t^2)\cos t + 3t \sin t, \\ 0 \leq t \leq 5\pi. \end{cases}$
35	$\begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 5\sin^3 t, \\ 0 \leq t \leq 3\pi/4. \end{cases}$	36	$\begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \\ \pi/4 \leq t \leq 2\pi/3. \end{cases}$

37	$\begin{cases} x = 3(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 3(2\sin t - \sin 2t), \end{cases}$ $\pi/6 \leq t \leq 5\pi/6.$	38	$\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases}$ $\pi/2 \leq t \leq 5\pi/6.$
39	$\begin{cases} x = (t^2 - 4)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (4 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases}$ $\pi/6 \leq t \leq \pi/3.$	40	$\begin{cases} x = 9(\cos t + t\sin t), \\ y = 9(\sin t - t\cos t), \end{cases}$ $\pi/6 \leq t \leq \pi/4.$

Задача 6. Вычислить длину дуги кривой, заданной в полярных координатах уравнениями (аналитически и с помощью программы wxMaxima).

1	$\rho = 3e^{3\varphi/4}, \quad -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2.$	2	$\rho = 2e^{4\varphi/3}, \quad -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2.$
3	$\rho = \sqrt{2}e^\varphi, \quad -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2.$	4	$\rho = 5e^{5\varphi/12}, \quad -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2.$
5	$\rho = 6e^{12\varphi/5}, \quad -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2.$	6	$\rho = 3e^{3\varphi/4}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/3.$
7	$\rho = 4e^{4\varphi/3}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/3.$	8	$\rho = \sqrt{2}e^\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/3.$
9	$\rho = 5e^{5\varphi/12}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/3.$	10	$\rho = 12e^{12\varphi/5}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/3.$
11	$\rho = 1 - \sin \varphi, \quad -\pi/2 \leq \varphi \leq -\pi/6.$	12	$\rho = 2(1 - \cos \varphi), \quad -\pi \leq \varphi \leq -\pi/2.$
13	$\rho = 3(1 + \sin \varphi), \quad -\pi/6 \leq \varphi \leq 0.$	14	$\rho = 4(1 - \sin \varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/6.$
15	$\rho = 5(1 - \cos \varphi), \quad -\pi/3 \leq \varphi \leq 0.$	16	$\rho = 6(1 + \sin \varphi), \quad -\pi/2 \leq \varphi \leq 0.$
17	$\rho = 7(1 - \sin \varphi), \quad -\pi/6 \leq \varphi \leq \pi/6.$	18	$\rho = 8(1 - \cos \varphi), \quad -2\pi/3 \leq \varphi \leq 0.$
19	$\rho = 4(1 + \sin \varphi), \quad -\pi/3 \leq \varphi \leq 0.$	20	$\rho = 6(1 + \cos \varphi), \quad -\pi/3 \leq \varphi \leq 0.$
21	$\rho = 2\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 5/12.$	22	$\rho = 2\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 12/5.$
23	$\rho = 4\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 3/4.$	24	$\rho = 3\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 4/3.$
25	$\rho = 5\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 12/5.$	26	$\rho = 4\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 5/4.$
27	$\rho = 3\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 5/3.$	28	$\rho = 5\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 8/5.$
29	$\rho = 2\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 3/4.$	30	$\rho = 2\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 4/3.$

31	$\rho = 6 \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/3.$	32	$\rho = 4 \cos \varphi, \quad -\pi/6 \leq \varphi \leq 0.$
33	$\rho = 3 \sin \varphi, \quad \pi/3 \leq \varphi \leq 2\pi/3.$	34	$\rho = 4 \sin \varphi, \quad \pi/6 \leq \varphi \leq \pi/3.$
35	$\rho = 3 \cos \varphi, \quad -\pi/4 \leq \varphi \leq 0.$	36	$\rho = 2 \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/6.$
37	$\rho = 8 \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/4.$	38	$\rho = 6 \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/3.$
39	$\rho = 2 \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/6.$	40	$\rho = 8 \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/4.$

2.3. Объем тела вращения

Если криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y = f(x)$ и прямыми $y = 0, x = a, x = b$, вращается вокруг оси Ox , то объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx$$

Если же криволинейная трапеция, ограниченная кривой $x = \varphi(y)$ и прямыми $x = 0, y = c, y = d$, вращается вокруг оси Oy , то объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V_y = \pi \int_c^d x^2 dy$$

Пример 14. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, расположенной в первой четверти и ограниченной параболой $y = 2x^2$, прямой $y = -3x + 5$ и осью Ox .

Найдем точки пересечения линий:

$$2x^2 = -3x + 5,$$

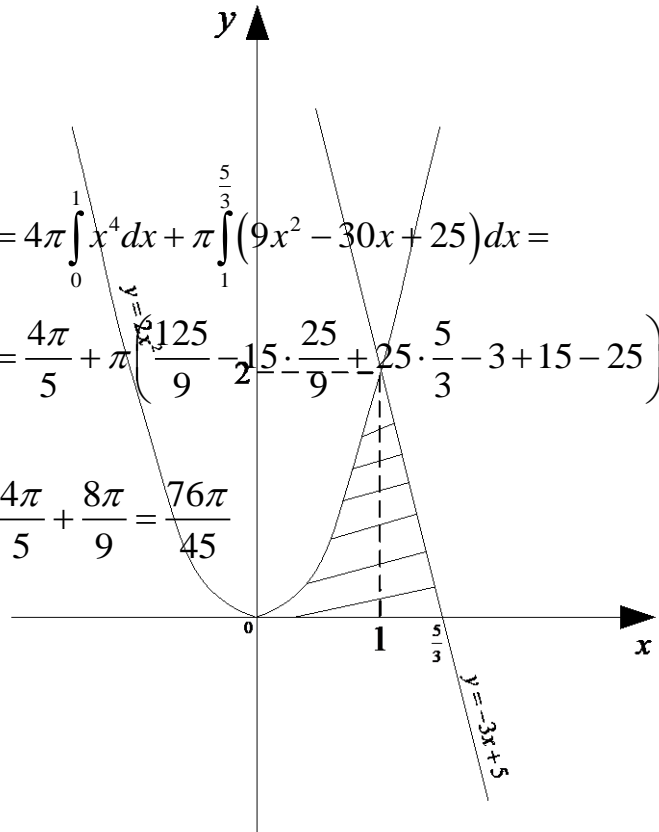
$$\text{откуда } x_1 = -\frac{5}{2}, \quad x_2 = 1.$$

Вычислим значения ординаты при $x_2 = 1$. Получаем $y_2 = 2$.

Разобьем полученную фигуру на две с помощью прямой $x = 1$.

Искомый объем будет складываться из двух объемов.

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^1 (2x^2)^2 dx + \pi \int_1^{\frac{5}{3}} (-3x+5)^2 dx = 4\pi \int_0^1 x^4 dx + \pi \int_1^{\frac{5}{3}} (9x^2 - 30x + 25) dx = \\
 &= 4\pi \left(\frac{x^5}{5} \right)_0^1 + \pi \left(3x^3 - 15x^2 + 25x \right)_1^{\frac{5}{3}} = \frac{4\pi}{5} + \pi \left(\frac{125}{9} - 2 \cdot 15 \cdot \frac{25}{9} + 25 \cdot \frac{5}{3} - 3 + 15 - 25 \right) = \\
 &= \frac{4\pi}{5} + \pi \left(25 \left(\frac{5}{9} - \frac{15}{9} + \frac{15}{9} \right) - 13 \right) = \frac{4\pi}{5} + \frac{8\pi}{9} = \frac{76\pi}{45}
 \end{aligned}$$

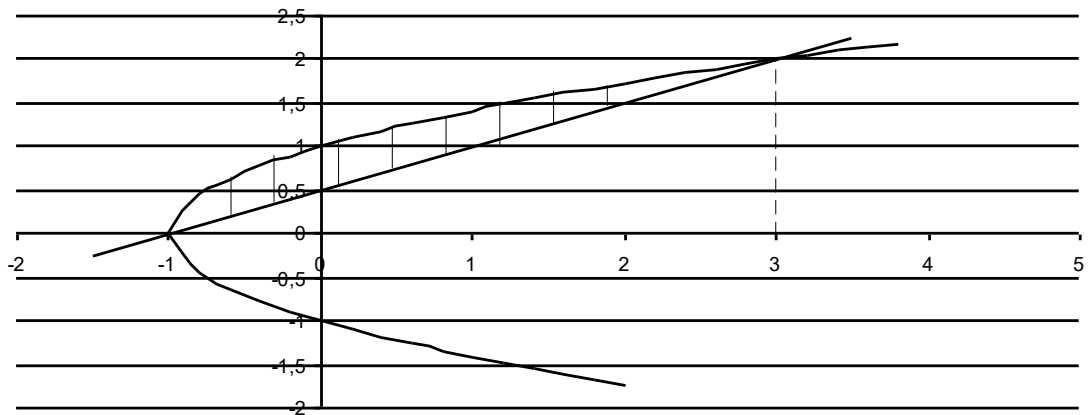


Пример 15. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривой $y = \sqrt{x+1}$ и прямой $2y - x = 1$.

Найдем точки пересечения линий $y = \sqrt{x+1}$ и $y = \frac{x+1}{2}$:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{x+1} &= \frac{x+1}{2}, \\
 4(x+1) &= (x+1)^2, \\
 \text{откуда } x_1 &= -1, \quad x_2 = 3.
 \end{aligned}$$

Вычислим значения ординат: при $x_1 = -1$ получаем $y_1 = 0$, при $x_2 = 3$ получаем $y_2 = 2$.



Искомый объем будет вычисляться как разность двух объемов:

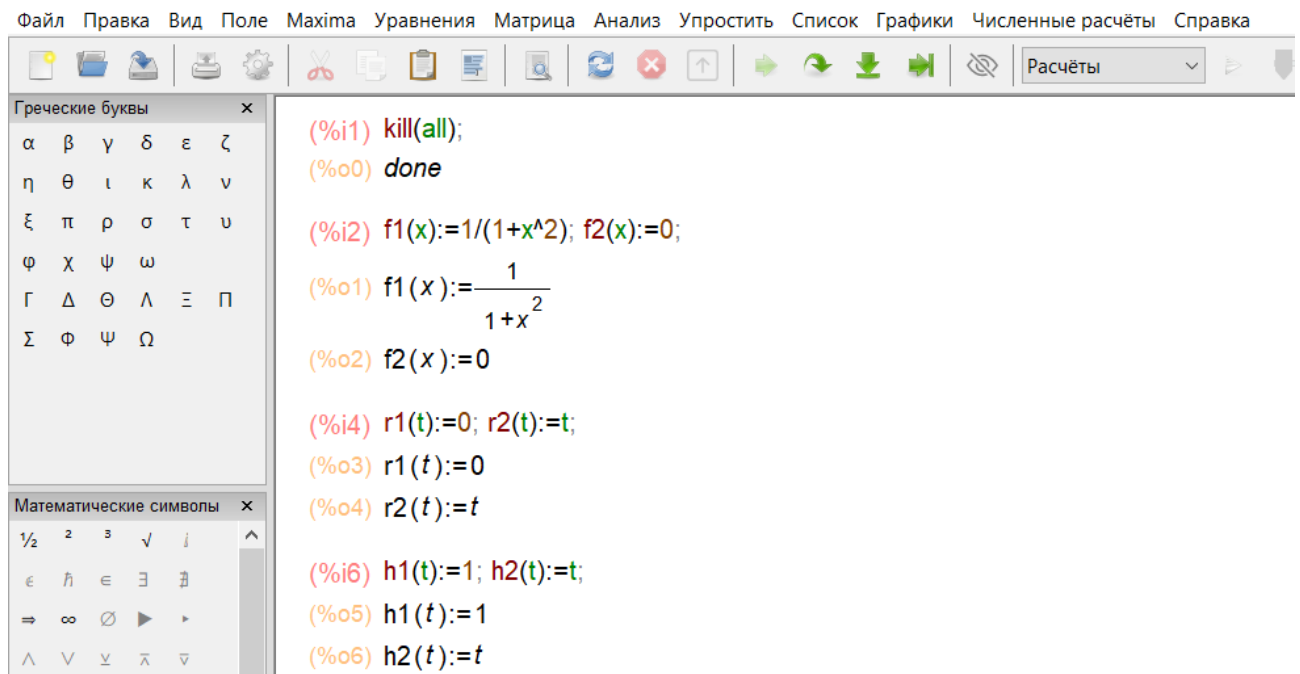
$$V = \pi \int_{-1}^3 (\sqrt{x+1})^2 dx - \pi \int_{-1}^3 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x \right)^2 dx = \pi \int_{-1}^3 (x+1) dx - \frac{\pi}{4} \int_{-1}^3 (x+1)^2 dx =$$

$$= \pi \frac{(x+1)^2}{2} \Big|_{-1}^3 - \frac{\pi}{4} \cdot \frac{(x+1)^3}{3} \Big|_{-1}^3 = 8\pi - \frac{16\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}.$$

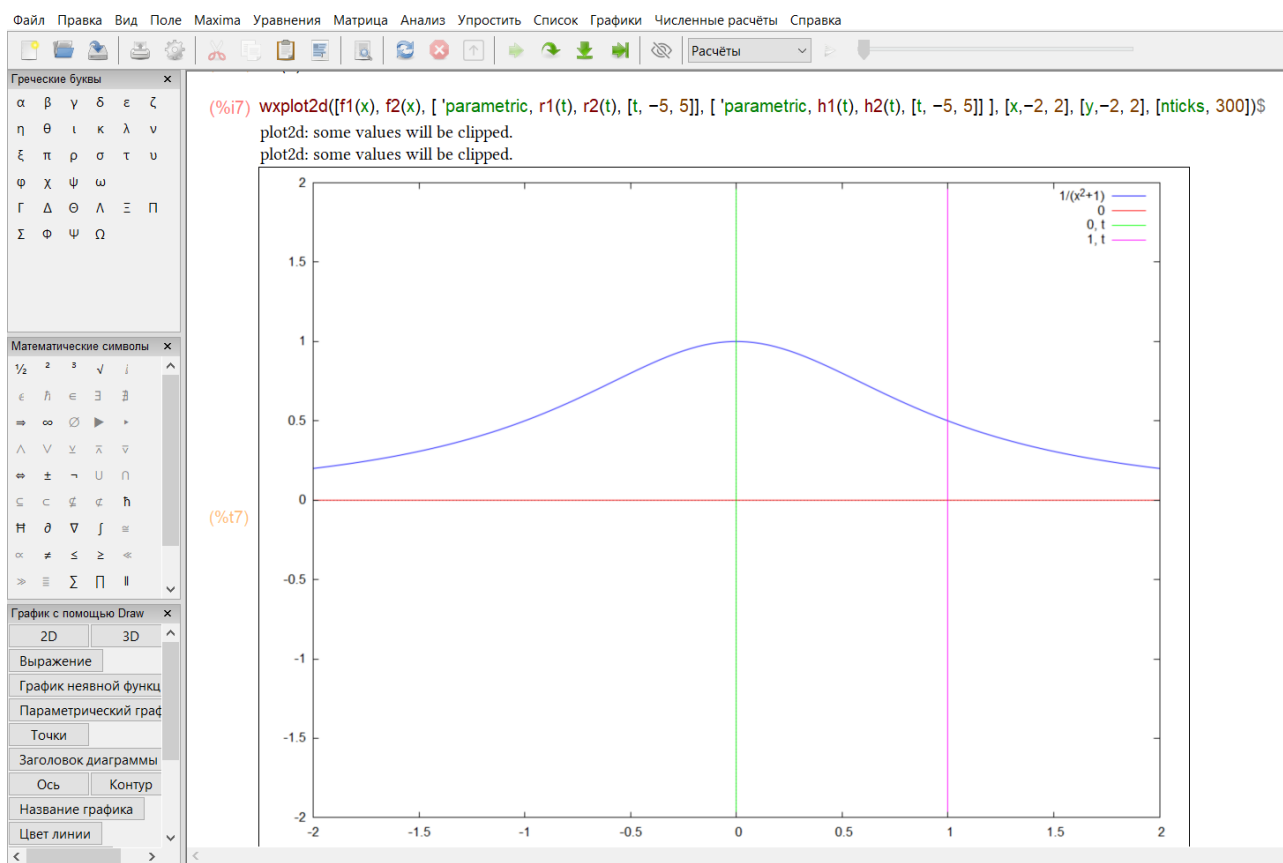
Для решения подобных задач в Maxima следует выполнить следующие действия:

1. Построить криволинейную трапецию.
2. Найти точки пересечения кривых.
3. Составить и вычислить определенный интеграл с помощью программы Maxima и вручную.
4. Записать ответ.

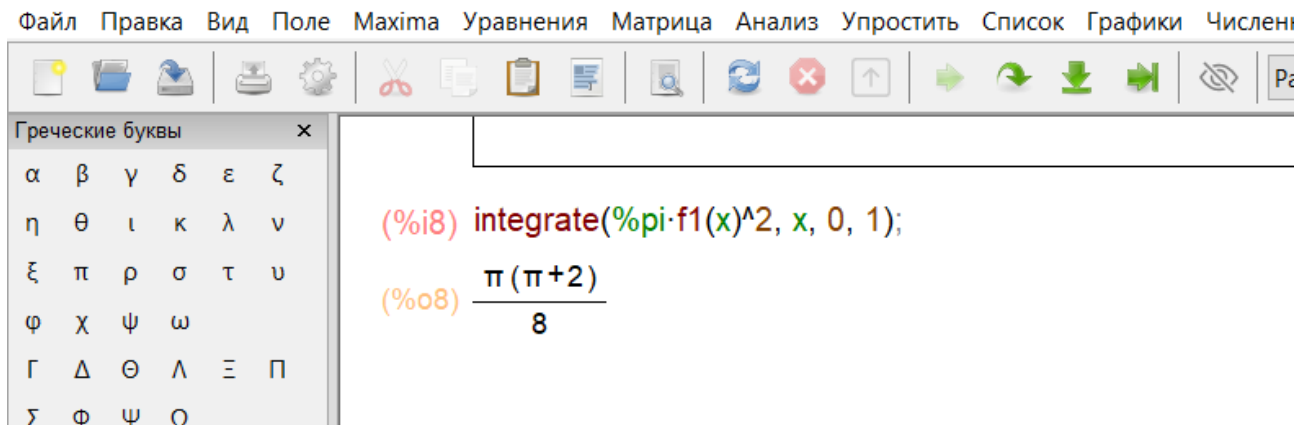
Пример 16. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{1}{x^2 + 1}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ вокруг оси а) Ox , б) Oy .



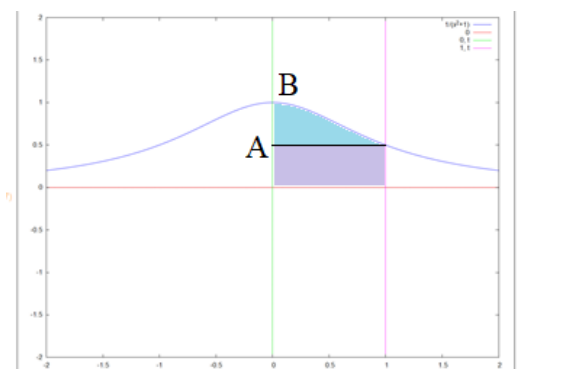
Построим график функций



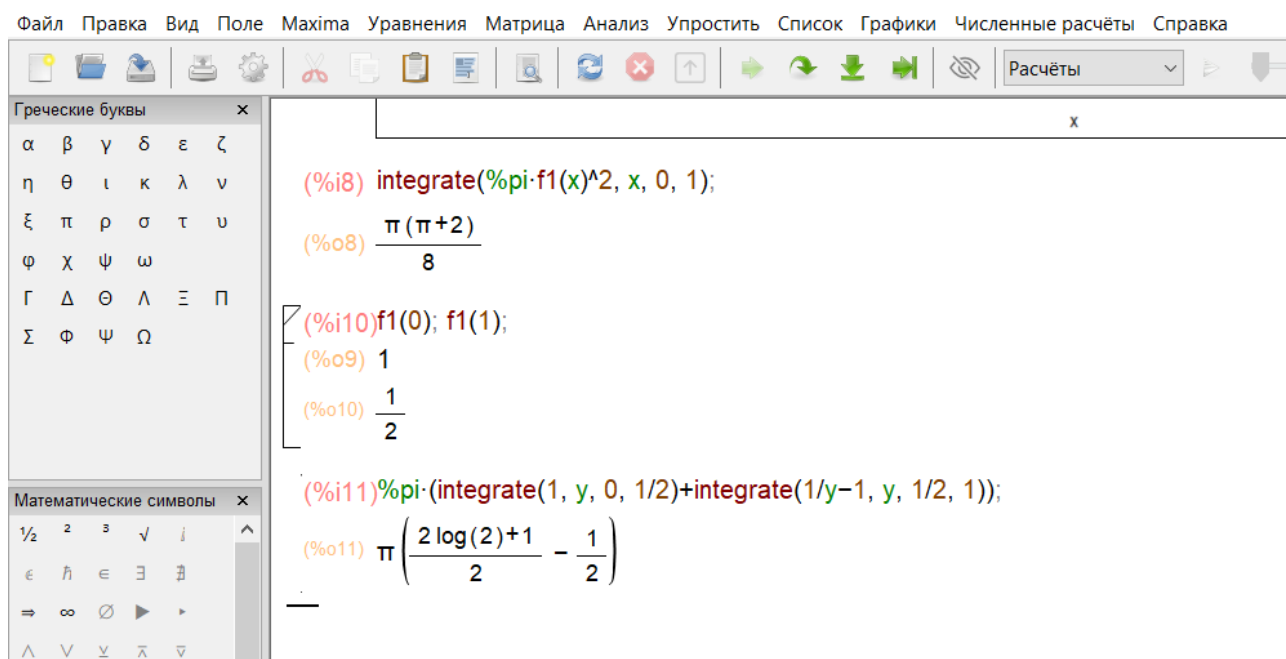
а) Если трапеция вращается вокруг оси Ox , тогда вычисляем интеграл:



б) Если трапеция вращается вокруг оси Oy , тогда область нужно разделить на две подобласти:



Найдем ординаты точек A и B и вычислим объем тела вращения:



Задача 7. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций (аналитически и с помощью программы wxMaxima). В вариантах 1–20 ось вращения Ox , в вариантах 21–40 ось вращения Oy .

1	$y = -x^2 + 5x - 6, \quad y = 0.$
2	$2x - x^2 - y = 0, \quad 2x^2 - 4x + y = 0.$
3	$y = 3\sin x, \quad y = \sin x, \quad 0 \leq x \leq \pi.$
4	$y = 5\cos x, \quad y = \cos x, \quad x = 0, \quad x \geq 0.$
5	$y = \sin^2 x, \quad x = \pi/2, \quad y = 0.$
6	$x = \sqrt[3]{y-2}, \quad x = 1, \quad y = 1.$
7	$y = xe^x, \quad y = 0, \quad x = 1.$
8	$y = 2x - x^2, \quad y = -x + 2, \quad x = 0.$
9	$y = 2x - x^2, \quad y = -x + 2.$

10	$y = e^{1-x}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1.$
11	$y = x^2, \quad y^2 - x = 0.$
12	$x^2 + (y - 2)^2 = 1.$
13	$y = 1 - x^2, \quad x = 0, \quad x = \sqrt{y - 2}, \quad x = 1.$
14	$y = x^2, \quad y = 1, \quad x = 2.$
15	$y = x^3, \quad y = \sqrt{x}.$
16	$y = \sin(\pi x/2), \quad y = x^2.$
17	$y = \frac{x^2}{4}, \quad y = 12 - 2x, \quad x = 0.$
18	$y = xe^x, \quad y = 0, \quad x = 1.$
19	$y = \frac{x^2}{2}, \quad y = \frac{x^3}{8}.$
20	$y = \sqrt{x}e^x, \quad y = 0, \quad x = 1.$
21	$y = \sqrt{x - 1}, \quad y = 0, \quad y = 1, \quad x = 0, 5.$
22	$y = \ln x, \quad x = 2, \quad y = 0.$
23	$y = (x - 1)^2, \quad y = 1.$
24	$y^2 = x - 2, \quad y = 0, \quad y = x^3, \quad y = 1.$
25	$y = x^3, \quad y = x^2.$
26	$y = \arccos(x/5), \quad y = \arccos(x/3), \quad y = 0.$
27	$y = \arcsin x, \quad y = \arccos x, \quad y = 0.$
28	$y = x^2 - 2x + 1, \quad x = 2, \quad y = 0.$
29	$y = x^3, \quad y = x.$
30	$y = \arccos x, \quad y = \arcsin x, \quad x = 0.$

31	$y = (x-1)^2, \quad x=0, \quad x=2, \quad y=0.$
32	$y = \arccos(x/3), \quad y = \arccos x, \quad y=0.$
33	$y = x^2, \quad x=2, \quad y=0.$
34	$y = x^2 + 1, \quad y = x, \quad x=0, \quad x=1.$
35	$y = \arcsin(x/5), \quad y = \arcsin x, \quad y = \pi/2.$
36	$y = (x+1)^2, \quad y=1.$
37	$y = \frac{x^2}{2}, \quad y = \frac{x^3}{8}.$
38	$y = (x+1)^2, \quad x=-1, \quad x=-2, \quad y=0.$
39	$y = \sqrt[3]{x}, \quad x=8, \quad y=0.$
40	$y = \frac{x^2}{4}, \quad y = 12 - 2x, \quad y=0.$

2.4. Площадь поверхности вращения

Если дуга гладкой кривой $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, вращается вокруг оси Ox , то площадь поверхности вращения вычисляется по формуле

$$S_x = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

Пример 17. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox плоской фигуры ограниченной линиями $y = x^3$, $x = 0$, $x = 2$.

Найдем производную $y' = 3x^2$, тогда

$$\begin{aligned} S_x &= 2\pi \int_0^2 x^3 \sqrt{1 + (3x^2)^2} dx = 2\pi \int_0^2 x^3 \sqrt{1 + 9x^4} dx = \frac{2\pi}{36} \int_0^2 (1 + 9x^4)^{\frac{1}{2}} d(1 + 9x^4) = \\ &= \frac{\pi}{18} \frac{2}{3} (1 + 9x^4)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 = \frac{\pi}{27} (145^{\frac{3}{2}} - 1) = \frac{\pi}{27} (145\sqrt{145} - 1) \end{aligned}$$

Для решения подобных задач в Махита следует выполнить следующие действия:

1. Построить кривую.
2. Вычислить производные функции.
3. В зависимости от способа задания кривой, составить и вычислить определенный интеграл с помощью программы Махита и вручную.
4. Записать ответ.

Пример 18. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой $y = \sin 2x$ от $x = 0$ до $x = \frac{\pi}{2}$.

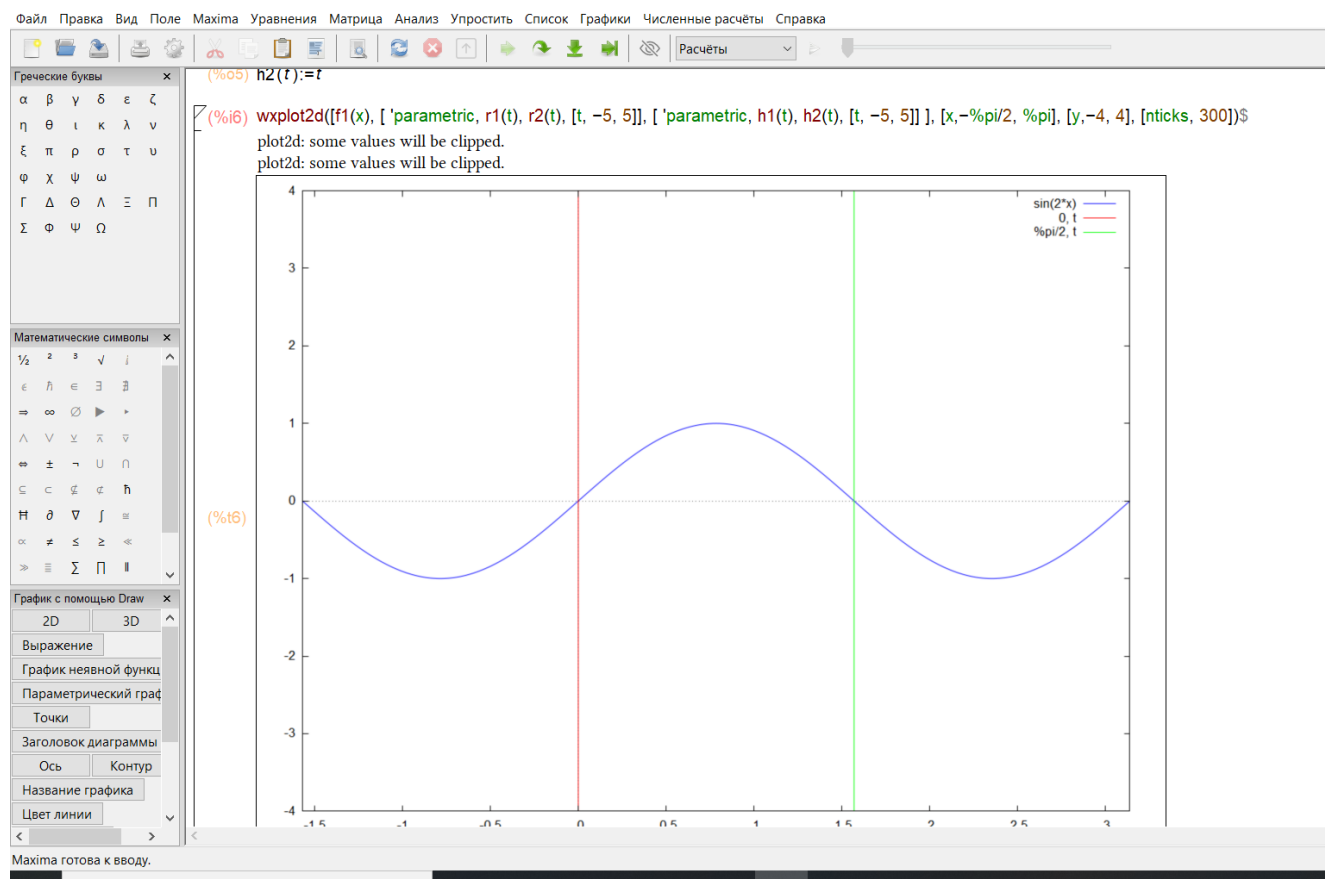
Введем функции:

```
(%i1) f1(x):=sin(2*x);
(%o1) f1(x):=sin(2 x)

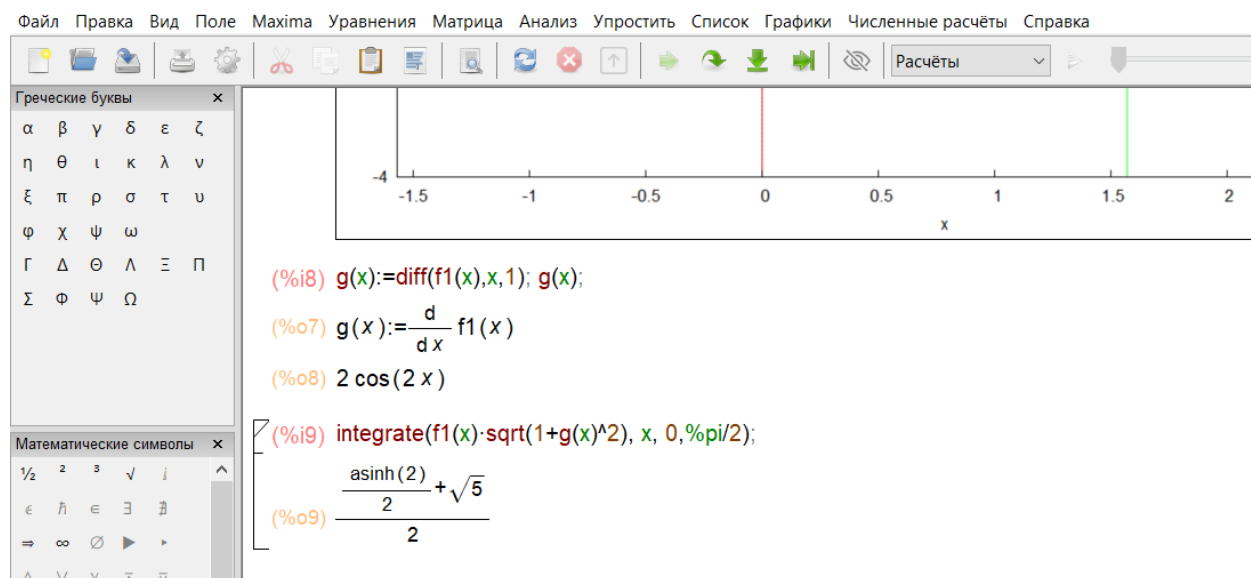
[ (%i3) r1(t):=0; r2(t):=t;
  (%o2) r1(t):=0
  (%o3) r2(t):=t

  (%i5) h1(t):=%pi/2; h2(t):=t;
  (%o4) h1(t):=%pi/2
  (%o5) h2(t):=t
```

Построим график функций:



Найдем производную и вычислим интеграл



Справочная информация:

Гиперболический косинус: $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Гиперболический синус: $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Гиперболический тангенс: $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Гиперболический котангенс: $\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.

Гиперболический ареасинус: $\operatorname{Arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

Гиперболический ареакосинус: $\operatorname{Arch} x = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1}) = \pm \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

Гиперболический ареатангенс: $\operatorname{Arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$

Гиперболический ареакотангенс: $\operatorname{Arcth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$

3. Приближенные вычисления определенных интегралов

3.1. Некоторые теоретические сведения

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и известна ее первообразная $F(x)$, то определенный интеграл удастся вычислить непосредственно с помощью формулы Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где $F(b)$ и $F(a)$ – значения первообразной $F(x)$ функции $f(x)$ на концах отрезка интегрирования.

Однако во многих случаях в реальных исследовательских задачах первообразная функции $F(x)$ не может быть выражена через элементарные функции или является слишком сложной; вследствие этого вычисление определенного интеграла по формуле Ньютона-Лейбница может быть затруднительным или невыполнимым. Кроме того, на практике подынтегральная функция $f(x)$ часто задается таблично и тогда само понятие первообразной теряет смысл. Поэтому большое значение имеют приближенные и в первую очередь численные методы вычисления определенных интегралов.

Назначение большинства приближенных методов вычисления определенных интегралов состоит в замене подынтегральной функции $f(x)$ аппроксимирующей функцией $\varphi(x)$, для которой можно легко записать первообразную в элементарных функциях, то есть

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx + R,$$

где R – погрешность вычисления интеграла.

Чаще всего функцию $f(x)$ заменяют интерполяционным полиномом (под интерполяцией понимают приближенное вычисление неизвестных значений функции по известным ее значениям в заданных точках), для построения которого используются значения функции в узлах x_i , $i = \overline{0, n}$:

$$f(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) + r(x),$$

где $r(x)$ – остаточный член.

Подставляя полученное выражение в определенный интеграл вместо подынтегральной функции, получим общую формулу численного интегрирования

$$I = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i) + R,$$

где $f(x_i)$ – значения подынтегральной функции в узловых точках x_i , A_i – весовые коэффициенты, а R – погрешность или остаточный член формулы.

С целью уменьшения погрешности, связанной с заменой подынтегральной функции, отрезок интегрирования $[a, b]$ разбивают на n отрезков и на каждом из полученных (частичных) отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$, заменяют подынтегральную функцию аппроксимирующей функцией $\varphi_i(x)$. Тогда приближенное значение интеграла определяется суммой частичных интегралов от функций $\varphi_i(x)$, взятых в пределах от x_{i-1} до x_i для $i = \overline{1, n}$:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i(x)dx. \quad (3.1)$$

Методы численного интегрирования можно классифицировать в зависимости от способа аппроксимации подынтегральной функции $f(x)$ с помощью функций $\varphi_i(x)$, $i = \overline{1, n}$.

Методы Ньютона-Котеса основаны на полиномиальной аппроксимации подынтегральной функции. Методы данного класса отличаются друг от друга степенью используемого полинома, от которой зависит количество узлов, в которых необходимо вычислять функцию $f(x)$. В методах Ньютона-Котеса отрезок интегрирования разбивается, как правило, на отрезки равной длины, величина которых определяется как

$h = \frac{b-a}{n}$ и называется шагом интегрирования. Алгоритмы данных методов

просты и легко поддаются программной реализации.

В процессе численного интегрирования необходимо вычислить приближенное значение интеграла и оценить погрешность R . Погрешность, возникающая при численном интегрировании (также как и при численном дифференцировании), имеет два основных источника. Первым источником погрешности является замена подынтегральной функции аппроксимирующей функцией – погрешность аппроксимации. Как будет показано далее, погрешность аппроксимации уменьшается с увеличением количества n отрезков разбиения исходного отрезка интегрирования за счет более точной аппроксимации подынтегральной функции. Второй источник погрешности – неточности в вычислении подынтегральной функции в узловых точках и ошибки округления. Данная погрешность возрастает с ростом n и с некоторого значения n^* начинает преобладать над погрешностью аппроксимации. Это обстоятельство должно предостеречь от выбора чрезмерно большого числа n .

Способ получения формул для вычисления приближенного значения интеграла в методах Ньютона-Котеса состоит в следующем. Разобьем отрезок интегрирования $[a, b]$ на n частичных (как правило, равных по длине) отрезков, точки разбиения x_0, x_1, \dots, x_n , $a = x_0$, $b = x_n$ будем называть узлами интегрирования, а расстояния между узлами $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = \overline{1, n}$, – шагами интегрирования. В частном случае шаг интегрирования может быть постоянным ($h = \frac{b-a}{n}$). На каждом из частичных отрезков интегрирования $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$, будем аппроксимировать подынтегральную функцию полиномом некоторой степени. В результате вычисление частичных интегралов на отрезках $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$, по формуле (3.1) не составит труда.

3.2. Методы численного интегрирования

3.2.1. Методы прямоугольников

Рассмотрим простейшие методы из класса методов Ньютона-Котеса, в которых подынтегральную функцию $f(x)$ на отрезках интегрирования $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$, заменяют полиномом нулевой степени (константой): $f(x) \approx \varphi_i(x) = c_i$. Подставляя $\varphi_i(x)$ в формулу (3.1) и выполняя интегрирование, получаем

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n c_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx = \sum_{i=1}^n c_i x \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} = \sum_{i=1}^n c_i (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n c_i h_i. \quad (3.2)$$

Таким образом, в геометрической интерпретации приближенное значение интеграла определяется суммой площадей прямоугольников, одна из сторон которых соответствует отрезкам интегрирования длиной $h_i = x_i - x_{i-1}$, а другая – аппроксимирующим константам. Отсюда происходит и название методов.

Далее будем использовать обозначения: $f_{i-1} = f(x_{i-1})$, $f_i = f(x_i)$, $f_{i+1} = f(x_{i+1})$.

Заметим, что замена подынтегральной функции константой неоднозначна, так как ее можно выбрать равной значению подынтегральной функции в любой точке каждого частичного отрезка интегрирования. Выбирая

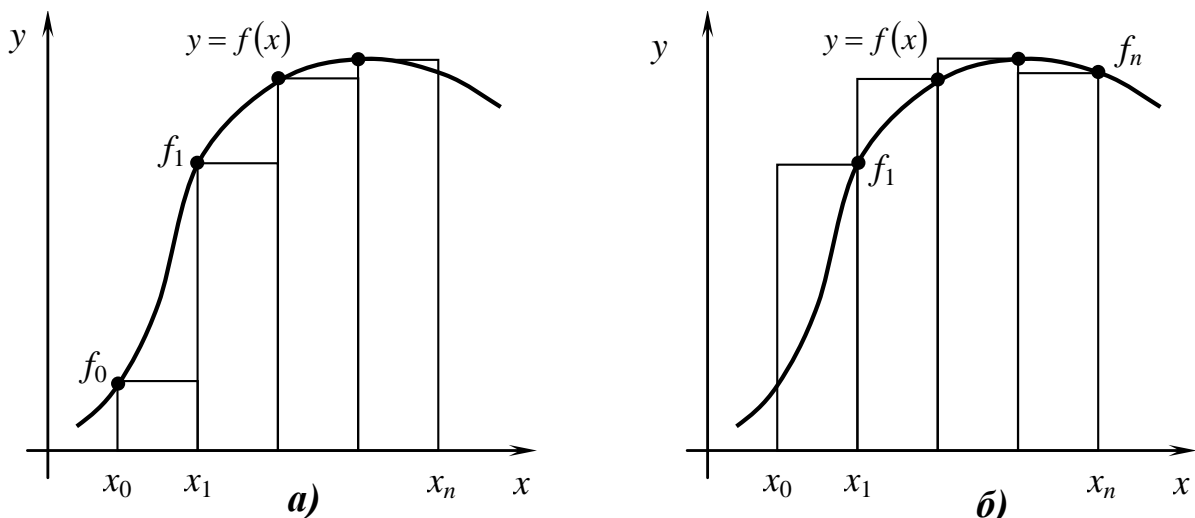


Рис. 1. Пример метода левых (а) и правых (б) прямоугольников

константу c_i равной значению подынтегральной функции в левой (рис. 1 а) или правой (рис. 1 б) границах отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$, приходим к формулам **левых и правых прямоугольников**, соответственно:

$$I_L = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n h_i f_{i-1} = h_1 f_0 + h_2 f_1 + \dots + h_n f_{n-1}, \quad (3.3)$$

$$I_R = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n h_i f_i = h_1 f_1 + h_2 f_2 + \dots + h_n f_n. \quad (3.4)$$

В случае постоянного шага интегрирования, когда $h_i = h = \frac{(b-a)}{n}$, $i = \overline{1, n}$, формулы (3.3) и (3.4) приобретают вид

$$I_L = \int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{i=1}^n f_{i-1} = h(f_0 + f_1 + \dots + f_{n-1}), \quad (3.5)$$

$$I_R = \int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{i=1}^n f_i = h(f_1 + f_2 + \dots + f_n).$$

На рис. 2 закрашенными фигурами показаны примеры погрешности вычисления значений интеграла методами левых и правых прямоугольников.

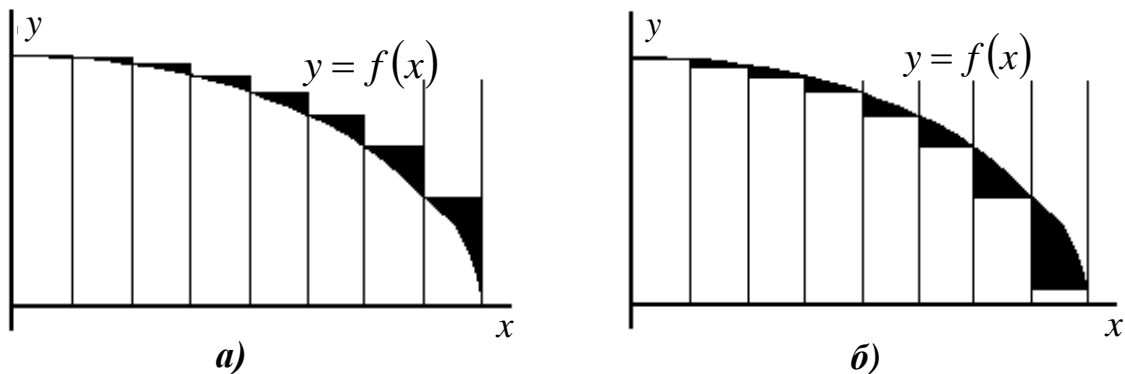


Рис. 2. Пример погрешности метода левых (а) и правых (б) прямоугольников.

Наиболее широко на практике используется формула **средних прямоугольников**, в которой значение константы c_i (высоты прямоугольника) выбирается равной значению подынтегральной функции в средней точке \bar{x}_i каждого частичного отрезка интегрирования

$$\bar{x}_i = x_{i-1} + \frac{h_i}{2} = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}, \quad i = \overline{1, n}:$$

$$I_S = \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n h_i f(\bar{x}_i).$$

Пример геометрической интерпретации метода средних прямоугольников представлен на рис. 3.

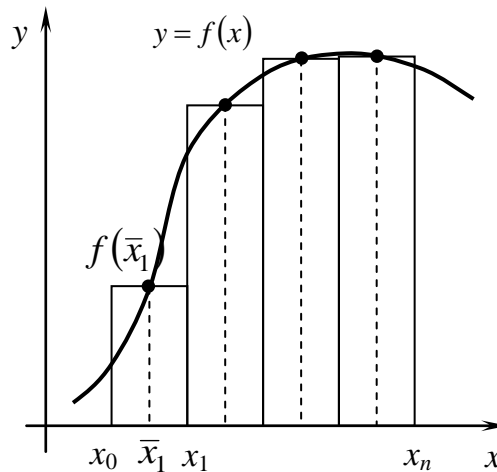


Рис. 3. Пример метода средних прямоугольников.

В случае постоянного шага интегрирования, когда $h_i = h = \frac{b-a}{n}$, $i = \overline{1, n}$, формула средних прямоугольников будет иметь следующий вид

$$I_S = \int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i),$$

где $\bar{x}_i = a + h \left(i - \frac{1}{2} \right)$, $i = \overline{1, n}$.

Из трех рассмотренных выше методов в подавляющем большинстве случаев метод средних прямоугольников является наиболее точным.

Замечание. Если подынтегральная функция $f(x)$ задана не аналитическим выражением, а таблично, то формула средних прямоугольников оказывается неприменима (без привлечения дополнительной интерполяции), так как значения функции известны лишь в узловых точках. В этом случае пользуются либо формулами левых или правых прямоугольников, либо используют другие методы.

3.2.2. Метод трапеций

На каждом частичном отрезке интегрирования $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$, заменим подынтегральную функцию $f(x)$ полиномом первой степени $\varphi_i(x)$ – прямой линией, проходящей через точки (x_{i-1}, f_{i-1}) и (x_i, f_i) :

$$f(x) \approx \varphi_i(x) = f_{i-1} + \frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}), \quad i = \overline{1, n}.$$

Пояснение. В общем виде уравнение прямой линии, проходящей через две точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) , задается следующим образом:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \text{ откуда } (y - y_1) = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}(x - x_1).$$

Подставляя полученное выражение в формулу (3.1) и выполняя интегрирование по частичным отрезкам, приходим к формуле трапеций:

$$I_T = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n h_i (f_{i-1} + f_i), \text{ где } h_i = x_i - x_{i-1}.$$

На отрезках $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$, площадь под графиком функции $y = f(x)$ заменяется площадями трапеций с основаниями, равными значениям функции $f(x)$ на концах отрезка, и высотой, равной h_i (рис. 4).

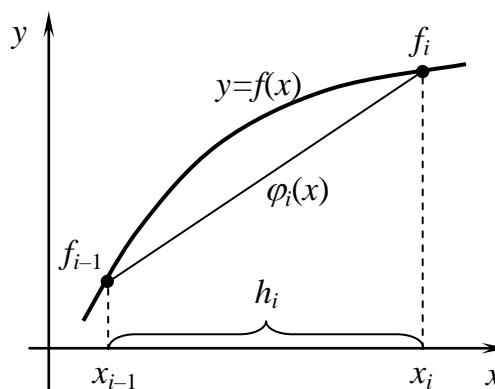


Рис. 4. Иллюстрация метода трапеций.

В случае постоянного шага интегрирования, когда $h_i = h = \frac{b-a}{n}$,

$i = \overline{1, n}$, формула трапеций принимает вид:

$$I_T = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} \sum_{i=1}^n (f_{i-1} + f_i) = \frac{h}{2} [f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \dots + 2f_{n-1} + f_n]. \quad (3.6)$$

Для удобства вычислений формулу (3.6) записывают следующим образом:

$$I_T = \int_a^b f(x)dx \approx h \left(\frac{f_0 + f_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f_i \right).$$

Вид представленной формулы позволяет сделать вывод, что она может быть сформирована также исходя из других соображений, так как получаемый с ее применением результат является средним арифметическим результатов использования формул левых (3.3) и правых (3.4) прямоугольников.

Поэтому $I_T = \frac{I_L + I_R}{2}$ и указанное утверждение справедливо для случаев равных и неравных шагов интегрирования.

Замечание. Несмотря на то, что в методе трапеций для аппроксимации подынтегральной функции используются полиномы первой степени, по сравнению с методами прямоугольников, которые используют полиномы нулевой степени, точность метода трапеций оказывается ниже точности метода средних прямоугольников. Более высокая точность метода средних прямоугольников объясняется «удачным» выбором узловых точек для вычисления значений подынтегральной функции.

3.2.3. Метод Симпсона (метод парабол)

Аппроксимацию функции $f(x)$ по методу трапеций можно интерпретировать как замену исходной функции $f(x)$ некоторой кусочно-линейной функцией. Ошибка метода в данном случае определяется «грубостью» предложенного способа аппроксимации функции. Естественно допустить, что если исходную функцию $f(x)$ аппроксимировать на частичных отрезках не линейными функциями, а полиномами более высоких порядков, то ошибка соответствующего метода численного интегрирования должна уменьшиться. В методе Симпсона в качестве функции, с помощью которой на частичных отрезках интегрирования заменяется исходная функция $f(x)$, выбрана парабола.

Пояснение. Более высокая точность вычисления интегралов обеспечивается при использовании параболической аппроксимации (полиномом второй степени) $y = ax^2 + bx + c$ по трем соседним точкам. Для нахождения коэффициентов a , b и c полинома, проходящего через точки (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , требуется найти решение следующей системы линейных уравнений

$$\begin{cases} y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c, \\ y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c, \\ y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c, \end{cases}$$

относительно неизвестных a , b , c .

Разделим отрезок интегрирования $[a, b]$ на четное число n равных отрезков с шагами h . На каждом отрезке $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ длиной $2h$, содержащем три узла (x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) , заменим подынтегральную функцию полиномом второй степени $\varphi_i(x) = ax^2 + bx + c$. Пример представлен на рис. 5.

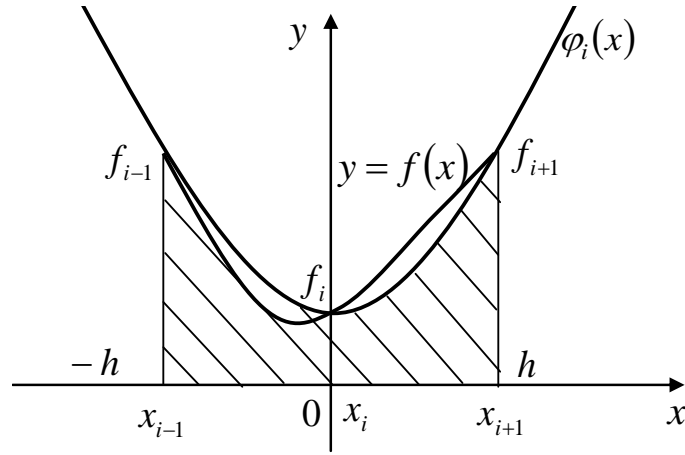


Рис. 5. Пример замены функции $y = f(x)$ параболой.

Для рассматриваемого примера значения коэффициентов a , b и c могут быть вычислены следующим образом:

$$\begin{cases} ah^2 - bh + c = f_{i-1}, \\ c = f_i, \\ ah^2 + bh + c = f_{i+1}, \end{cases}$$

откуда $c = f_i$, $2ah^2 + 2f_i = f_{i-1} + f_{i+1}$, $a = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{2h^2}$, а $b = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}$.

В результате рассматриваемый полином второй степени примет вид

$$f(x) \approx \varphi_i(x) = f_i + \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}x + \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{2h^2}x^2.$$

Интегрируя приведенное выражение на отрезке $[x_{i-1}, x_{i+1}]$, получим

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left(f_i + \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}x + \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{2h^2}x^2 \right) dx = \frac{h}{3}(f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}). \quad (3.7)$$

Приближенное значение интеграла на исходном отрезке интегрирования $[a, b]$ получим суммированием частичных интегралов (3.7) по всем отрезкам $[x_{i-1}, x_{i+1}]$:

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \sum_{i=0}^{n/2-1} (f_{2i} + 4f_{2i+1} + f_{2i+2}) = \\ &= \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \dots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Полученное соотношение называется **формулой Симпсона** или

формулой парабол, в соответствии с которой искомый определенный интеграл вычисляется как суммарная площадь параболических сегментов на всех частичных отрезках интегрирования $[x_{i-1}, x_{i+1}]$.

Если подынтегральную функцию $f(x)$ заменять полиномом второй степени на отрезках $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$, с привлечением дополнительных точек $\bar{x}_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$, $i = \overline{1, n}$ – середин данных отрезков, то число отрезков разбиения n может быть любым (не обязательно четным), а формула (4.8) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \frac{h}{6} \sum_{i=1}^n (f_{i-1} + 4\bar{f}_i + f_i) = \\ &= \frac{h}{6} (f_0 + 4\bar{f}_1 + 2f_1 + 4\bar{f}_2 + \dots + 2f_{n-1} + 4\bar{f}_n + f_n) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Напомним, что $f_i = f(x_i)$, $f_{i-1} = f(x_{i-1})$, $\bar{f}_i = f(\bar{x}_i)$, $i = \overline{1, n}$.

Замечание 1. Формула (3.8) может быть использована для вычисления интегралов от функций, заданных как аналитическим выражением, так и таблично, тогда как формула (3.9) применима только в тех случаях, когда подынтегральная функция задана аналитически.

Замечание 2. Рассмотренные формулы, используемые для приближенного вычисления интегралов, называются **квадратурными формулами**. Нетрудно заметить, что все рассмотренные выше формулы имеют следующую структуру:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f_i,$$

где f_i – значения подынтегральной функции в узловых точках x_i , а A_i – весовые коэффициенты.

3.3. Погрешность методов Ньютона-Котеса

Рассмотрим один из возможных способов оценки погрешности методов численного интегрирования на примере метода средних прямоугольников. Для этого запишем выражение для интеграла на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, полученное методом средних прямоугольников для постоянного шага интегрирования:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = hf(\bar{x}_i) + R_i,$$

где $\bar{x}_i = (x_{i-1} + x_i)/2$, а R_i – погрешность интегрирования, откуда

$$R_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - hf(\bar{x}_i). \quad (3.10)$$

Для оценки погрешности интегрирования R_i разложим подынтегральную функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности средней точки \bar{x}_i :

$$f(x) = f(\bar{x}_i) + (x - \bar{x}_i)f'(\bar{x}_i) + \frac{(x - \bar{x}_i)^2}{2} f''(\bar{x}_i) + \dots \quad (3.11)$$

В малой окрестности точки \bar{x}_i в разложении (3.11) можно ограничиться небольшим количеством членов ряда. Поэтому, подставляя в (3.10) вместо функции $f(x)$ ее тейлоровское разложение (3.11), и, интегрируя его почленно, можно вычислить интеграл с любой наперед заданной точностью

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx &= hf(\bar{x}_i) + \frac{(x - \bar{x}_i)^2}{2} \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} f'(\bar{x}_i) + \frac{(x - \bar{x}_i)^3}{2 \cdot 3} \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} f''(\bar{x}_i) + \dots = \\ &= hf(\bar{x}_i) + \frac{h^3}{24} f''(\bar{x}_i) + \dots \end{aligned} \quad (*)$$

При интегрировании и подстановке пределов получаем, что все интегралы от членов ряда (3.11), содержащих нечетные степени при $(x - \bar{x}_i)$, обращаются в ноль. Подставляя полученное соотношение в формулу (3.10), получим:

$$R_i = \frac{h^3}{24} f''(\bar{x}_i) + \dots$$

При малой величине шага интегрирования h основной вклад в погрешность будет вносить первое слагаемое, называемое **главным членом**

погрешности вычисления интеграла на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, будем считать его равным R_i . Главный член полной погрешности вычисления интеграла на отрезке $[a, b]$ определяется суммированием погрешностей на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$:

$$R_0 = \sum_{i=1}^n R_i = \frac{h^2}{24} \sum_{i=1}^n hf''(\bar{x}_i) = \frac{h^2}{24} \int_a^b f''(x) dx. \quad (3.12)$$

К интегралу в формуле (3.12) мы перешли, «используя» метод средних прямоугольников для функции $f''(x)$.

Формула (3.12) представляет собой теоретическую оценку погрешности вычисления интеграла методом средних прямоугольников, данная оценка является априорной, так как не требует знания значения вычисляемого интеграла. Степень, в которую возводится шаг h , называется **порядком метода интегрирования**. Метод средних прямоугольников имеет второй порядок точности. Аналогично можно получить априорные оценки погрешностей других рассмотренных ранее методов.

Оценим погрешность метода левых прямоугольников. Погрешность интегрирования R_i на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ равняется разности между точным значением интеграла и его приближенным значением $hf(x_{i-1})$:

$$R_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - hf(x_{i-1}) \approx \frac{h^2}{2} f'(x_{i-1}).$$

Из полученного выражения видно, что основной член погрешности на каждом частичном отрезке имеет второй порядок. Поскольку полное число отрезков интегрирования равно n , то полная погрешность метода левых прямоугольников может быть рассчитана следующим образом:

$$R_0 = \sum_{i=1}^n R_i = \frac{h}{2} \sum_{i=1}^n hf'(x_{i-1}) = \frac{h}{2} \int_a^b f'(x) dx.$$

Результат оценки погрешности формулы правых прямоугольников будет таким же.

Погрешность формулы трапеций оценивается аналогичным образом. Так как значение интеграла на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ вычисляется по формуле $\frac{h}{2}[f(x_i) + f(x_{i+1})]$, то погрешность может быть рассчитана по формуле:

$$R_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - \frac{h}{2}(f_{i-1} + f_i) \approx -\frac{h^3}{12} f''(\bar{x}_i).$$

Следовательно, полная погрешность формулы трапеций на отрезке $[a, b]$ может быть рассчитана следующим образом:

$$R_0 = \sum_{i=1}^n R_i = -\frac{h^2}{12} \sum_{i=1}^n h f''(\bar{x}_i) = -\frac{h^2}{12} \int_a^b f''(x) dx$$

Далее приведены окончательные результаты оценки погрешностей:

1. Методы левых и правых прямоугольников

$$R_0 = \frac{h}{2} \int_a^b f'(x) dx.$$

2. Метод средних прямоугольников

$$R_0 = \frac{h^2}{24} \int_a^b f''(x) dx.$$

3. Метод трапеций

$$R_0 = -\frac{h^2}{12} \int_a^b f''(x) dx.$$

4. Метод Симпсона

$$R_0 = -\frac{h^4}{180} \int_a^b f^{(IV)}(x) dx.$$

Методы левых и правых прямоугольников являются методами первого порядка точности. Методы средних прямоугольников и трапеций имеют второй порядок точности, при этом метод трапеций обладает вдвое большей по абсолютной величине погрешностью. Поэтому, если подынтегральная функция задана аналитически, то предпочтительнее из методов второго порядка применять метод средних прямоугольников вследствие его меньшей погрешности. Метод Симпсона имеет четвертый порядок точности с очень малым числовым коэффициентом. Формула Симпсона позволяет получить очень высокую точность, если четвертая производная подынтегральной функции не слишком велика. В противном случае, методы второго порядка точности могут дать большую точность, чем метод Симпсона.

3.4. Вычисление интегралов с заданной точностью

Используя приведенные в разделе 3.3 оценки погрешности вычисления интегралов, можно априори определить шаг интегрирования h , при котором погрешность вычисленного результата гарантированно не превысит некоторую заданную погрешность ε . Однако на практике пользоваться априорными оценками погрешности не всегда удобно. В таких случаях контроль точности получаемого результата можно организовать следующим образом. Пусть вычисления проводились с постоянным шагом h и $I^{(h)}$ – вычисленное с шагом h приближенное значение интеграла I . Если затем вычислить приближенное значение $I^{(h/2)}$ с шагом $h/2$, то в качестве оценки погрешности последнего вычисленного значения можно рассматривать величину $\left| I^{(h/2)} - I \right| \approx \left| I^{(h/2)} - I^{(h)} \right|$.

При необходимости вычислить результат с заданной точностью ε расчеты повторяют с последовательно уменьшающимся (обычно вдвое) шагом h до тех пор, пока не выполнится условие $\left| I^{(h/2)} - I^{(h)} \right| \leq \varepsilon$.

Можно применить указанное правило для контроля погрешности на каждом частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$. При этом длина очередного шага $h_i = x_i - x_{i-1}$, посредством последовательного уменьшения начальной длины вдвое, устанавливается такой, чтобы выполнялось неравенство

$$\left| I_i^{(h/2)} - I_i^{(h)} \right| \leq \varepsilon \frac{h_i}{b-a}. \quad (3.13)$$

Тогда, в худшем случае, ошибка вычисления значения интеграла на всем отрезке интегрирования не будет превосходить сумму локальных погрешностей

$$\varepsilon \frac{\sum_{i=1}^n h_i}{b-a} = \varepsilon,$$

то есть не будет превосходить заданного уровня погрешности.

Способ вычисления интеграла с автоматическим выбором шага имеет то преимущество, что он «приспосабливается» к особенностям подынтегральной функции: в областях резкого изменения функции шаг уменьшается, а там, где функция меняется слабо, – увеличивается. Такого рода алгоритмы называются **адаптивными**, то есть приспособляющимися. Их использование позволяет сократить затраты вычислительных ресурсов

без потери точности вычисления.

Одним из подходов к экономии вычислительных ресурсов ЭВМ при необходимости сокращения шага интегрирования вдвое является сохранение в памяти ЭВМ результатов промежуточных вычислений для исходного шага и дополнение их результатами расчетов, связанных с введением на отрезках интегрирования дополнительных точек, располагающихся в их середине.

3.5. Численное интегрирование с помощью программы wxMaxima

Рассмотрим пример численного интегрирования. Зададим функцию $f(x) = \sin(x^2 + 0.2)$

Определим концы отрезка интегрирования $\left[1; \frac{\pi}{2}\right]$.

Требуется найти приближенное значение определенного интеграла от функции $f(x)$ тремя рассмотренными методами. Погрешность результата не должна превышать $\varepsilon = 0.001$.

Для сравнения воспользуемся встроенной функцией приближенного вычисления определенного интеграла:

```
(%i6) f(x):= sin(x^2+0.2);  
      numer : true;  
      a: 1; b : %pi/2;  
      epsilon : 0.001;  
      romberg(f(x), x, a, b);  
  
(%o1) f(x):= sin(x^2+0.2)  
(%o2) true  
(%o3) 1  
(%o4) 1.570796326794897  
(%o5) 0.001  
(%o6) 0.4965223140806456
```

Результат вычисления: 0.4965223140806456.

Формула левых прямоугольников.

Запишем правую часть формулы левых прямоугольников (3.5) как функцию от числа отрезков n . Так как $x_i = a + ih = a + \frac{b-a}{n}i$.

Вычислим точность вычисления определенного интеграла по формуле (3.13) в зависимости от количества отрезков n .

```

(%i6) f(x):= sin(x^2+0.2);
      numer : true;
      a: 1; b : %pi/2;
      epsilon : 0.001;
      romberg(f(x), x, a, b);

(%o1) f(x):=sin(x^2+0.2)
(%o2) true
(%o3) 1
(%o4) 1.570796326794897
(%o5) 0.001
(%o6) 0.4965223140806456

(%i11) k: 67;
      JI(n):=ev((b-a)/n·sum(f(a+(b-a)/n·i), i, 0, n-1),numer);
      P(n):=ev((abs(JI(n)-JI(2·n)),n), numer);
      JI(2·k);
      P(k);

(%o7) 67

(%o8) 
$$JI(n):=ev\left(\frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)\right), numer\right)$$


(%o9) 
$$P(n):=ev\left(\left|JI(n)-JI(2n)\right|, n, numer\right)$$

(%o10) 0.4975295296819863
(%o11) 67

```

Требуемая точность была достигнута при $n = 67$. Приближенное значение интеграла с заданной точностью $\varepsilon = 0.001$ по формуле левых прямоугольников равно 0.4975295296819863.

Формула средних прямоугольников.

Запишем правую часть формулы средних прямоугольников (3.7)

как функцию от числа отрезков n . Так как $x_i = a + ih = a + \frac{b-a}{n}i$.

Точность вычисления определенного интеграла в зависимости от числа отрезков n найдем по формуле (3.13).

```
(%i9) f(x):= sin(x^2+0.2);
      numer : true;
      a: 1; b : %pi/2; k: 6;
      Jc(n):=ev((b-a)/n*sum(f((a+(b-a)/n*i+a+(b-a)/n*(i+1))/2), i, 0, n-1), numer);
      P(n):= ev(abs(Jc(n)-Jc(2*n)),numer);
      Jc(2*k);
      P(k);
```

```
(%o1) f(x):=sin(x^2+0.2)
```

```
(%o2) true
```

```
(%o3) 1
```

```
(%o4) 1.570796326794897
```

```
(%o5) 6
```

$$(\%o6) \quad Jc(n) := ev \left(\frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(f \left(\frac{a + \frac{b-a}{n}i + a + \frac{b-a}{n}(i+1)}{2} \right) \right), numer \right)$$

```
(%o7) P(n):=ev(|Jc(n)-Jc(2 n)|, numer)
```

```
(%o8) 0.4968543017618265
```

```
(%o9) 9.985166509519083 10-4
```

При $n=6$ приближенное значение интеграла по формуле средних прямоугольников равно 0.4968543017618265 с точностью $9.985166509519083 \cdot 10^{-4}$.

Формула правых прямоугольников.

Запишем правую часть формулы правых прямоугольников (3.5) как функцию от числа отрезков n . Так как $x_i = a + ih = a + \frac{b-a}{n}i$.
Определим точность вычисления интеграла по формуле (3.13):

```

(%i9) f(x):= sin(x^2+0.2);
      numer : true;
      a: 1; b : %pi/2; k: 69;
      Jp(n):=ev((b-a)/n*sum(f(a+(b-a)/n*i), i, 1, n), numer);
      P(n):= ev(abs(Jp(n)-Jp(2*n)),numer);
      Jp(2*k);
      P(k);

(%o1) f(x):=sin(x^2+0.2)
(%o2) true
(%o3) 1
(%o4) 1.570796326794897
(%o5) 69

(%o6) Jp(n):=ev\left(\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n\left(f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)\right),numer\right)

(%o7) P(n):=ev(|Jp(n)-Jp(2 n)|,numer)
(%o8) 0.4955340503706018
(%o9) 9.982708115104377 10^-4

```

При $n=69$ приближенное значение интеграла по формуле правых прямоугольников равно 0.4955340503706018 с точностью $9.982708115104377 \cdot 10^{-4}$.

Формула трапеций.

Запишем правую часть формулы трапеций (3.6) как функцию от числа отрезков n . Так как $x_i = a + ih = a + \frac{b-a}{n}i$.

Точность вычисления определим по формуле (3.13) в зависимости от числа отрезков n .


```
(%i9) f(x):= sin(x^2+0.2);
      numer : true;
      a: 1; b : %pi/2; k: 5;
      Jt(n):=ev((b-a)/(2·n)·(f(a)+f(b)+2·sum(f(a+(b-a)/n·i), i, 1, n-1)), numer);
      P(n):= ev(abs(Jt(n)-Jt(2·n))/(2^2-1),numer);
      Jt(2·k);
      P(k);
```

```
(%o1) f(x):=sin(x2+0.2)
```

```
(%o2) true
```

```
(%o3) 1
```

```
(%o4) 1.570796326794897
```

```
(%o5) 5
```

```
(%o6) Jt(n):=ev $\left(\frac{b-a}{2n} \left( f(a)+f(b)+2 \sum_{i=1}^{n-1} \left( f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right) \right) \right), numer\right)$ 
```

```
(%o7) P(n):=ev $\left(\frac{|Jt(n)-Jt(2n)|}{2^2-1}, numer\right)$ 
```

```
(%o8) 0.4955661821417044
```

```
(%o9) 9.580511825193483 10-4
```

При $n=5$ приближенное значение интеграла по формуле трапеций равно 0.4955661821417044 с точностью $9.580511825193483 \cdot 10^{-4}$.

Формула Симпсона.

Запишем правую часть формулы парабол (3.9) как функцию от числа отрезков n . Так как $x_i = a + ih = a + \frac{b-a}{n}i$.
Найдем точность вычисления по формуле (3.13).

```

(%i9) f(x):= sin(x^2+0.2);
      numer : true;
      a: 1; b : %pi/2; k: 2;
      Js(n):=ev((b-a)/(6*n)*(f(a)+f(b)+4*sum(f(a+(b-a)/(2*n)*(2*i+1)), i, 0, n-1)+2*sum(f(a+(b-a)/(2*n)*(2*i)), i, 1, n-1)), numer);
      P(n):= ev(abs(Js(n)-Js(2*n))/(2^4-1), numer);
      Js(2*k);
      P(k);

(%o1) f(x):=sin(x^2+0.2)
(%o2) true
(%o3) 1
(%o4) 1.570796326794897
(%o5) 2

(%o6) Js(n):=ev\left(\frac{b-a}{6n}\left(f(a)+f(b)+4\sum_{i=0}^{n-1}\left(f\left(a+\frac{b-a}{2n}(2i+1)\right)\right)+2\sum_{i=1}^{n-1}\left(f\left(a+\frac{b-a}{2n}(2i)\right)\right)\right),numer\right)

(%o7) P(n):=ev\left(\frac{|Js(n)-Js(2n)|}{2^4-1},numer\right)

(%o8) 0.4965270391248789
(%o9) 4.725044233366837 10^-6

```

При $n = 2$ приближенное значение интеграла по формуле парабол равно 0.4965270391248789 с точностью $4.725044233366837 \cdot 10^{-6}$.

ЗАДАНИЕ 3

Задача 1. Найти интеграл $\int_a^b f(x)dx$ аналитически с помощью формулы Нью-

тона-Лейбница

Задача 2. Найти неопределенный интеграл с помощью программы wxMaxima.

	$f(x)$	$[a, b]$		$f(x)$	$[a, b]$
1	$\frac{1}{tg 2x + 1}$	[0.4; 0.8]	21	$xarctg(2x)$	[0,1; 0.3]
2	$\frac{\cos 3x}{(1 - \cos 3x)^2}$	[0.8; 1.6]	22	$e^{-x} \sin 2x$	[2; 2.4]
3	$\frac{1}{x\sqrt{x^3 + 4}}$	[0.18; 0.98]	23	$\frac{ctg 3x}{(\cos 3x)^2}$	[1.2; 1.4]
4	$\frac{\sin x}{1 + \sin x}$	[0.8; 1.6]	24	$\frac{3}{x\sqrt{3 - \ln^2 x}}$	[1.2; 1.6]

5	$\arctg(1+\sqrt{x})$	[0.1; 0.2]	25	$\arctg\sqrt{2x-1}$	[0.6; 1.4]
6	$x^2 \lg(x+2)$	[0; 0.4]	26	$(1+x)\sin x$	[1.4; 1.8]
7	$x^2 \arctg(x/3)$	[0.8; 1.6]	27	$\frac{\cos x}{1+\cos x}$	[3.6; 4]
8	$e^{2x} \sin 3x$	[0.4; 1.2]	28	$\frac{1}{2x\sqrt{2+\ln 2x}}$	[0.4; 1.4]
9	$\frac{\lg 2x}{(\sin 2x)^2}$	[0.8; 1.2]	29	$(2x-3)\cos x$	[0.4; 0.6]
10	$\frac{4}{x\sqrt{9-\ln^2(4x)}}$	[1.2; 1.4]	30	$\frac{1-x}{2-x}$	[1.2; 1.6]
11	$(2-x)\sin x$	[1; 1.5]	31	$\frac{2}{x\sqrt{3+\ln^2(2x)}}$	[1.2; 1.4]
12	$5x+x\lg x$	[0.2; 1]	32	$x^2 \lg(2-x)$	[1.4; 1.6]
13	$(2x+3)\sin x$	[0.4; 1.2]	33	$\frac{3}{x\sqrt{3+\ln 3x}}$	[0.4; 1]
14	$\sqrt{1+e^{-x}}$	[0.2; 0.6]	34	$\frac{\sin 2x}{(2+3\cos^2 x)^2}$	[-1; 0]
15	$(2x+5)\cos x$	[0.4; 1.2]	35	$\frac{1}{x^4\sqrt{x^2+1}}$	[0.4; 0.6]
16	$\frac{1}{1+x+x^2}$	[0; 4]	36	$x(2-\lg x)$	[1.2; 1.4]
17	$\arctg(1-\sqrt{x})$	[0.7; 0.9]	37	$\arctg\sqrt{3x-1}$	[0.4; 0.6]
18	$\frac{1+x}{2+x}$	[0.4; 0.8]	38	$\sqrt{1+e^x}$	[0.2; 0.6]
19	$\sqrt{1-e^{-x}}$	[1.4; 1.6]	39	$\frac{1}{5+2x+x^2}$	[-2.2; -1.2]
20	$\frac{1}{\sin^4 x}$	[0.5; 0.7]	40	$(3x+5)\cos x$	[1, 1.4]

Задача 3. Вычислить определённый интеграл с помощью программы wxMaxima.

Задача 4. Вычислить определённый интеграл посредством встроенной функции приближенного вычисления **quadpack**.

Задача 5. Вычислить определённый интеграл посредством встроенной функции приближенного вычисления **romberg**.

Задача 6. Вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$ методом левых прямоугольников.

Задача 7. Вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$ методом средних прямоугольников.

Задача 8. Вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$ методом правых прямоугольников.

Задача 9. Вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$ методом трапеций.

Задача 10. Вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$ методом Симпсона

Пример выполнения задания.

Зададим интеграл $\int_{-1}^0 (x^2 + 2x + 1) \sin(3x) dx$.

Задача 1. Вычислим непосредственно с помощью формулы Ньютона-

Лейбница определенный интеграл $\int_{-1}^0 (x^2 + 2x + 1) \sin 3x dx$

Для вычисления интеграла применим метод интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 (x^2 + 2x + 1) \sin 3x dx &= \left[\begin{array}{ll} u = x^2 + 2x + 1 & du = (2x + 2) dx \\ dv = \sin 3x dx & v = -\frac{1}{3} \cos 3x \end{array} \right] = \\ &= -\frac{1}{3} (x^2 + 2x + 1) \cdot \cos 3x \Big|_{-1}^0 - \left(-\frac{1}{3} \right) \int_{-1}^0 (2x + 2) \cos 3x dx = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \int_{-1}^0 (x + 1) \cos 3x dx = \\ &= \left[\begin{array}{ll} u = x + 1 & du = dx \\ dv = \cos 3x dx & v = \frac{1}{3} \sin 3x \end{array} \right] = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} (x + 1) \cdot \sin 3x \right) \Big|_{-1}^0 - \frac{1}{3} \int_{-1}^0 \sin 3x dx = \\ &= -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot 0 - \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3} \right) \cos 3x \Big|_{-1}^0 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{9} (1 - \cos 3) = -\frac{7}{27} - \frac{2}{27} \cos 3 \approx -0.18592648 \end{aligned}$$

Задача 2. Найдем неопределенный интеграл с помощью программы wxMaxima.

(%i1) integrate((x+1)^2·sin(3·x), x);

$$\frac{6 x \sin (3 x)+\left(2-9 x^2\right) \cos (3 x)}{9}+\frac{2(\sin (3 x)-3 x \cos (3 x))}{3}-\cos (3 x)$$

(%o1)

Задача 3. Вычислим определённый интеграл.

```
(%i1) integrate((x+1)^2*sin(3*x), x);
```

$$(\%o1) \frac{6x \sin(3x) + (2 - 9x^2) \cos(3x)}{9} + \frac{2(\sin(3x) - 3x \cos(3x))}{3} - \cos(3x)$$

```
→
```

```
(%i2) integrate((x+1)^2*sin(3*x), x, -1, 0);
```

$$(\%o2) -\frac{2 \cos(3)}{27} - \frac{7}{27}$$

Задача 4. Вычислим определённый интеграл посредством встроенной функции приближенного вычисления **quadpack**.

```
(%i1) integrate((x+1)^2*sin(3*x), x);
```

$$(\%o1) \frac{6x \sin(3x) + (2 - 9x^2) \cos(3x)}{9} + \frac{2(\sin(3x) - 3x \cos(3x))}{3} - \cos(3x)$$

```
→
```

```
(%i2) integrate((x+1)^2*sin(3*x), x, -1, 0);
```

$$(\%o2) -\frac{2 \cos(3)}{27} - \frac{7}{27}$$

```
(%i3) quad_qags((x+1)^2*sin(3*x), x, -1, 0);
```

$$(\%o3) [-0.1859264817333003, 2.064198609078587 \cdot 10^{-15}, 21, 0]$$

В ячейке вывода массив результата вычисления содержит:

-0.1859264817333003 – приближённое значение интеграла;

$2.064198609078587 \cdot 10^{-15}$ – относительная погрешность вычислений;

21 – число интервалов разбиения;

0 – признак корректности вычислений (0 – без проблем).

Задача 5. Вычислим определённый интеграл посредством встроенной функции приближенного вычисления **romberg(f(x), x, a, b);**

```
(%i1) integrate((x+1)^2*sin(3*x), x);
```

$$(\%o1) \frac{\frac{6x \sin(3x) + \left(2 - 9x^2\right) \cos(3x)}{9} + \frac{2(\sin(3x) - 3x \cos(3x))}{3} - \cos(3x)}{3}$$

→

```
(%i2) integrate((x+1)^2*sin(3*x), x, -1, 0);
```

$$(\%o2) -\frac{2 \cos(3)}{27} - \frac{7}{27}$$

```
⌈ (%i3) quad_qags((x+1)^2*sin(3*x), x, -1, 0);
```

$$\left[(\%o3) \left[-0.1859264817333003, 2.064198609078587 \cdot 10^{-15}, 21, 0 \right] \right]$$

```
(%i4) romberg((x+1)^2*sin(3*x), x, -1, 0);
```

$$(\%o4) -0.1859264653027625$$

Задача 6. Применим метод левых прямоугольников.

```
(%i6) f(x):= (x+1)^2·sin(3·x);
      numer : true;
      a: -1; b : 0;
      epsilon : 0.001;
      romberg(f(x), x, a, b);

(%o1) f(x):=(x+1)2 sin(3 x)
(%o2) true
(%o3) -1
(%o4) 0
(%o5) 0.001
(%o6) -0.1859264653027625

(%i12) JI(n):=ev((b-a)/n·sum(f(a+(b-a)/n·i), i, 0, n-1),numer);
      epsilon : 0.001;
      n : 1;while abs(JI(n)-JI(2·n)) > epsilon do n : n+1;
      n;
      JI(2·n);

(%o7) JI(n):=ev $\left(\frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(f\left(a+\frac{b-a}{n} i\right)\right), numer\right)$ 
(%o8) 0.001
(%o9) 1
(%o10) done
(%o11) 14
(%o12) -0.185607624168928
```

Задана точность вычислений $\varepsilon = 0.00$. Для определения количества отрезков разбиения, обеспечивающих заданную точность, был организован цикл. Получили $n = 14$, а результат вычисления интеграла: - 0.185607624168928.

Задача 7. Применим метод средних прямоугольников.

```
(%i9) f(x):= (x+1)^2·sin(3·x);
      numer : true;
      a: -1; b : 0; k: 35;
      Jc(n):=ev((b-a)/n·sum(f((a+(b-a)/n·i+a+(b-a)/n·(i+1))/2), i, 0, n-1), numer);
      P(n):= ev(abs(Jc(n)-Jc(2·n)),numer);
      Jc(2·k);
      P(k);
```

```
(%o1) f(x):=(x+1)2 sin(3 x)
```

```
(%o2) true
```

```
(%o3) -1
```

```
(%o4) 0
```

```
(%o5) 35
```

$$(\%o6) \quad Jc(n) := ev \left(\frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(f \left(\frac{a + \frac{b-a}{n} i + a + \frac{b-a}{n} (i+1)}{2} \right) \right), numer \right)$$

```
(%o7) P(n):=ev(|Jc(n)-Jc(2 n)|, numer)
```

```
(%o8) -0.1859519914907337
```

```
(%o9) 7.652390164653022 10-5
```

Интервал был разделен на 35 отрезков, точность

7.652390164653022*10⁻⁵, результат вычисления: -0.1859519914907337.

Для обеспечения заданной точности интервал был разделен на 35 отрезков.

Для определения числа отрезков, соответствующих точности 0.001, необходимо создать цикл.

Результат вычисления: -0.1859519914907337.

Точность 7.652390164653022*10⁻⁵.

Задача 8. Применим метод правых прямоугольников.

```
(%i9) f(x):= (x+1)^2·sin(3·x);
      numer : true;
      a: -1; b : 0; k: 70;
      Jp(n):=ev((b-a)/n·sum(f(a+(b-a)/n·i), i, 1, n), numer);
      P(n):= ev(abs(Jp(n)-Jp(2·n)),numer);
      Jp(2·k);
      P(k);
```

```
(%o1) f(x):=(x+1)2 sin(3 x)
```

```
(%o2) true
```

```
(%o3) -1
```

```
(%o4) 0
```

```
(%o5) 70
```

```
(%o6) 
$$Jp(n):=ev\left(\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n\left(f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)\right),numer\right)$$

```

```
(%o7) 
$$P(n):=ev(|Jp(n)-Jp(2n)|,numer)$$

```

```
(%o8) -0.1859137266631504
```

```
(%o9) 3.8264827583262 10-5
```

—

Для обеспечения заданной точности интервал был разделен на 70 отрезков. Для определения числа отрезков необходимо создать цикл.

Результат вычисления: -0.1859137266631504.

Точность $3.8264827583262 \cdot 10^{-5}$.

Задача 9. Применим метод трапеции.

```
(%i9) f(x):= (x+1)^2·sin(3·x);
      numer : true;
      a: -1; b : 0; k: 10;
      Jt(n):=ev((b-a)/(2·n)·(f(a)+f(b)+2·sum(f(a+(b-a)/n·i), i, 1, n-1)), numer);
      P(n):= ev(abs(Jt(n)-Jt(2·n))/(2^2-1),numer);
      Jt(2·k);
      P(k);

(%o1) f(x):=(x+1)^2 sin(3 x)
(%o2) true
(%o3) -1
(%o4) 0
(%o5) 10

(%o6) Jt(n):=ev\left(\frac{b-a}{2n}\left(f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1}\left(f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)\right)\right),numer\right)

(%o7) P(n):=ev\left(\frac{|Jt(n)-Jt(2n)|}{2^2-1},numer\right)

(%o8) -0.1853015587248992
(%o9) 6.246081200169395 10^-4
```

Для обеспечения заданной точности интервал был разделен на 10 отрезков. Для определения числа отрезков необходимо создать цикл.

Результат вычисления: -0.1853015587248992.

Точность $6.246081200169395 \cdot 10^{-4}$.

Задача 10. Применим метод Симпсона.

```
(%i9) f(x):=(x+1)^2*sin(3*x);
      numer : true;
      a: -1; b: 0; k: 2;
      Js(n):=ev((b-a)/(6*n)*(f(a)+f(b)+4*sum(f(a+(b-a)/(2*n)*(2*i+1)), i, 0, n-1)+2*sum(f(a+(b-a)/(2*n)*(2*i)), i, 1, n-1)), numer);
      P(n):= ev(abs(Js(n)-Js(2*n))/(2^4-1),numer);
      Js(2*k);
      P(k);

(%o1) f(x):=(x+1)^2 sin(3 x)
(%o2) true
(%o3) -1
(%o4) 0
(%o5) 2

(%o6) Js(n):=ev\left(\frac{b-a}{6n}\left(f(a)+f(b)+4\sum_{i=0}^{n-1}\left(f\left(a+\frac{b-a}{2n}(2i+1)\right)\right)+2\sum_{i=1}^{n-1}\left(f\left(a+\frac{b-a}{2n}(2i)\right)\right)\right),numer\right)

(%o7) P(n):=ev\left(\frac{|Js(n)-Js(2n)|}{2^4-1},numer\right)

(%o8) -0.1859123439526545
(%o9) 2.219513808524957 10^-5
```

Для обеспечения заданной точности интервал был разделен на 2 отрезка. Для определения числа отрезков необходимо создать цикл.

Результат вычисления: -0.1859123439526545.

Точность $2.219513808524957 \cdot 10^{-5}$.

4. Приближенное вычисление несобственных интегралов

К несобственным интегралам относятся интегралы, которые имеют хотя бы один бесконечный предел интегрирования или подынтегральную функцию, имеющую разрыв второго рода – обращающуюся в бесконечность хотя бы в одной точке отрезка интегрирования.

4.1. Интегралы от разрывных функций

1. Если подынтегральная функция в некоторых внутренних точках c_i ($i=1,2,..$) отрезка интегрирования $[a,b]$ имеет **разрыв первого рода** (скачок), то интеграл следует вычислять для каждого участка непрерывности отдельно, а результаты складывать. Например, в случае одной точки разрыва первого рода типа скачка (рис. 6) $x=c$ ($a < c < b$) имеем

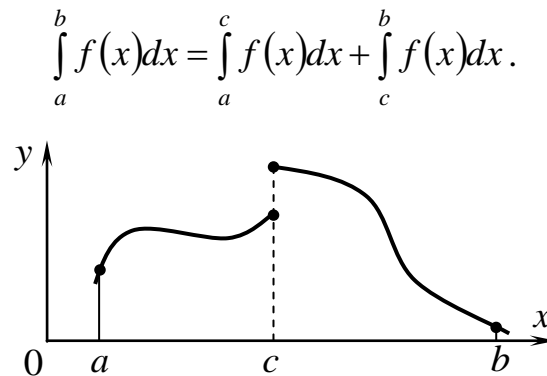


Рис. 6. Пример функции, имеющей разрыв первого рода в точке $x=c$.

Для вычисления каждого из интегралов в правой части полученного равенства можно использовать любой из рассмотренных в данной главе методов.

2. Если подынтегральная функция имеет **разрыв второго рода** (бесконечный) в некоторой внутренней точке c отрезка интегрирования $[a,b]$, тогда по определению полагают

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\delta_1 \rightarrow 0 \\ \delta_2 \rightarrow 0}} \left(\int_a^{c-\delta_1} f(x)dx + \int_{c+\delta_2}^b f(x)dx \right) \quad (4.1)$$

На отрезках $[a, c-\delta_1]$ и $[c+\delta_2, b]$ подынтегральная функция не имеет особенностей (рис. 6) и соответствующие интегралы

$$S_1 = \int_a^{c-\delta_1} f(x)dx, \quad S_2 = \int_{c+\delta_2}^b f(x)dx$$

могут быть вычислены с помощью любого из рассмотренных выше методов с точностью до $\frac{\varepsilon}{4}$ каждый.

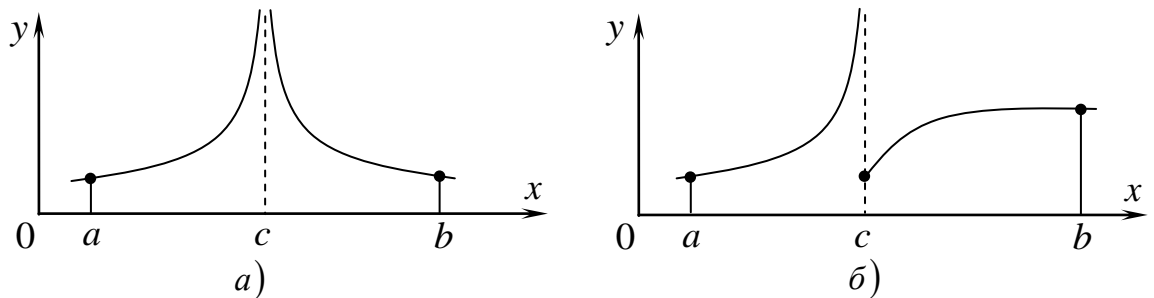


Рис. 7. Подынтегральная функция обращается в бесконечность в некоторой точке отрезка интегрирования:
а) с двух сторон от нее; б) с одной стороны от нее.

Для приближенного вычисления **сходящегося** несобственного интеграла с заданной точностью ε выбирают положительные числа δ_1 и δ_2 столь малыми, чтобы имело место неравенство

$$\left| \int_{c-\delta_1}^{c+\delta_2} f(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.2)$$

Тогда $\int_a^b f(x) dx \approx S_1 + S_2$ с точностью до ε .

Если точка разрыва подынтегральной функции является **концевой** для отрезка интегрирования $[a, b]$, то методика вычисления интеграла очевидным образом видоизменяется.

4.2. Интегралы с бесконечными пределами

Рассмотрим интеграл с бесконечной границей интегрирования, например $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. По определению $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x)dx$

Один из универсальных способов вычисления подобных интегралов заключается в их представлении в виде суммы двух интегралов:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^A f(x)dx + \int_A^{+\infty} f(x)dx,$$

где A – некоторое большое положительное число, рис. 8.

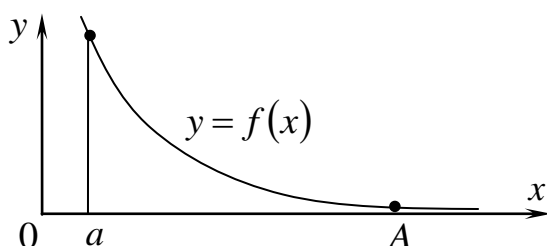


Рис. 8. Иллюстрация вычисления интеграла с бесконечной границей интегрирования.

Вычисление первого интеграла на конечном отрезке $[a, A]$ не вызывает затруднений. Он может быть вычислен с помощью любого из рассмотренных выше методов с точностью до $\frac{\varepsilon}{2}$.

Выбор числа A производят таким образом, чтобы $\int_A^{+\infty} f(x)dx < \frac{\varepsilon}{2}$.

Замечание. В некоторых случаях при вычислении несобственных интегралов подходящая замена переменной интегрирования позволяет вообще избавиться от рассмотренных выше особенностей. Так, например, при вычислении интеграла $I = \int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$ имеется особенность в точке $x=0$, где подынтегральная функция обращается в бесконечность. С помощью замены переменной $x = t^2$ ($dx = 2tdt$) приходим к интегралу

$$I = 2 \int_0^1 \cos t^2 dt,$$

который не имеет особенностей и вычисляется с требуемой точностью с

применением любого из рассмотренных в данной главе методов.

ЗАДАНИЕ 4

Задача 1. Представить интеграл в виде суммы двух интегралов. Найти пределы интегрирования, позволяющие вычислить интеграл с точностью до $\varepsilon = 0.005$ для нечетных вариантов, до $\varepsilon = 0.0001$ для четных вариантов.

Задача 2. Вычислить несобственный интеграл приближенно.

Задача 3. Проверить результат вычислений с помощью встроенных функций программы wxMaxima.

1	$\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{2-x}} dx$	21	$\int_0^2 \frac{x}{\sqrt[3]{8-x^3}} dx$
2	$\int_1^{+\infty} \frac{\arctg x}{x(2+x)} dx$	22	$\int_1^{+\infty} \frac{\arctg x}{\sqrt{x^5}} dx$
3	$\int_0^1 \frac{\sqrt{x^3+3}}{\sqrt[3]{x}} dx$	23	$\int_2^3 \frac{2x-1}{\sqrt[4]{x-2}} dx$
4	$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^{3x} x^3}$	24	$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x^3)}$
5	$\int_0^1 \frac{3-x^2}{\sqrt{1-x}} dx$	25	$\int_1^3 \frac{x}{\sqrt{3-x}} dx$
6	$\int_1^{+\infty} \frac{\arctg x}{\sqrt{1+x^3}} dx$	26	$\int_1^{+\infty} \frac{\arctg x}{x^2(1+x)} dx$
7	$\int_1^2 \frac{x^2}{\sqrt{x-1}} dx$	27	$\int_{-1}^0 \frac{x^2+1}{\sqrt{1+x}} dx$
8	$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^5+x+1}}$	28	$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^x x \sqrt{x}}$
9	$\int_{-1}^0 \frac{\sqrt{4+x+x^2}}{\sqrt[5]{x^2}} dx$	29	$\int_0^1 \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x^3}} dx$
10	$\int_1^{+\infty} \frac{\arctg x}{x \cdot \sqrt[3]{x^2}} dx$	30	$\int_1^{+\infty} \frac{\arctg x}{x^3 \sqrt{x}} dx$

11	$\int_{-1}^1 \frac{x^2 + 2}{\sqrt[3]{x+1}} dx$	31	$\int_1^2 \frac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[4]{x^2-1}} dx$
12	$\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 + 2 + x^3} dx$	32	$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^5 + x^{10} + 1}}$
13	$\int_1^2 \frac{\sqrt[3]{x^2 + 4}}{\sqrt{2-x}} dx$	33	$\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(2-x)}}$
14	$\int_1^{+\infty} \frac{\arctg x}{x(1+x^2)} dx$	34	$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^{2x} x^2}$
15	$\int_0^2 \frac{x+2}{\sqrt[4]{x^3}} dx$	35	$\int_1^{1.5} \frac{dx}{\sqrt{x^3-1}}$
16	$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^{4x} x^4}$	36	$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 \sqrt{x+1}}$
17	$\int_0^1 \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}} dx$	37	$\int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4-x^2}} dx$
18	$\int_1^{+\infty} \frac{\arctg 2x}{\sqrt{4+x^4}} dx$	38	$\int_1^{+\infty} \frac{x \arctg x}{2+x^3} dx$
19	$\int_0^{1.5} \frac{dx}{\sqrt[3]{x(2-x)}}$	39	$\int_0^{0.5} \frac{dx}{\sqrt[4]{x(2-x)}}$
20	$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot \sqrt[3]{x^2+2}}$	40	$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+2+x^3} dx$

Примеры решения задач с несобственными интегралами.

Пример 1. Подобрать число A так, чтобы интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ можно было вычислить с помощью разбиения на два слагаемых приближенно с точностью до $\varepsilon = 0.0001$.

Из неравенства $x^2 - 2Ax + A^2 = (x - A)^2 \geq 0$ следует $x^2 \geq 2Ax - A^2$.

Тогда

$$\int_A^{+\infty} e^{-x^2} dx \leq \int_A^{+\infty} e^{-2Ax + A^2} dx = e^{A^2} \int_A^{+\infty} e^{-2Ax} dx = e^{A^2} \cdot \left. \frac{e^{-2Ax}}{-2A} \right|_A^{+\infty} = e^{A^2} \cdot \frac{e^{-2A^2}}{2A} = \frac{e^{-A^2}}{2A}.$$

Легко проверить, что $\frac{e^{-3^2}}{2 \cdot 3} < 0.00005 = \frac{\varepsilon}{2}$.

Очевидно, что достаточно взять $A = 3$.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^3 e^{-x^2} dx + \int_3^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Пример 2. Вычислить с помощью метода трапеций (или другого выше рассмотренного метода) определенный интеграл $\int_0^3 e^{-x^2} dx$ приближенно с точностью до $\varepsilon = 0.0001$.

```

(%i6) f(x):= %e^(-x^2);
      numer : true;
      a: 0; b : 3;
      epsilon : 0.001;
      romberg(f(x), x, a, b);

(%o1) f(x):=%e-x2
(%o2) true
(%o3) 0
(%o4) 3
(%o5) 0.001
(%o6) 0.8862073787163405

⌈ (%i12) Jt(n):=ev((b-a)/(2·n)·(f(a)+f(b)+2·sum(f(a+(b-a)/n·i), i, 1, n-1)), numer);
      epsilon : 0.001;
      n : 1; while abs(Jt(n)-Jt(2·n))/(2^2-1) > epsilon do n : n+1;
      n;
      Jt(2·n);

-
(%o7) Jt(n):=ev $\left(\frac{b-a}{2n}\left(f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1}\left(f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)\right)\right),numer\right)$ 

(%o8) 0.001
(%o9) 1
(%o10) done
(%o11) 3
(%o12) 0.8861936233658585

```

Результат вычисления: 0.8861936233658585.

Отрезок интегрирования был разбит на 3 части.

Пример 3. Вычислить интеграл $\int_0^3 e^{-x^2} dx$ с помощью встроенной функции romberg.

```

(%i1) romberg(%e^(-x^2), x, 0, 3);
(%o1) 0.8862073787163405

```

Пример 4. Интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ вычислить приближенно с помощью встроенного пакета quadpack.

```
(%i1) f(x):= %e^(-x^2);
(%o1) f(x):=%e-x2
(%i2) quad_qagi( %e^(-x^2), x, 0, inf);
(%o2) [0.8862269254527579, 7.101318390472462 10-9, 135, 0]
```

В ячейке вывода массив результата вычисления содержит:

0.8862269254527579 – приближённое значение интеграла;

$7.101318390472462 \cdot 10^{-9}$ – относительная погрешность вычислений;

135 – число интервалов разбиения;

0 – признак корректности вычислений (0 – без проблем).

Пример 5. Найти такое положительное число δ , чтобы интеграл

$\int_0^{0.5} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ можно было вычислить с помощью разбиения на два слагаемых

приближенно с точностью до $\varepsilon = 0.005$.

Точкой бесконечного разрыва подынтегральной функции является концевая точка $x=0$. Найдем искомое значение δ , для которого выполняется неравенство (4.2) для левого конца:

$$\left| \int_0^{\delta} f(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.3)$$

Так как $\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}$ при $x \in (0; 0.5]$, то

$$\int_0^{\delta} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} \leq \sqrt{2} \int_0^{\delta} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{x} \Big|_0^{\delta} = 2\sqrt{2}\sqrt{\delta}.$$

Тогда для выполнения неравенства (4.3) необходимо, чтобы $\delta = \frac{\varepsilon^2}{32}$.

Возьмём $\varepsilon = 0.005$, значит, $\delta = 0.00000078125$.

$$\int_0^{0.5} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int_0^{0.00000078125} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} + \int_{0.00000078125}^{0.5} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

Пример 6. Вычислить с помощью метода средних прямоугольников (или другого выше рассмотренного) определенный интеграл $\int_{0.00000078125}^{0.5} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ приближенно с точностью до $\varepsilon = 0.005$.

```
(%i11) f(x):= 1/sqrt(x*(1-x));
      numer : true;
      epsilon : 0.005;
      a: (epsilon^2)/32; b : 0.5;
      Jc(n):=ev((b-a)/n*sum(f((a+(b-a)/n*i+a+(b-a)/n*(i+1))/2), i, 0, n-1), numer);
      n : 1;while abs(Jc(n)-Jc(2*n)) > epsilon do n : n+1;
      n;
      Jc(2*n);
      epsilon;
```

(%o1) $f(x) := \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$

(%o2) true

(%o3) 0.005

(%o4) $7.8125 \cdot 10^{-7}$

(%o5) 0.5

(%o6) $Jc(n) := ev \left(\frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(f \left(\frac{a + \frac{b-a}{n}i + a + \frac{b-a}{n}(i+1)}{2} \right) \right), numer \right)$

(%o7) 1

(%o8) done

(%o9) 621

(%o10) 1.558566890295938

(%o11) 0.005

Отрезок интегрирования был разделен на 621 часть. Результат вычисления 1.558566890295938.

Пример 7. Интеграл $\int_0^{0.5} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ вычислить приближенно с помощью встроенной функции.

Проинтегрировать несобственный интеграл с помощью встроенной функции **romberg** невозможно. Применим встроенный пакет вычислений **quadpack**.

```
(%i2) quad_qags(1/sqrt(x*(1-x)), x, 0, 0.5);
(%o2) [1.570796326794895, 5.454703355667334 10-11, 315, 0]

(%i3) integrate(1/sqrt(x*(1-x)), x);
(%o3) asin(2 x - 1)

(%i4) limit(asin(2*0.5-1)-asin(2*x-1), x, 0);
(%o4) 0.5 π

(%i6) numer:true$
      %pi/2;
(%o6) 1.570796326794897
```

В ячейке вывода массив результата вычисления содержит:

1.570796326794895— приближённое значение интеграла;
 5.454703355667334*10⁻¹¹— относительная погрешность вычислений;
 315 — число интервалов разбиения;
 0 — признак корректности вычислений (0 — без проблем).

ПРИЛОЖЕНИЕ.

Возможности пакета wxMaxima.

Достоинства программы

Основными преимуществами программы **Maxima** являются:

- возможность свободного использования (**Maxima** относится к классу свободных программ и распространяется на основе лицензии GNU);
- возможность функционирования под управлением различных ОС (в частности **Linux** и **Windows™**);
- небольшой размер программы (дистрибутив занимает порядка 23 мегабайт, в установленном виде со всеми расширениями потребуется около 80 мегабайт);
- широкий класс решаемых задач;
- возможность работы как в консольной версии программы, так и с использованием одного из графических интерфейсов (**xMaxima**, **wxMaxima** или как плагин (*plug-in*) к редактору **TexMacs**);
- расширение **wxMaxima** (входящее в комплект поставки) предоставляет пользователю удобный и понятный интерфейс, избавляет от необходимости изучать особенности ввода команд для решения типовых задач;
- интерфейс программы на русском языке;
- наличие справки и инструкций по работе с программой (русскоязычной версии справки нет, но в сети Интернет присутствует большое количество статей с примерами использования **Maxima**);

Установка и запуск программы

Скачать последнюю версию программы можно с её сайта в сети Интернет: <http://maxima.sourceforge.net/>. Русская локализация сайта: <http://maxima.sourceforge.net/ru/>.

Система компьютерной алгебры **Maxima** присутствует в большинстве дистрибутивов, однако зачастую в списке дополнительных программ, которые можно скачать в Интернете в версии для данного дистрибутива.

Интерфейс wxMaxima

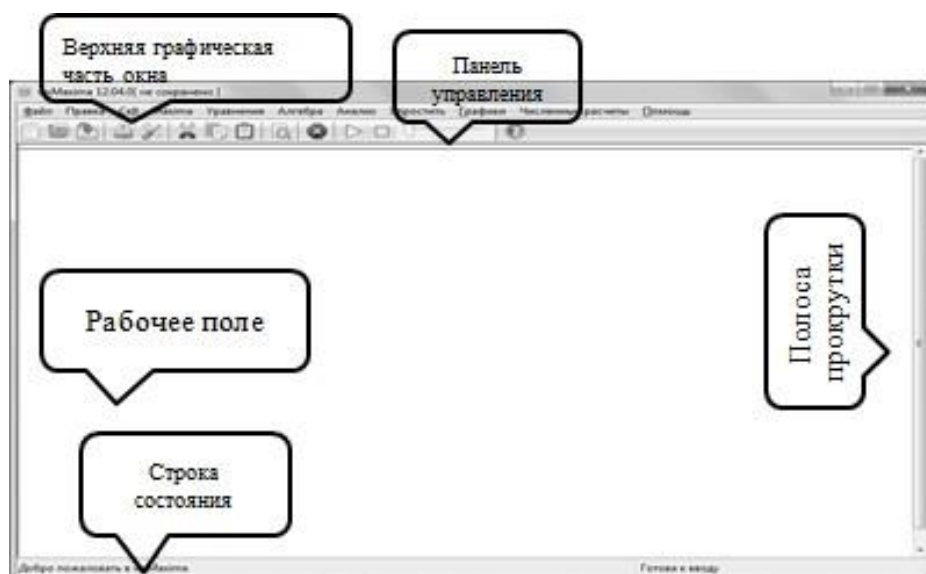
Для удобства работы сразу обратимся к графическому интерфейсу **wxMaxima**, т. к. он является наиболее дружелюбным для начинающих пользователей системы.

Достоинствами **wxMaxima** являются:

- возможность графического вывода формул (см. иллюстрации ниже)
- упрощённый ввод наиболее часто используемых функций (через диалоговые окна), а не набор команд, как в классической **Maxima**.
- разделение окна ввода данных и области вывода результатов (в классической **Maxima** эти области объединены, и ввод команд происходит в единой рабочей области с полученными результатами).

Функции и команды программы wxMaxima.

В верхней графической части окна интерфейса **wxMaxima** демонстрируется версия загруженной программы. Ниже расположена панель управления, содержащая следующие команды: файл, правка, cell, maxima, уравнения, алгебра, анализ, упростить, графики, численные расчеты и помощь. Далее расположено рабочее поле, ниже строка состояния.



В *Maxima* для ввода функций и команд существует два способа. Первый способ: в панели управления выбираем нужную команду и вводим пример. Ввод команд через диалоговые окна упрощает работу с программой для новичков. Второй способ заключается в следующем: ставим курсор в рабочее поле набираем нужную команду или фикцию. Но таким способом мы решаем, если знаем «название» функции или команды. Разделяются функции и команды символом «;» (*точка с запятой*).

При использовании интерфейса *Maxima*, можно выделить в окне вывода результатов необходимую формулу и, вызвав контекстное меню правой кнопкой мыши, скопировать любую формулу в текстовом виде или в виде графического изображения, для последующей вставки в какой-либо документ.

После ввода команды необходимо нажать Enter для ее обработки и вывода результата.

Завершение ввода \$ (вместо точки с запятой) позволяет вычислить результат введенной команды, но не выводить его на экран. В случае, когда выражение надо отобразить, а не вычислить, перед ним необходимо поставить знак «'» (*одинарная кавычка*).

Две одинарные кавычки последовательно, примененные к выражению во входной строке, приводят к замещению входной строки результатом вычисления выражения.

Обозначение арифметических операций в Махіта ничем не отличается от классического представления: + , - , * , /. Возведение в степень можно обозначать несколькими способами: ^ , **. Извлечение корня степени n записываем, как степень 1/n. Операция нахождение факториала обозначается восклицательным знаком, например 5!. Для увеличения приоритета операции, как и в математике, используются круглые скобки: ().

Список основных арифметических и логических операторов приведен в таблицах ниже.

Таблица 1. Арифметические операторы

Обозначение	Оператор
+	оператор сложения
-	оператор вычитания или изменения знака
/	оператор деления
*	оператор умножения
^ или **	оператор возведения в степень

Таблица 2. Логические операторы

Обозначение	Оператор
<	оператор сравнения меньше
>	оператор сравнения больше
<=	оператор сравнения меньше или равно
>=	оператор сравнения больше или равно
#	оператор сравнения не равно
=	оператор сравнения равно
and	логический оператор и
or	логический оператор или
not	логический оператор не

В Махіта для удобства вычислений имеется ряд встроенных констант. Самые распространенные из них показаны в следующей таблице 3.

Таблица 3. Основные константы

Название	Обозначение Maxima
слева (в отношении пределов)	minus
справа (в отношении пределов)	plus
минус бесконечность	minf
плюс бесконечность	inf
е (экспонента)	%e
число π	%pi
Мнимая единица $\sqrt{-1}$	%i
Истина	true
Ложь	false

Для хранения результатов промежуточных расчетов применяются переменные. Заметим, что при вводе названий переменных, функций и констант важен регистр букв, так переменные x и X - две разные переменные. Присваивание значения переменной осуществляется с использованием символа «:» (двоеточие), например $x:5$.

Если необходимо удалить значение переменной (очистить ее), то применяется метод `kill`: `kill(x)` - удалить значение переменной x ; `kill(all)` - удалить значения всех используемых ранее переменных.

Зарезервированные слова, использование которых в качестве имен переменных вызывает синтаксическую ошибку: *Integrate, next from, diff, in, at, limit, sum, for, and, elseif, then, else, do, or, if, unless, product, while, thru, step*.

После ввода, каждой команде присваивается порядковый номер и обозначаются соответственно (%i1), (%i2) и т.д. Результат вычисления также имеет порядковый номер, например (%o1), (%o2) и т.д., где i — сокращение от англ. *input* (ввод), а o -англ. *output* (вывод). Этот механизм позволяет избежать в последующих вычислениях повторения полной записи уже выполненных команд, например (%i1)+(%i2) будет означать добавление к выражению первой команды — выражения второй и последующего вычисления результата. Также можно использовать и номера результатов вычислений,

например $(\%o1)*(\%o2)$. Для последней выполненной команды в Maxima есть специальное обозначение - %.

```
(%i1) 25+34*(125^(1/2)+88/2);
(%o1) 34(53/2+44)+25
```

Пример. Арифметические выражения вводятся в поле ввода.

После нажатия <Ctrl>+<R> получаем:

```
(%i6) 25+34*(125^(1/2)+88/2);
(%o6) 1901.131556174964
```

Если необходимо вычислить дробные выражения, то системы сама может привести выражения к общему знаменателю.

Например,

```
(%i18) 3/7+5/9-1/5;
(%o18)  $\frac{247}{315}$ 
```

Если значение нужно получить в виде десятичной дроби, то не забудьте воспользоваться панелью ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ выбрав команду float

```
(%i18) 3/7+5/9-1/5;
(%o18)  $\frac{247}{315}$ 

(%i19) float(%), numer;
(%o19) 0.78412698412698
```

Некоторые встроенные математические функции системы Maxima. Таблица 4.

Abs(x)	Модуль числа x
Sqrt(x)	Квадратный корень из x
Acos(x)	Арккосинус аргумента x
Acot(x)	Арккотангенс аргумента x
Asin(x)	Арсинус аргумента x
Atan(x)	Арктангенс аргумента x
Sin(x)	Синус аргумента x
Tan(x)	Тангенс аргумента x

$\text{Log}(x)$	Натуральный логарифм x
$\text{Exp}(x)$	Экспонента x

Команды построения графиков

Построение графиков осуществляет команда **plot2d** с аргументами в виде списка функций, координат и необязательных опций построения:

plot2d ([f1, f2], [x, xmin, xmax], [y, ymin, ymax], [опция 1], [опция 2], [и т.д.])

График выводится в новом окне средствами утилиты gnuplot. Чтобы построить нескольких графиков внутри документа wxMaxima, служит другая команда **wxplot2d** с теми же опциями.

Функции f могут быть:

- явными выражениями вида $f(x)$;
- зависящими от параметра вида $[parametric, x(t), y(t), [t, tmin, tmax]]$;
- дискретным набором точек $[discrete, point_list]$.

Графические возможности в Maxima реализованы посредством внешних программ. По умолчанию, построением графиков в Maxima занимается программа Gnuplot и разрабатываемый вместе с Maxima и идущий в ее же пакете Openmath.

Рассмотрим обзорно некоторые возможности системы для графической визуализации данных.

Для построения графиков на плоскости можно использовать команду plot2d: **plot2d(выражение, [символ, начало, конец])**, где выражение задает функцию, график которой нужно построить, символ — неизвестное, входящее в выражение, начало и конец задают отрезок оси X для построения графика, участок по оси Y выбирается автоматически, исходя из минимума и максимума функции на заданном промежутке. После вызова функции plot2d открывается окно Gnuplot graph с выполненным построением. График можно только масштабировать за счет изменения размеров окна. Также можно про-

смотреть координаты какой-либо точки графика функции. Чтобы построить в одной плоскости одновременно два графика (или больше), в функции `plot2d` следует вместо отдельного выражения указать их список.

С помощью команды `plot2d` можно строить графики параметрически заданных функций. Для этого используется список с ключевым словом `parametric`:

`plot2d([parametric, x-выражение, y-выражение, [переменная, начало, конец], [nticks, количество]])`.

Здесь `x-выражение` и `y-выражение` задают зависимость координат от параметра, то есть это две функции вида $x(t)$, $y(t)$, где t — переменная параметризации. Эта же переменная прописывается в следующем списке, параметры `начало`, `конец` задают отрезок, в пределах которого этот параметр будет изменяться. Последний аргумент-список, с ключевым словом `nticks`, задает количество точек, на которые будет разбит интервал изменения параметра при построении графика.

Кроме `parametric`, функция `plot2d` может выполнять построение графиков дискретных множеств (конечных наборов точек):

`plot2d([discrete, x-список, y-список])` и `plot2d([discrete, [x, y]-список])`.

Для выполнения построений дополнительно в системе Maxima есть пакет `Draw` (загружается пакет с помощью команды `load(draw)`), в который, в частности, входит функция:

`draw2d (опции, explicit(имя_функции, независимая_переменная, min, max), опции)` — функция, предназначенная для построения графиков на плоскости с применением большого количества дополнительных опций:

- **`xrange, yrange`** — установлены по умолчанию — определяют промежуток изменения значений переменной по осям Ox и Oy . В случае необходимости, можно изменять значений вручную. Например, `xrange=[-2, 3]`;

- **`grid`** — в случае, если `grid = true`, на координатной плоскости выводятся линии сетки;

- **title** — позволяет выводить заголовок к графику функции. Например, `title = "Exponential function";`

- **xlabel, ylabel** — позволяют выводить подписи к осям. Например, `ylabel = "Population";`

- **xticks, ytics** — позволяют устанавливать цену деления по осям Ox и Oy , с которой будут наноситься метки на оси. Имеет значение по умолчанию, однако их действием можно управлять вручную. Например, можно задать, чтобы метки по оси Ox наносились на промежутке от -3 до 3 с шагом 0,2: `xticks = [-3, 0.2, 3]`. Также можно указать, в каком виде выводить подписи к осям (см. пример 6);

- **xaxis, yaxis** — в случае, если значения этих опций равны `true`, координатные оси выводятся на экран;

- **xaxis_width, yaxis_width** — ширина координатных осей (по умолчанию ширина равна 1). Для изменения толщины оси необходимо изменить значение по умолчанию вручную, например, `xaxis_width=3`;

- **xaxis_type, yaxis_type** — стиль линии осей Ox и Oy . Допустимые значения: `solid` и `dots`;

- **xaxis_color, yaxis_color** — цвет координатных осей (по умолчанию — черный). Для изменения цвета оси необходимо изменить значение опции вручную, например, `xaxis_color = red`;

- **color** — позволяет изменять цвет графика. Например, `color= «red»` (задается до слова `explicit`);

- **line_width** - позволяет изменять толщину линии графика функции (значение по умолчанию — 1);

- **line_type** — позволяет изменять стиль линии графика функции. Допустимые значения: `solid` и `dots` и др.

В системе Maxima есть возможность выполнять построение различных графических примитивов, например:

polygon ([[x1,y1], [x2,y2],...]) — построение замкнутой ломаной линии, соединяющей точки с координатами [x1,y1], [x2,y2], ... С помощью опции fill_color можно заливать фигуру выбранным цветом;

points ([[x1,y1], [x2,y2],...]) — построение точек с координатами [x1,y1], [x2,y2], ... Опция point_type позволяет выбрать стиль точки, например, окружность: point_type= circle. Опция point_size позволяет установить размер точки, например, point_size = 3. Опция key позволяет выполнять подписи к точкам;

rectangle ([x1,y1], [x2,y2]) — построение прямоугольника, где [x1,y1], [x2,y2] — координаты противоположащих углов;

bars ([x1,h1,w1], [x2,h2,w2, ...]) — построение столбиковых диаграмм. Здесь x1, x2, ... - точки, относительно которых центрируется столбик, h1, h2, ... - высота столбиков, w1, w2, ... - ширина столбиков;

ellipse (xc, yc, a, b, ang1, ang2) — построение эллипса с центром в точке (xc, yc).

В системе Maxima есть встроенная функция для построения графиков функций, заданных неявно. Ее синтаксис:

implicit_plot (expr, x_range, y_range)

implicit_plot ([expr_1, ..., expr_n], x_range, y_range)

где expr — уравнение, задающее неявную функцию, x_range и y_range — промежутки изменения переменных x и y.

Для того, чтобы можно было использовать функцию implicit_plot, необходимо подключить пакет, содержащий эту функцию, с помощью команды load(implicit_plot).

Кроме того, в системе Maxima можно воспользоваться встроенными функциями для построения графиков в различных системах координат.

Например, функция

polar (radius, ang, minang, maxang)

выполняет построение графика функции $\text{radius}(\text{ang})$, заданной в полярной системе координат, аргумента ang , меняющего значения от minang до maxang .

Построение графиков функций

Название графика задается командой *gnuplot* внутри опции *gnupot_preamble*. Команды *gnuplot* пишутся внутри общих кавычек и отделяются друг от друга точкой с запятой:

[*gnuplot_preamble*, "set title 'имя графика' ; "];

Названия осей [*xlabel*, "имя для оси x"], [*ylabel*, "имя для оси y"];

Подписи кривых (легенда) [*legend*, "кривая 1", "кривая 2", "и т. д."].

Легенда выводится в правом верхнем углу, изменить её положение можно командой *gnuplot set key*:

set key bottom — внизу;

set key top left — вверху слева;

set key bottom center outside — внизу по центру за пределами графика.

Шкалы и линии сетки можно менять при помощи следующих команд *gnuplot*:

set grid — отображает сетку;

set grid polar df — задает радиальную сетку в полярной системе координат, *df* угол между ее линиями в радианах;

set xtics dx; set ytics dy — указание шага между основными линиями сетки (по *x* шаг=*dx*, по *y* шаг=*dy*);

set border 3; set xtics nomirror — убирает отражение оси *x* сверху;

set mxtics n — разбивает основные деления шкалы по оси *x* на *n* интервалов;

set size ratio m — рисует размер оси *y* в *m* раз больше размера оси *x*;

set log x; set log y — отображает шкалы на оси координат в логарифмическом масштабе.

Явная функция в прямоугольных координатах

Пример. Построим графики некоторых специальных функций: интегрального косинуса $Ci(x)$, интегрального синуса $Si(x)$, функции ошибок $erf(x)$ и дополнительной функции ошибок $erfc(x)$:

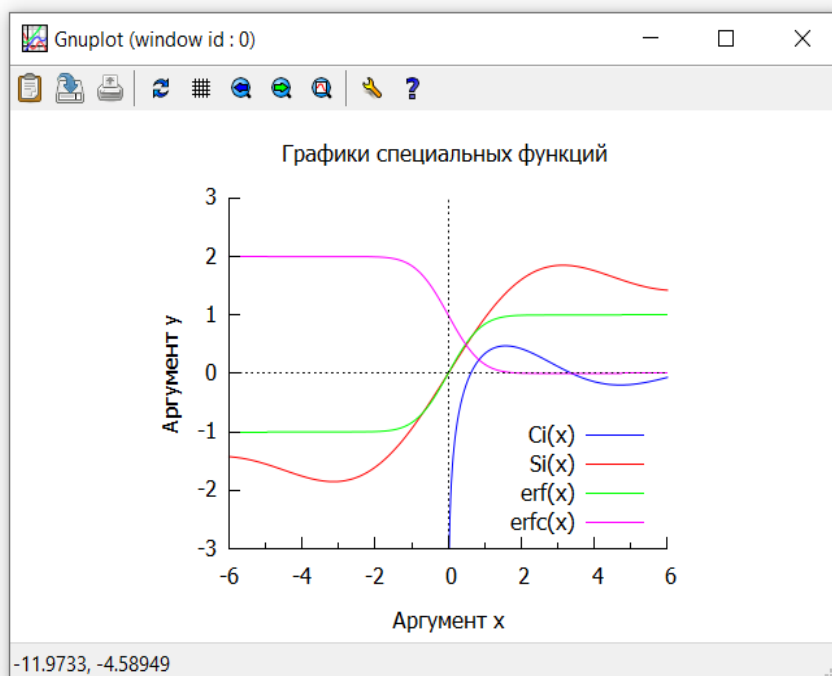
```
(%i1) plot2d([expintegral_ci(x), expintegral_si(x), erf(x), erfc(x)], [x,-6,6], [y,-3,3],  
[gnuplot_preamble, "set grid; set title 'Графики специальных функций';  
set key bottom; set border 3; set xtics nomirror; set ytics nomirror; set mxtics 2; "  
, [xlabel, "Аргумент x"], [ylabel, "Аргумент y"], [legend, "Ci(x)",  
"Si(x)", "erf(x)", "erfc(x)"]];
```

expintegral_ci: expintegral_ci(0.0) is undefined.

plot2d: expression evaluates to non-numeric value somewhere in plotting range.

plot2d: some values will be clipped.

(%o1) **false**



Стили графиков

Кривые можно строить в виде линий **lines**, линий с точками **linespoints** и точек **points**. Цвета могут задаваться словесно или кодом согласно таблице:

Синий	Красный	Зеленый	Пурпурный	Черный	Голубой
blue	red	green	magenta	black	cyan
1	2	3	4	5	6

Тип точек также может задаваться словесно или кодом:

●	○	+	X	*	■	□
bullet	circle	plus	times	asterisk	box	square
1	2	3	4	5	6	7

▲	△	▼	▽	◆	◇
triangle	delta	wedge	nabla	diamond	lozenge
8	9	10	11	12	13

Стиль кривой можно задавать словесно через последовательность опций `color`, `style`, `point_type` либо кратко при помощи кодовых параметров.

Пример. `[color, red, black]`, `[style, lines, points]`, `[point_type, plus]`.

Линии имеют 2 параметра — толщина, цвет.

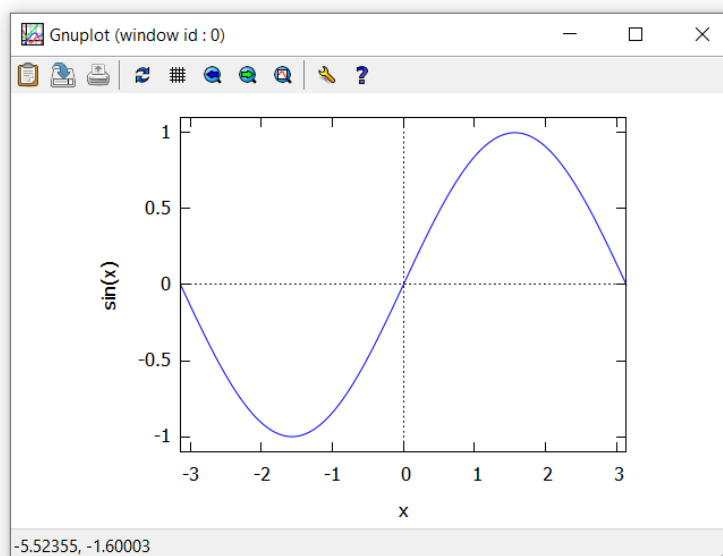
У точки 3 параметра — размер, цвет, тип точки.

У линий с точками 4 параметра — толщина линии, размер точки, цвет, тип точки.

Тот же пример: `[style, [lines,1,2], [points, 3, 5, 3]]`.

Пример. График функции $\sin(x)$:

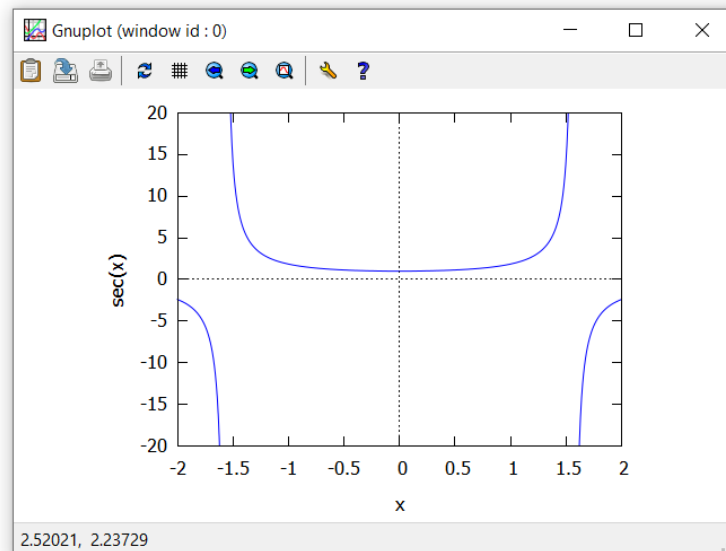
```
(%i1) plot2d(sin(x), [x,-%pi,%pi]);
(%o1) false
```



Если функция возрастает слишком быстро, может понадобиться ограничить значения по вертикальной оси, используя опцию `y`:

Пример.

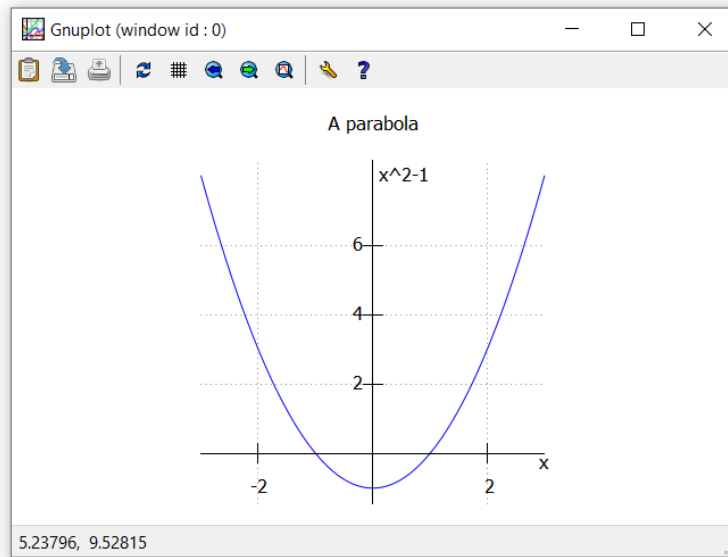
```
(%i1) plot2d(sec(x), [x,-2,2], [y,-20,20]);  
plot2d: some values will be clipped.  
(%o1) false
```



Если вывод обрамления графика отключён, то на осях не создаются подписи. В этом случае вместо использования `xlabel` и `ylabel` для настройки имён осей, лучше использовать опцию `label`, которая добавляет гибкости. Опция `ux_ratio` используется для изменения прямоугольной формы графика по умолчанию; в этом примере график будет заполнять квадрат.

Пример.

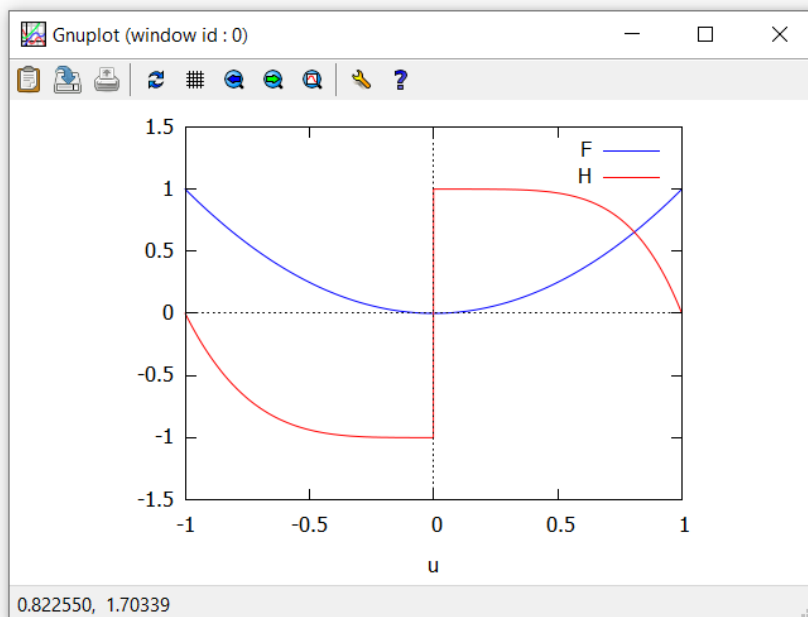
```
(%i1) plot2d (x^2-1, [x,-3,3], [box, false], grid2d, [yx_ratio, 1], [axes, solid], [xtics, -2,4,2], [ytics, 2,2,6],
[label, ["x", 2.9, -0.3], ["x^2-1", 0.1, 8]], [title, "A parabola"]);
(%o1) false
```



Черчение функции по имени:

Пример.

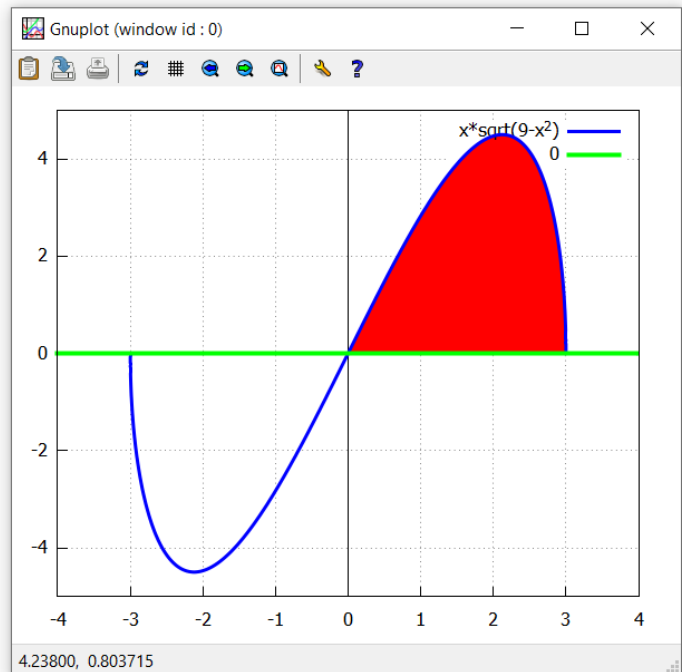
```
(%i4) F(x) := x^2;
      H(x) := if x<0 then x^4-1 else 1-x^5$
      plot2d ([F, H], [u, -1, 1], [y, -1.5, 1.5])$
(%o2) F(x) := x^2
```



Пример.

Построим область, ограниченную графиками $y = x\sqrt{9-x^2}$, $y = 0$ ($0 \leq x \leq 3$)

```
(%i6) f(x) := x*sqrt(9-x^2);  
g(x) := 0;  
draw2d(xrange = [-4, 4], yrange = [-5, 5], grid = true, xaxis = true, yaxis = true,  
xaxis_type = solid, yaxis_type = solid, fill_color = red,  
filled_func = g(x), explicit(f(x), x, 0, 3), filled_func = false,  
key = f(x), line_width = 3, color = blue, explicit(f(x), x, -3, 3),  
key = g(x), line_width = 4, color = green, explicit(g(x), x, -4, 4));  
(%o4) f(x):=x*sqrt(9-x^2)  
(%o5) g(x):=0  
(%o6) [gr2d(explicit,explicit,explicit)]
```



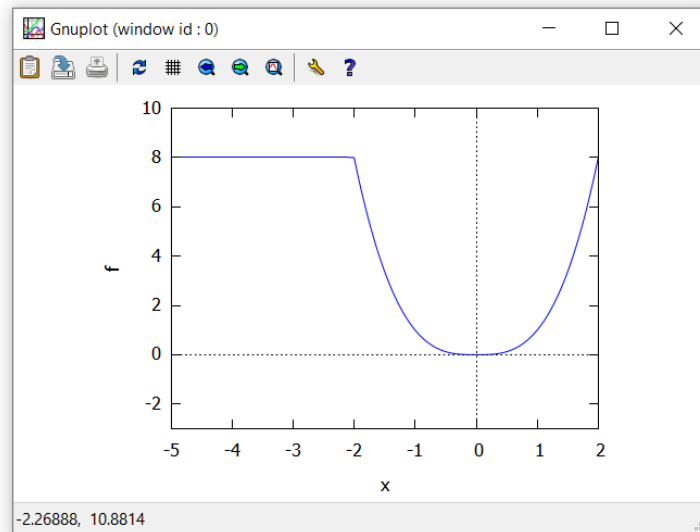
Кусочно-линейная функция может быть задана при помощи оператора **if then else** вида:

if условие1 **then** выражение1 **else** выражение2.

Пример.

Построим графики функций $f(x) = \begin{cases} 8, & x < -2 \\ -x^3, & -2 < x < 0 \\ x^3, & x > 0 \end{cases}$.

```
(%i3) f(x):= if x<=-2 then 8 else if x<0 then -x^3 else x^3$
plot2d ([f], [x,-5,2], [y,-3,10]);
(%o3) false
```



Функция, заданная неявно.

Функция: **implicit_plot**

implicit_plot (*expr*, *x_range*, *y_range*)

implicit_plot (*[expr_1, ..., expr_n]*, *x_range*, *y_range*)

Отображает график функции на вещественной плоскости, определяемой неявно выражением *expr*. Область в плоскости определяется *x_range* и *y_range*. На одном графике может быть представлено несколько функций, список выражений, которые их определяют выглядит *[expr_1, ..., expr_n]*. Эти функции используют глобальный формат опции, установленных *set_plot_option*. Дополнительные опции могут быть переданы как дополнительные аргументы для команды **implicit_plot**.

Метод, используемый **implicit_plot**, состоит в отслеживании изменения знака на данной плоскости и может потерпеть неудачу для сложных выражений.

load(implicit_plot) Загружает эту функцию.

Пример.

```
(%i2) load(implicit_plot);  
      implicit_plot (x^2=y^3-3*y+1, [x,-4,4], [y,-4,4]);  
(%o1) C:/maxima-5.46.0/share/maxima/5.46.0/share/contrib/implicit_plot.lisp  
      implicit_plot is now obsolete. Using plot2d instead:  
      plot2d (x^2 = y^3-3*y+1, [x,-4,4], [y,-4,4])  
(%o2) false
```

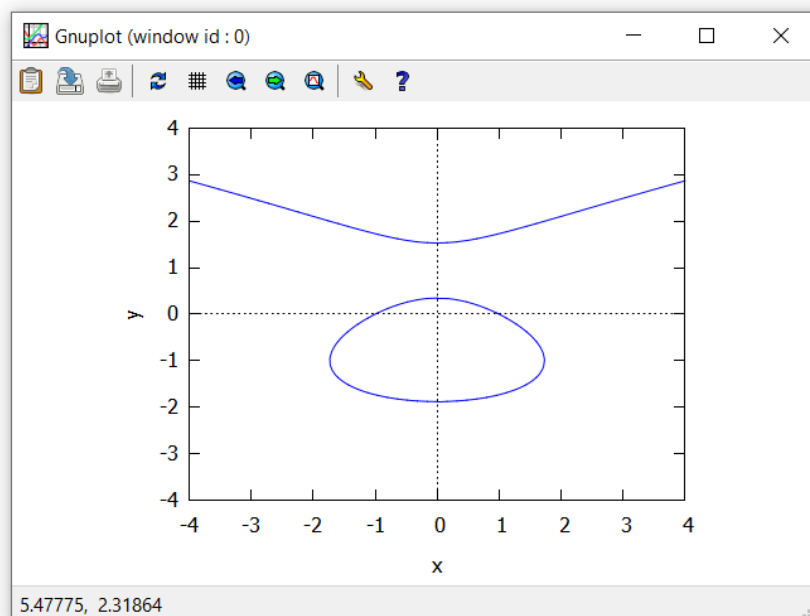


График функции, заданной параметрически.

Параметрический график определяется списком, начинающимся с ключевого слова **parametric**, за которым следуют два выражения или имена функций и диапазон для параметра. Этот диапазон для параметра должен быть списком с именем параметра, за которым следует его минимальное и максимальное значения: **[param, min, max]**. График покажет путь, проходимый точкой с координатами, заданными двумя выражениями или функциями как **param** возрастающий от **min** до **max**.

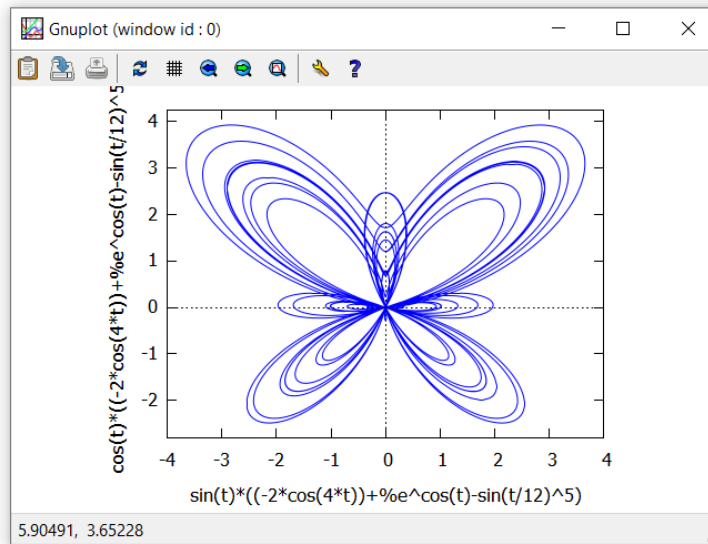
Пример.

График кривой в форме бабочки, заданный параметрически:


```
(%i2) r: (exp(cos(t))-2*cos(4*t)-sin(t/12)^5);
      plot2d([parametric, r*sin(t), r*cos(t), [t, -8*%pi, 8*%pi]]);

(%o1) -2 cos(4 t) + %ecos(t) - sin( $\frac{t}{12}$ )5

(%o2) false
```



Пример.

Построим фигуру Лиссажу внутри окружности.

- Уравнение окружности $x=5*\cos(t)$, $y=5*\sin(t)$;
- Уравнение фигуры $x=3*\cos(4t)$, $y=3*\sin(3t)$.

```
(%i2) plot2d([[parametric, 3*cos(4*t), 3*sin(3*t), [t, -%pi, %pi]],
[parametric, 5*cos(t), 5*sin(t), [t, -%pi, %pi]]],
[x, -8, 8], [y, -8, 8], [gnuplot_preamble, "set size ratio 1"])$
```

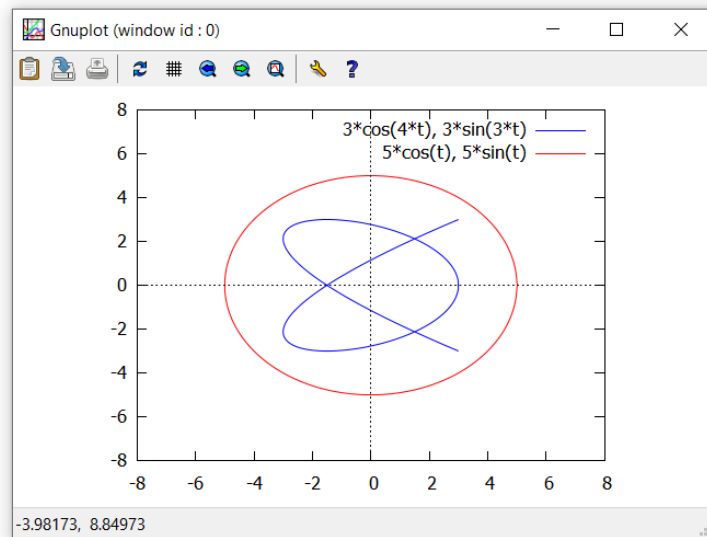
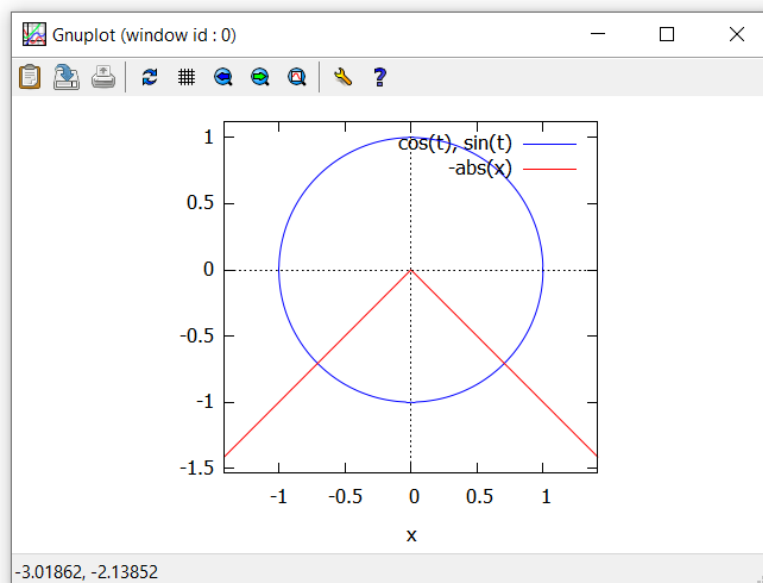


График круга с использованием параметрического представления, вместе с функцией $-|x|$. Круг будет выглядеть как круг если масштаб по обоим осям одинаковый, что достигается с помощью опции `same_xy`.

Пример.

```
(%i1) plot2d([[parametric, cos(t), sin(t), [t, 0, 2*%pi]], [-abs(x)], [x, -sqrt(2), sqrt(2)], same_xy);
(%o1) false
```

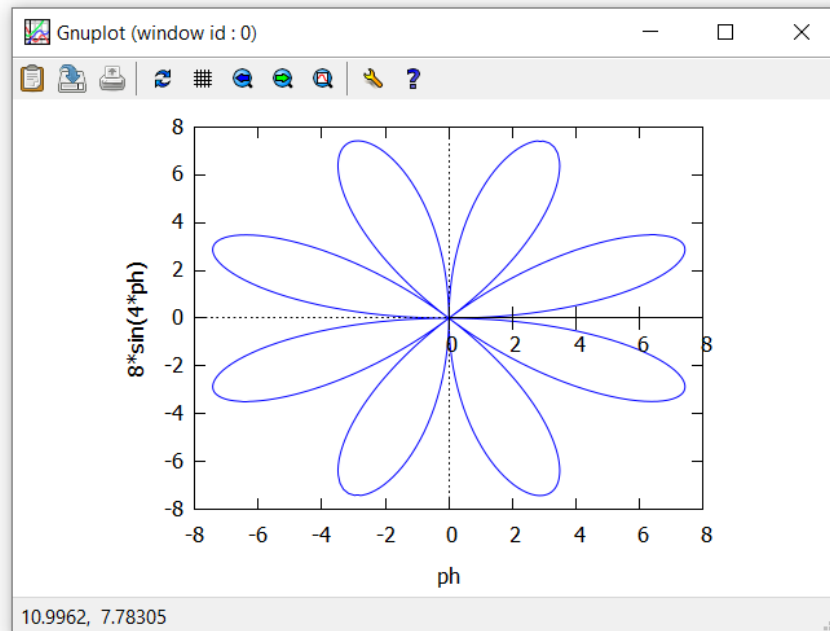


Явная функция в полярных координатах

Для построения надо определить связь между полярными радиусом r и углом φ , а также использовать опцию gnuplot **set polar**.

Пример.

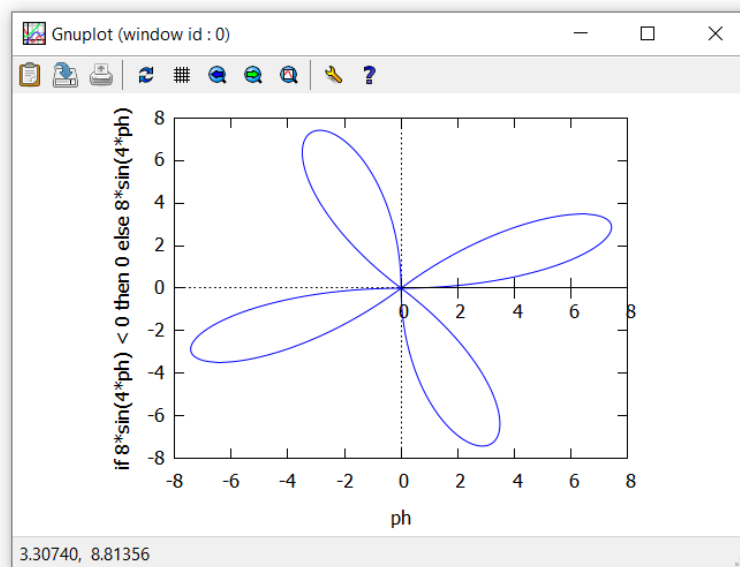
```
(%i2) r(ph) := 8*sin(4*ph);
      plot2d([r(ph)], [ph, 0, 4*%pi], [x, -8, 8], [y, -8, 8], [gnuplot_preamble, "set polar"]);
(%o1) r(ph) := 8 sin(4 ph)
(%o2) false
```



Но пакет wxMaxima, как многие другие математические пакеты, не учитывают, что радиус не может быть отрицательным и рисует кривую НЕПРАВИЛЬНО. Чтобы учесть только положительные значения радиуса нужно ставить условие:

Пример.

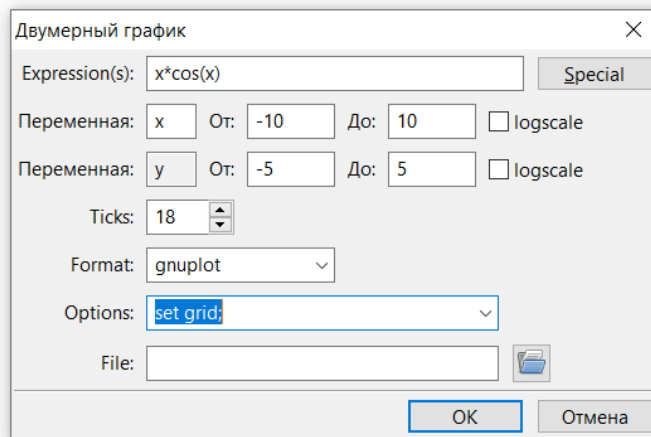
```
(%i4) r(ph) := if 8*sin(4*ph)<0 then 0 else 8*sin(4*ph) ;
      plot2d([r(ph)], [ph, 0, 4*%pi], [x, -8, 8], [y, -8, 8], [gnuplot_preamble, "set polar"]);
(%o3) r(ph):=if 8 sin(4 ph)<0 then 0 else 8 sin(4 ph)
(%o4) false
```



2способ. В верхней панели инструментов выбираем кнопку *График* → *Двумерный график* появляется диалоговое окно, в котором предлагается ввести выражение для графика функции, пределы изменения переменной по оси X и Y, количество точек графика, выбрать формат для построения графика функции, задать, в случае необходимости, дополнительные опции. Заметим, что здесь также можно, нажав на кнопку *Дополнительно*, задать функцию в параметрическом виде и дискретную функцию.

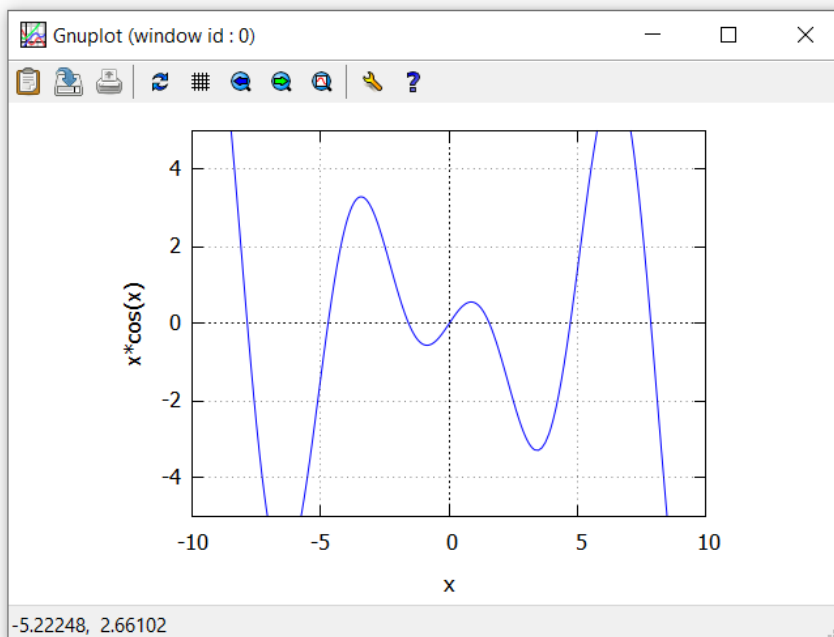
Пример.

Построим функцию $y = x \cos x$.



При нажатии на кнопку *Ok* получим тот же график. Таким образом, можно выбирать наиболее удобный способ построения графиков функций на плоскости. Результат

```
(%i1) plot2d([x*cos(x)], [x,-10,10], [y,-5,5],
             [plot_format, gnuplot],
             [gnuplot_postamble, "set grid;"],
             [nticks,18])$
plot2d: some values will be clipped.
```



Пример.

Построить в одной координатной плоскости графики функций:

$$y = \frac{1}{x^2}, \quad y = x^3, \quad y = \cos(x).$$

Сформируем ячейку ввода:

Двумерный график

Expression(s): Special

Переменная: От: До: ☐ logscale

Переменная: От: До: ☐ logscale

Ticks:

Format:

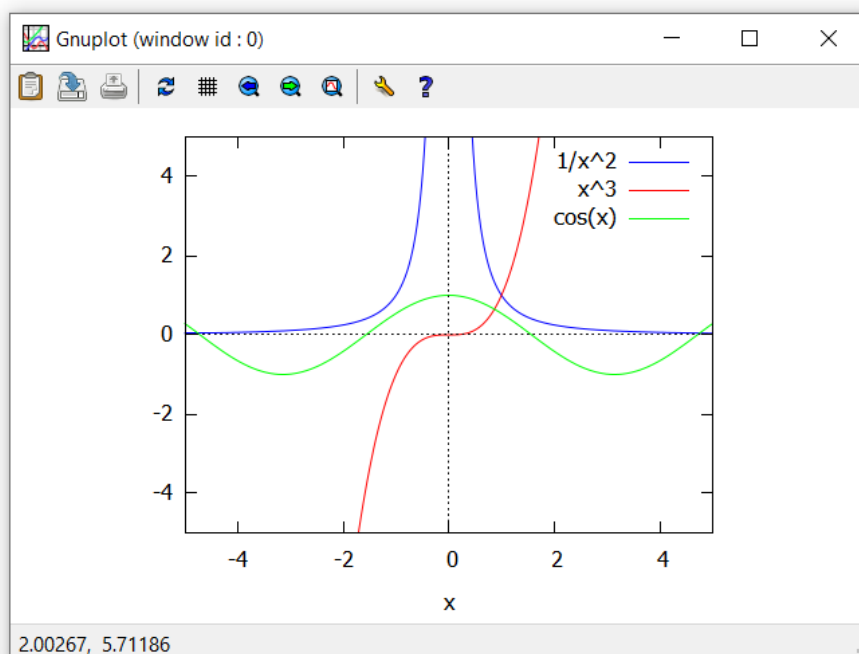
Options:

File:

OK Отмена

Результат

```
(%i1) plot2d([1/x^2, x^3, cos(x)], [x,-5,5], [y,-5,5],
[plot_format, gnuplot],
[gnuplot_postamble, "set zeroaxis;"])$
expt: undefined: 0 to a negative exponent.
plot2d: expression evaluates to non-numeric value somewhere in plotting range.
plot2d: some values will be clipped.
plot2d: some values will be clipped.
```

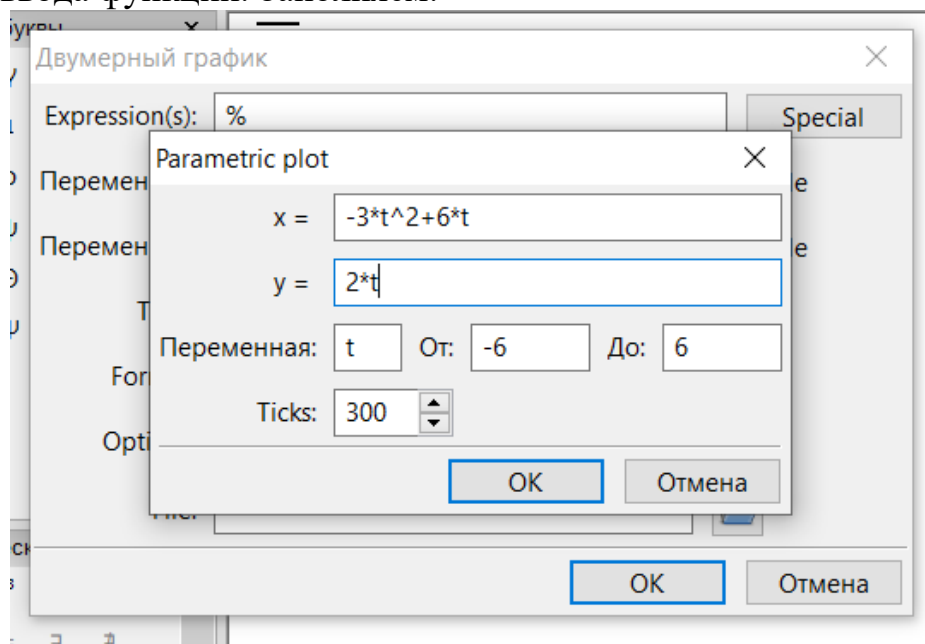


Как видим, система автоматически определяет цвет для каждого графика.

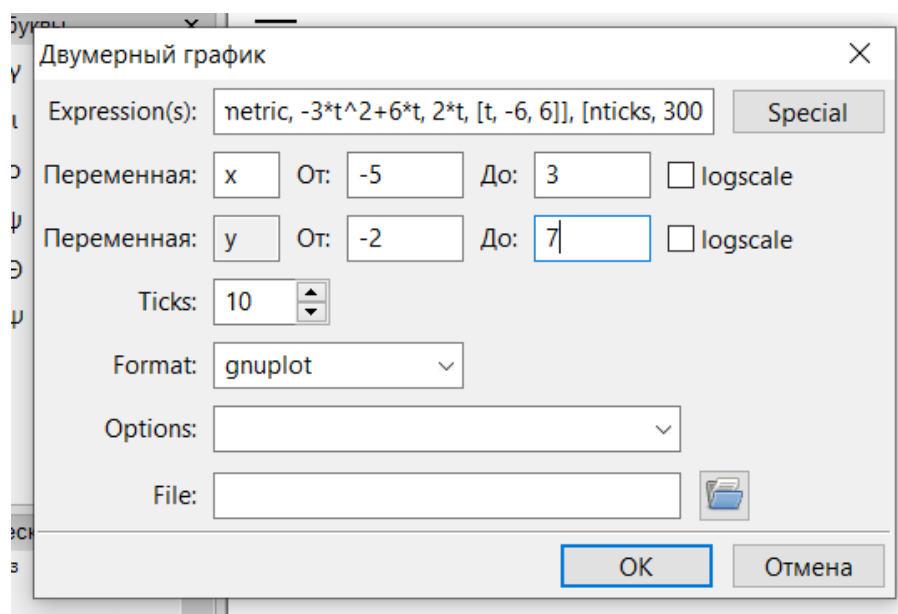
Пример. Построить график функции $\begin{cases} x = -3t^2 + 6t \\ y = 2t \end{cases}$

Выполним построение графика параметрически заданной функции

следующим образом. Вызываем диалоговое окно для построения графика функции, нажав кнопку *График* → *Двумерный график*. В этом окне выбираем *Дополнительно* → *Параметрический график*. Открывается диалоговое окно для ввода функции. Заполняем:

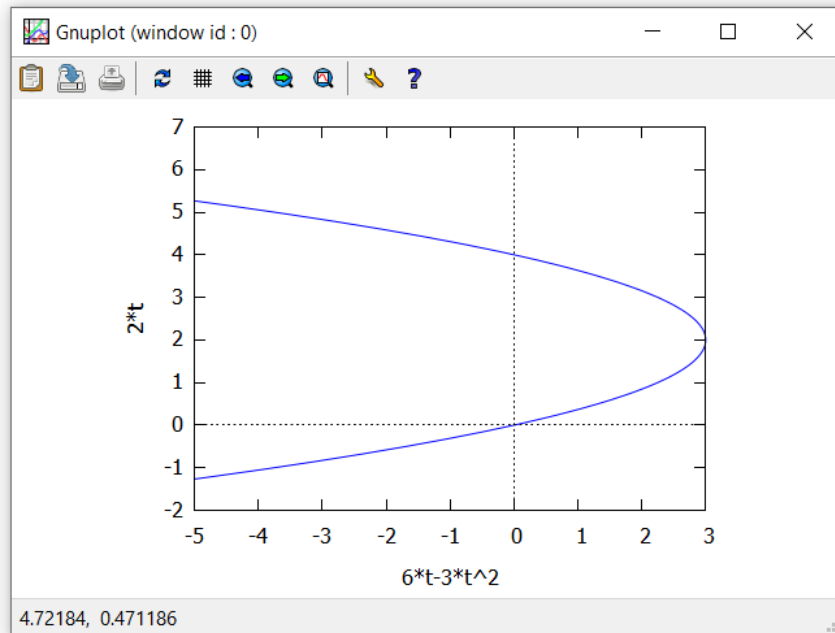


Нажимаем на кнопку *Ok*. Теперь вводим пределы изменения переменных x и y в окне *Двумерный график*.



Нажимаем на кнопку *Ok*. В результате получаем график:

```
(%i1) plot2d(['parametric', -3*t^2+6*t, 2*t, [t, -6, 6]], [nticks, 300], [x,-5,3], [y,-2,7],
[plot_format, gnuplot])$
plot2d: some values will be clipped.
```



Список литературы

1. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : учебник для вузов : в 3 томах / Г. М. Фихтенгольц. — 15-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, [б. г.]. — Том 1 — 2021. — 608 с. — ISBN 978-5-8114-7061-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/154399>. — Режим доступа: для авториз. пользователей.
2. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : учебник для вузов : в 3 томах / Г. М. Фихтенгольц. — 15-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, [б. г.]. — Том 2 : Курс дифференциального и интегрального исчисления — 2021. — 800 с. — ISBN 978-5-8114-7377-9. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/159505>. — Режим доступа: для авториз. пользователей.
3. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : учебник для вузов : в 3 томах / Г. М. Фихтенгольц. — 11-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2020 — Том 3 — 2020. — 656 с. — ISBN 978-5-8114-6652-8. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/149365>. — Режим доступа: для авториз. пользователей.
4. Берман, Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. — 11-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2023. — 492 с. — ISBN 978-5-507-46033-5. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/295943> (дата обращения: 07.03.2023). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
5. Демидович, Б. П. Основы вычислительной математики : учебное пособие / Б. П. Демидович, И. А. Марон. — 8-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 672 с. — ISBN 978-5-8114-0695-1. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/210674> (дата обращения: 07.03.2023). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
6. Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учебное пособие для вузов / Б. П. Демидович. — 24-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 624 с. — ISBN 978-5-8114-9078-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/184105> (дата обращения: 07.03.2023). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
7. Ильина В.А., Силаев П.К. Система аналитических вычислений Maxima для физиков-теоретиков. М.: МГУ, 2007.
8. Марон, И. А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах. Функции одной переменной : учебное пособие / И. А. Марон. — 3-е изд. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 400 с. — ISBN 978-5-8114-0849-8. — Текст : электронный // Лань : электронно-

- библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/210134> (дата обращения: 07.03.2023). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
9. Малакаев М.С., Секаева Л.Р., Тюленева О.Н. Основы работы с системой компьютерной алгебры Maxima. Казань: Казанский университет, 2012.
 10. Стахин Н.А. Основы работы с системой аналитических (символьных) вычислений MAXIMA. М., 2008.
 11. Чичкарев Е.А. Компьютерная математика с Maxima. М., 2012.