

ЛУГАНСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени ВЛАДИМИРА ДАЛЯ

Кафедра «Прикладная математика»

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ

по дисциплине «МАТЕМАТИКА»

«ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ»

для студентов 2-го курса
инженерно-технических и информационно-компьютерных специальностей

Вариант №4

РАЗРАБОТАЛ
Доцент кафедры
«Прикладная математика»
к.т.н. Малый В.В.

УТВЕРЖДЕНО
на заседании кафедры
«Прикладная математика»
протокол №1 от 28.08.2017

Луганск-2017

«ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ»

Вариант №4

Пример 1. Найти u_{n+1} и u_{2n-1} члены ряда

| | | |
|--|--|--|
| $1 + \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 4 \cdot 7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10} + \dots$ | $\frac{3}{1} + \frac{9}{2} + \frac{27}{6} + \frac{81}{24} + \frac{243}{120} + \dots$ | $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{7} + \left(\frac{7}{10}\right)^{\frac{3}{2}} + \dots$ |
|--|--|--|

Пример 2. Найти сумму ряда

| | | |
|---------------------------------------|--|--|
| $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}$ | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)}$ | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + 4^n}{10^n}$ |
|---------------------------------------|--|--|

Пример 3. Можно ли решить вопрос о сходимости ряда с помощью необходимого признака?

| | | |
|---------------------------------------|---|---------------------------------------|
| $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+1}$ | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2+1}$ | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+3}$ |
|---------------------------------------|---|---------------------------------------|

Пример 4. Используя первый признак сравнения, исследовать на сходимость следующие числовые знакоположительные ряды:

| | | |
|---|---|--|
| $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(1+n^3)}}$ | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + 1}$ | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + 2 \sin n}{n}$ |
|---|---|--|

Пример 5. Используя второй признак сравнения (в предельной форме), исследовать на сходимость следующие числовые знакоположительные ряды:

| | | |
|---|---|---|
| $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{3^n}(n+1)}$ | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 + 3}$ | $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^n$ |
|---|---|---|

Пример 6. Пользуясь признаками Даламбера, Коши или интегральным признаком Коши, исследовать на сходимость следующие числовые знакоположительные ряды:

| | | |
|--|--------------------------------------|--|
| $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{n!}$ | $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{7n+1}\right)^{2n}$ |
|--|--------------------------------------|--|

Пример 7. Исследовать на абсолютную и условную сходимость числовые знакочередующиеся ряды

| | | |
|---|---|--|
| $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3^n n \sqrt{n}}$ | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+2}$ |
|---|---|--|

Пример 8. Определить интервал сходимости ряда и исследовать его сходимость на концах интервала

| | | |
|--|------------------------------|--|
| $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{(n+1)2^n}$ | $\sum_{n=1}^{\infty} x^n n!$ | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{\sqrt{n+1}}$ |
|--|------------------------------|--|

Пример 9. Разложить указанную функцию в ряд по степеням x . Указать интервал сходимости полученного ряда.

| | | |
|-----------------|----------------|------------------------------|
| $y = xe^{-x^2}$ | $y = \cos x^2$ | $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
|-----------------|----------------|------------------------------|

Пример 10. Используя разложение функции в степенной ряд, вычислить заданное выражение с точностью до 10^{-4} .

| | | |
|-------------|----------------------------|-------------------|
| $e^{-0,25}$ | $\operatorname{arctg} 0,2$ | $\ln \frac{1}{9}$ |
|-------------|----------------------------|-------------------|

Пример 11. Вычислить определенный интеграл с точностью $\varepsilon = 0,001$ путём разложения подынтегральной функции в ряд с его последующим интегрированием.

| | | |
|--|-------------------------------|---|
| $\int_0^{0,5} \operatorname{arctg} x^2 dx$ | $\int_0^1 \sqrt{x} \cos x dx$ | $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$ |
|--|-------------------------------|---|

Пример 12. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 .

| | | |
|---------------------------------|---|------------------------------------|
| $f(x) = \sqrt{x} \quad x_0 = 4$ | $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \quad x_0 = 1$ | $f(x) = \frac{1}{x} \quad x_0 = 1$ |
|---------------------------------|---|------------------------------------|

Пример 13. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию

| | | |
|----------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------------|
| $y' = x^2 + xy^2 \quad y(0) = 1$ | $y' = 2x^2 + xy \quad y(0) = 0.1$ | $y' = 2 \cos x - xy \quad y(0) = 1$ |
|----------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------------|

Пример 14. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $T = 2\pi$) функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-\pi ; \pi]$.

| | |
|--|---|
| $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x \leq 0, \\ x-1, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$ | $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 3x-1, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$ |
|--|---|

Пример 15. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $T = 2\ell$) функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-\ell ; \ell]$.

| | |
|--|--|
| $f(x) = 2x + 1, \quad [-3; 3]; \quad T = 6.$ | $f(x) = 4x + 5, \quad [-1; 1]; \quad T = 2.$ |
|--|--|

Пример 16. На заданном отрезке разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$.

| | |
|---|--|
| $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1, \quad [-\pi; \pi]; \quad T = 2\pi.$ | $f(x) = \frac{1}{4}x, \quad [-2; 2]; \quad T = 4.$ |
|---|--|

Пример 17. На заданном отрезке разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$.

| | |
|--|---|
| $f(x) = \begin{cases} 1 + \sin x, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$ | $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \pi/2 \\ -\sin x, & \pi/2 < x \leq \pi. \end{cases}$ |
|--|---|

ПРОГРАММА КУРСА «МАТЕМАТИКА»

для студентов 2-го курса инженерно-технических и информационно-компьютерных специальностей.

Раздел: «Числовые и функциональные ряды»

1. Числовые ряды. Понятие сходимости ряда. Геометрическая прогрессия. Необходимый признак сходимости ряда.
2. Простейшие действия над рядами. Свойства рядов с положительными членами. Исследование сходимости рядов с помощью признаков сравнения.
3. Признаки сходимости Даламбера и Коши. Интегральный признак сходимости рядов с положительными членами.
4. Знакопередающиеся ряды. Теорема Лейбница. Оценка остатка знакопередающегося ряда. Знакопеременные ряды. Абсолютно и условно сходящиеся ряды. Теорема об абсолютной сходимости.
5. Функциональные ряды. Область сходимости, методы её определения. Равномерная и правильная сходимость функциональных рядов. Признак Вейерштрасса.
6. Степенные ряды. Теорема Абеля. Интервал и радиус сходимости степенного ряда. Его равномерная сходимость.
7. Ряд Тейлора. Теорема о единственности разложения функции в степенной ряд. Достаточные условия разложимости функции в ряд Тейлора.
8. Разложение основных элементарных функций в ряды Тейлора и Маклорена. Применение степенных рядов в приближенных вычислениях.
9. Ряды Фурье. Коэффициенты Фурье и их свойства. Теорема о сходимости тригонометрических рядов Фурье. Понятие ортонормированной системы функций. Её применение для разложения функций.
10. Разложение чётных и нечётных функций в тригонометрический ряд Фурье. Специальные приёмы разложения функций в зависимости от заданного интервала разложения.
11. Применение тригонометрическим рядов Фурье в приближенных вычислениях.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная:

1. Карасев А.И., Аксютин З.М., Савельева Т.И. Курс высшей математики для экономических вузов. М.: Высш. шк., 1982. Ч. I, II.
2. Малый В.В. Методические указания и контрольные задания по высшей математике в I-м семестре (для студентов экономических и инженерно-технических специальностей заочной формы обучения). – Луганск, СНУ, 2002.

3. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). - М.: Высш. шк., 1983.
4. Шнейдер В.Е., Слуцкий А.И., Шумов А.С. Краткий курс высшей математики. Ч.1,2. - М.: Высш. шк., 1978.
5. Шипачев В.С. Высшая математика. - М.: Высш. шк., 1985.

Дополнительная

6. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М.: Наука, 1980, 1984.
7. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. – М.: Наука, 1979.
8. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. – М.: Наука, 1980.
9. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. - М.: Наука, 1980.