Лабораторная работа

«Приближенное решение дифференциальных уравнений»

Цельработы: Получение навыков решения дифференциальных уравнений с использованием встроенных функций MathCAD.

Функции для решения дифференциальных уравнений.

В систему MathCAD введена возможность решения дифференциальных уравнений и систем с такими уравнениями в численном виде. Эту возможность трудно переоценить, так как многие серьезные научно-технические задачи (особенно относящиеся к анализу динамических систем и к их математическому моделированию) базируются на численных методах решения систем дифференциальных уравнений.

Нелинейные дифференциальные уравнения и системы с такими уравнениями, как правило, не имеют аналитических методов решения, и здесь особенно важна возможность их решения численными методами. В большинстве случаев желательно представление решений в графическом виде, что и позволяет MathCAD.

Для решения дифференциальных уравнений (систем) различного порядка и различными методами в MathCAD введены 13 встроенных функций: *rkadapt*, *Rkadapt*, *rkfixed*, *Bulstoer*, *bulstoer*, *bvalfit*, *multigird*, *relax*, *sbval*, *Stiffb*, *stiffb*, *Stiffr*и*stiffr*.

В функцию *rkfixed* заложен широко распространенный метод решения дифференциальных уравнений – метод Рунге-Кутты. Несмотря на то, что это не самый быстрый метод, функция *rkfixed* почти всегда справляется с поставленной задачей. Однако есть случаи, когда лучше использовать более сложные методы. Эти случаи попадают под три широкие категории: система может быть жесткой (*Stiffb*, *Stiffr*), функции системы могут гладкими(*Bulstoer*) или плавными (*Rkadap*). Нередко приходится пробовать несколько методов на одном дифференциальном уравнении (на одной системе), чтобы определить, какой метод лучше. Как известно, что решение гладкое, используется функция *Bulstoer*, куда заложен метод Бурлиш-Штера, а не Рунге-Кутты, используемый функцией *rkfixed*. В этом случае решение будет точнее. Можно решить задачу более точно (более быстро), если уменьшить шаг там, где производная меняется быстро, и увеличить шаг там, где она ведет более спокойно. Для этого предусмотрена функция *Rkadap*. Но, несмотря на то что она при решении дифференциального уравнения использует непостоянный шаг, функция *Rkadap* представит ответ для точек, находящихся на одинаковом расстоянии, заданном пользователем. Система дифференциальных уравнений, записанная в матричной форме$y=A\cdot x$, гдеA–почти вырожденная матрица, называется жесткой. При решении жестких систем следует использовать одну из двух встроенных функций, разработанных специально для таких случаев: *Stiffb* и

Stiffr. Они используют метод Булирш-Штера (*b*) или Розенброка(*r*). Функции, начинающиеся со строчной буквы, дают решения только для конечной точки. Для решения двух точечных краевых задач предназначены функции: *sbval* и *bvalfit*. Для решения дифференциальных уравнений Пуассона (в частных производных второго порядка) и уравнений Лапласа в систему введены следующие функции: *bvalfit*, *multigird*, *relax*, *sbval*. Большое число примеров на решение дифференциальных уравнений с описанными функциями дается в подсказках QuickSheets, размещенных в центре ресурсов.

Пример решения обыкновенного дифференциального уравнения.

Найдем методом Рунге-Кутты4-го порядка с шагом h=π/20 в интервале [0,π] приближенное решение задачи Коши y''+16y=3cos(4.1x), y(0)=0, y'(0)=0

Изобразим приближенное решение графически.

Для решения задачи методом Рунге-Кутты воспользуемся функцией *rkfixed*

Запишем эквивалентную задачу для системы дифференциальных уравнений 2-го порядка. Обозначим: Y(x)=(y0(x), y1(x)), y0(x)=y(x), y1(x)=y'(x).

Получим:

y0'=y1, y1'=16y0+3cos(4.1x), y0(0)=0, y1(0)=0.

В векторной форме:Y'=D(x,Y), Y(0)=(0,0),

D(x,y)=(y1',16y0+3cos(4.1x).

Определим начальное условие

$$Y := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Определим правую часть системы D(x,Y)

$$D(x, Y) := \begin{pmatrix} Y_1 \\ -16 \cdot Y_0 + 3 \cdot \cos(4.1 \cdot x) \end{pmatrix}$$

Вычислим приближенное решение на отрезке[0,π], выполнив 20 одинаковых шагов, h=π/20 методом Рунге-Кутты 4-го порядка, обозначим приближенное решение Y

$$Y := \mathrm{rkfixed}(Y, 0, \pi, 20, D)$$

Выведем в рабочий документ вычисленное решение Y=

Y =

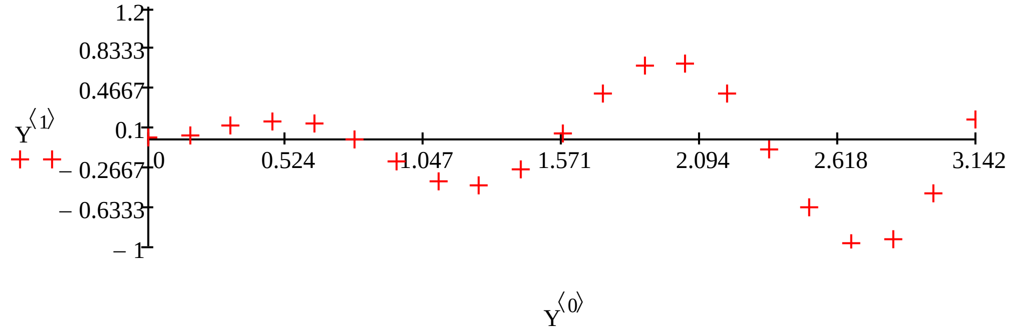
	0	1	2
0	0	0	0
1	0.157	0.035	0.409
2	0.314	0.111	0.492
3	0.471	0.164	0.116
4	0.628	0.13	-0.569
5	0.785	-0.011	-1.187
6	0.942	-0.217	-1.331
7	1.1	-0.392	-0.78
8	1.257	-0.431	0.345
9	1.414	-0.276	1.593
10	1.571	0.044	2.365
11	1.728	0.416	2.191
12	1.885	0.676	0.979
13	2.042	0.688	-0.885
14	2.199	0.403	-2.656
15	2.356	-0.099	...

В первом столбце приведены значения *x*, во втором столбце – соответствующие значения решения *Y(x)*, в третьем – значения производной решения.

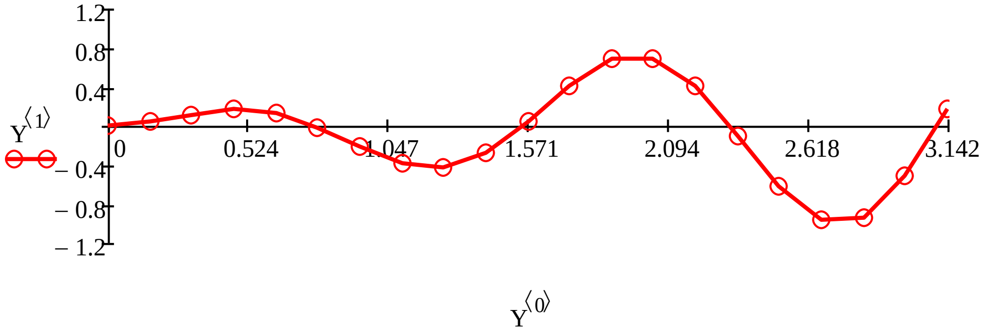
Построим график приближенного решения.

Для того, чтобы построить график приближенного решения, щелкните на панели Graph по пиктограмме декартова графика, введите в поле ввода по оси абсцисс имя первого столбца матрицы *Y*, содержащего значения аргумента *x* в узлах сетки, а в поле ввода по оси ординат – имя второго столбца, содержащего значения приближенного решения в узлах сетки;

Для того чтобы ввести номер столбца выберите соответствующий символ на панели Matrix ($M^{< >}$).



Для того чтобы изменить стиль изображения, щелкните дважды по полю графиков и установите в окне соответствующие параметры.



Задание к работе: Решите на отрезке $[x_0, x_N]$ задачу Коши $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ методом Рунге-Кутты с постоянным шагом. Изобразите графики решений, вычисленных с шагами h, $2h$ и $h/2$. Значение $x_N > x_0$ выберите самостоятельно.

Варианты индивидуальных заданий

№ вар	$F(x,y,y')=0$	Начальное условие
1	$(e^x + 1)dy + e^x dx = 0$	$y(0)=0.5$
2	$y\ln y+xy'=0$	$y(1)=e$
3	$\sqrt{4 - x^2 \cdot}\, y' + xy^2 + x = 0$	$y(0)=-tg2$
4	$3e^x tgy dx + \frac{2 - e^x}{cos^2 x} dx = 0$	$y(1)=arctg(2-e)$
5	$(1 + e^x)yy' = e^x$	$y(0)=1$
6	$y' sinx = ylny$	$y(\pi/2)=e$
7	$\frac{xdx}{1 + y} - \frac{ydy}{1 + x} = 0$	$y(1)=1$
8	$(1 + y^2)dx = xdx$	$y(\pi/4)=1$
9	$y' sinx=siny$	$y(\pi/2)= \pi/2$
10	$3(x^2y + y)dy + \sqrt{2 + y^2}\, dx = 0$	$y(0)=1$
11	$T^2u''(t) + 2\xi Tu'(t) + u(t)-k = 0$	$u(0) = 1, u'(0) = 0, \xi = 0{,}5, T = 2, k = 1$
12	$4x^2u''(x) + u(x) = 0$	$u(0) = 1, u'(0) = 0{,}5$
13	$u''(x) - xu'(x) + x^2u(x) + 3x = 0$	$u(0) = 0, u'(0) = 0$
14	$\omega^{-2} u''(x) + u(x) - k = 0$	$u(0) = 0, u'(0) = 0, \omega = 2, k = 5$
15	$u''(x) - 2u'(x) + u(x) - x-1 = 0$	$u(0) = 2, u'(0) = -3$
16	$u''(x)-3u'(x)-x^2 =0$	$u(0) = 0, u'(0) = 1$
17	$u''(x) - \sqrt{\left(1 + \left(u'(x)\right)^2\right)} = 0$	$u(0) = 1, u'(0) = 0$
18	$u''(x) + 4u'(x) +13u(x) = 0$	$u(0) = 1, u'(1) = 0$
19	$u''(x) + \omega^2u(x) = 0$	$u(0) = 1, u'(0) = 0, \omega = 2$
20	$u''(x) - 4u'(x) + 3u(x) -x+1 = 0$	$u(0) = 0, u'(0) = 0$