

ЛУГАНСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени ВЛАДИМИРА ДАЛЯ

Кафедра «Прикладная математика»

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ

по дисциплине «МАТЕМАТИКА»

«ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ»

для студентов 2-го курса
инженерно-технических и информационно-компьютерных специальностей

Вариант №1

РАЗРАБОТАЛ
Доцент кафедры
«Прикладная математика»
к.т.н. Малый В.В.

УТВЕРЖДЕНО
на заседании кафедры
«Прикладная математика»
протокол №1 от 28.08.2017

Луганск-2017

«ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ»

Вариант №1

Пример 1. Найти u_{n+1} и u_{2n-1} члены ряда

$3 + \frac{4}{2^2} + \frac{5}{3^2} + \frac{6}{4^2} + \dots$	$\frac{1}{7} + \frac{1}{13} + \frac{1}{19} + \frac{1}{25} + \dots$	$\frac{1}{5} + \frac{2}{7} + \frac{3}{9} + \frac{4}{11} + \dots$
---	--	--

Пример 2. Найти сумму ряда

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{2n-1}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+5)(n+6)}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n - 3^n}{12^n}$
--	--	--

Пример 3. Можно ли решить вопрос о сходимости ряда с помощью необходимого признака?

$1 + \frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{6}{\sqrt{4}} + \frac{8}{\sqrt{5}} + \dots$	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1} \right)^{n/2}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{3n-1} \right)^{n+1}$
--	--	---

Пример 4. Используя первый признак сравнения, исследовать на сходимость следующие числовые знакоположительные ряды:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(2+n^2)}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + 1}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \cos n}{n}$
---	---	--

Пример 5. Используя второй признак сравнения (в предельной форме), исследовать на сходимость следующие числовые знакоположительные ряды:

$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \sin \frac{\pi}{2^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{2n} \right)$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^3}{n^5 + 3n^2 + 2}$
--	---	---

Пример 6. Пользуясь признаками Даламбера, Коши или интегральным признаком Коши, исследовать на сходимость следующие числовые знакоположительные ряды:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{3^n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}$	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3}$
--	--	--

Пример 7. Исследовать на абсолютную и условную сходимость числовые знакочередующиеся ряды

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n+1}{3n+1} \right)^n$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^4}{3^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+2}{n+1}$
--	--	--

Пример 8. Определить интервал сходимости ряда и исследовать его сходимость на концах интервала

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 2^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} (x-1)^n$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-2)^3 (x-3)^{2n}}{2n+3}$
---	--	---

Пример 9. Разложить указанную функцию в ряд по степеням x . Указать интервал сходимости полученного ряда.

$y = x^3 \cdot 3^x$	$y = \frac{x}{4+x}$	$f(x) = x^3 \sin \frac{x^2}{3}$
---------------------	---------------------	---------------------------------

Пример 10. Используя разложение функции в степенной ряд, вычислить заданное выражение с точностью до 10^{-4} .

$\sqrt[3]{e}$	$\sin(12^\circ)$	$\arcsin 1$
---------------	------------------	-------------

Пример 11. Вычислить определенный интеграл с точностью $\varepsilon = 0,001$ путём разложения подынтегральной функции в ряд с его последующим интегрированием.

$\int_0^1 \sqrt[3]{x^2} \cos x dx$	$\int_0^{0.5} \frac{\ln(1+x^2)}{x} dx$	$\int_0^{0.5} \frac{dx}{1+x^3}$
------------------------------------	--	---------------------------------

Пример 12. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 .

$f(x) = 1 + x - 2x^2 + 3x^3 \quad x_0 = 2$	$f(x) = \frac{1}{x+2} \quad x_0 = 1$	$f(x) = \ln(x+2) \quad x_0 = 1$
--	--------------------------------------	---------------------------------

Пример 13. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию

$y' = \cos x + y^2, \quad y(0) = 1$	$y' = xy + y^2 \quad y(0) = 1$	$y' = x + xy \quad y(0) = 2$
-------------------------------------	--------------------------------	------------------------------

Пример 14. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $T = 2\pi$) функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-\pi ; \pi]$.

$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x \leq 0, \\ x-1, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$	$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 3x-1, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$
--	---

Пример 15. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $T = 2\ell$) функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-\ell ; \ell]$.

$f(x) = 2x+1, \quad [-3; 3]; \quad T = 6.$	$f(x) = 4x+5, \quad [-1; 1]; \quad T = 2.$
--	--

Пример 16. На заданном отрезке разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$.

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1, \quad [-\pi; \pi]; \quad T = 2\pi.$	$f(x) = \frac{1}{4}x, \quad [-2; 2]; \quad T = 4.$
---	--

Пример 17. На заданном отрезке разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$.

$f(x) = \begin{cases} 1 + \sin x, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$	$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \pi/2 \\ -\sin x, & \pi/2 < x \leq \pi. \end{cases}$
--	---

ПРОГРАММА КУРСА «МАТЕМАТИКА»

для студентов 2-го курса инженерно-технических и информационно-компьютерных специальностей.

Раздел: «Числовые и функциональные ряды»

1. Числовые ряды. Понятие сходимости ряда. Геометрическая прогрессия. Необходимый признак сходимости ряда.
2. Простейшие действия над рядами. Свойства рядов с положительными членами. Исследование сходимости рядов с помощью признаков сравнения.
3. Признаки сходимости Даламбера и Коши. Интегральный признак сходимости рядов с положительными членами.
4. Знакопередающиеся ряды. Теорема Лейбница. Оценка остатка знакопередающегося ряда. Знакопеременные ряды. Абсолютно и условно сходящиеся ряды. Теорема об абсолютной сходимости.
5. Функциональные ряды. Область сходимости, методы её определения. Равномерная и правильная сходимость функциональных рядов. Признак Вейерштрасса.
6. Степенные ряды. Теорема Абеля. Интервал и радиус сходимости степенного ряда. Его равномерная сходимость.
7. Ряд Тейлора. Теорема о единственности разложения функции в степенной ряд. Достаточные условия разложимости функции в ряд Тейлора.
8. Разложение основных элементарных функций в ряды Тейлора и Маклорена. Применение степенных рядов в приближенных вычислениях.
9. Ряды Фурье. Коэффициенты Фурье и их свойства. Теорема о сходимости тригонометрических рядов Фурье. Понятие ортонормированной системы функций. Её применение для разложения функций.
10. Разложение чётных и нечётных функций в тригонометрический ряд Фурье. Специальные приёмы разложения функций в зависимости от заданного интервала разложения.
11. Применение тригонометрическим рядов Фурье в приближенных вычислениях.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная:

1. Карасев А.И., Аксютин З.М., Савельева Т.И. Курс высшей математики для экономических вузов. М.: Высш. шк., 1982. Ч. I, II.
2. Малый В.В. Методические указания и контрольные задания по высшей математике в I-м семестре (для студентов экономических и инженерно-технических специальностей заочной формы обучения). – Луганск, СНУ, 2012.

3. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). - М.: Высш. шк., 1983.
4. Шнейдер В.Е., Слуцкий А.И., Шумов А.С. Краткий курс высшей математики. Ч.1,2. - М.: Высш. шк., 1978.
5. Шипачев В.С. Высшая математика. - М.: Высш. шк., 1985.

Дополнительная

6. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М.: Наука, 1980, 1984.
7. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. – М.: Наука, 1979.
8. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. – М.: Наука, 1980.
9. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. - М.: Наука, 1980.