Федеральное агентство по образованию
ГОУ ВПО «Уральский государственный технический университет – УПИ»

Е.А. Савина

СТАТИКА

Учебное электронное текстовое издание
Подготовлено кафедрой «Теоретическая механика»
Научный редактор: доц., канд. техн. наук А.А. Мироненко

Сборник заданий для контрольных работ и методические указания к их решению для студентов всех форм обучения всех специальностей.

Данная работа содержит контрольные задания на равновесие произвольной плоской системы сил для одного и двух тел, а также на равновесие произвольной пространственной системы сил. Приведены примеры выполнения заданий.

Екатеринбург
2007

ОГЛАВЛЕНИЕ

ТЕМА 1. УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

План решения задач

1. Выбрать объект, равновесие которого необходимо рассмотреть.
2. Изобразить на рисунке все активные силы, приложенные к телу. Применив аксиому связей, мысленно отбросить связи и заменить их действие реакциями этих связей.
3. Для полученной системы сил записать уравнения равновесия.
4. Выбрать систему координат. Оси координат рекомендуется выбирать так, чтобы они оказались параллельными или перпендикулярными возможно большему числу неизвестных сил. Записать уравнения равновесия для полученной системы сил в аналитическом виде.
5. Решить уравнения, определив искомые неизвестные.

Пусть задана произвольная плоская система сил $\{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_{2,\ldots,} \mathbf{F}_{n,}\}$, действующих на твердое тело. Условия равновесия данной системы сил имеют вид

$$\sum F_{ix} = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0;$$

$$\sum m_A(\mathbf{F}_i) = 0.$$

Для составления уравнения моментов необходимо вычислить момент каждой силы $\mathbf{F}_i$ относительно точки А.

Алгебраическим моментом силы относительно центра называется взятое с соответствующим знаком произведение модуля силы на плечо.

$$m_O(\mathbf{F}) = \pm F h$$

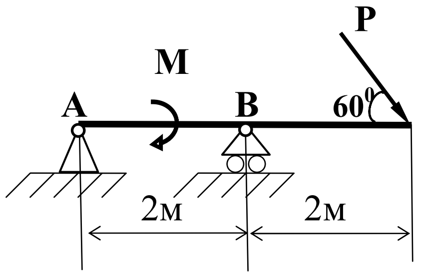
Знак плюс выбирается в том случае, если сила стремится вращать тело около центра против хода часовой стрелки.

Плечо силы (h) − это кратчайшее расстояние от центра до линии действия силы.

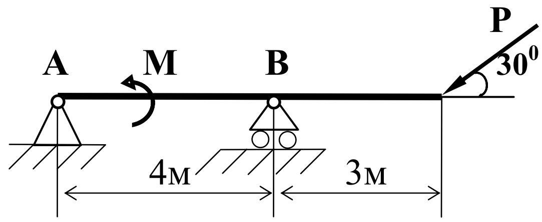
Момент силы относительно центра равен нулю, когда центр лежит на линии действия силы.

Задание 1.1. Условия равновесия произвольной плоской системы сил (1 тело)

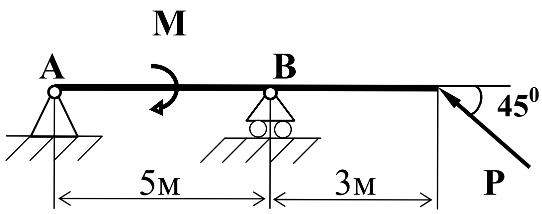
Определить реакции опор балки AB, находящейся под действием произвольной плоской системы сил. Размеры указаны на рисунках. Весом балки пренебречь.



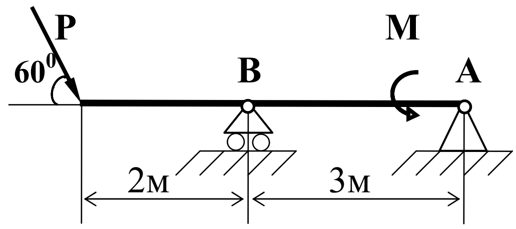
Вариант 1. P = 4 кН; M = 5 кНм.



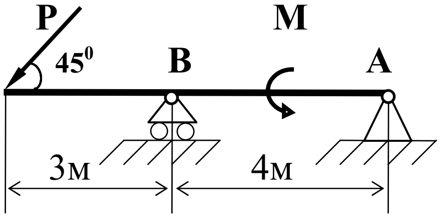
Вариант 2. P = 6 кН; M = 3 кНм.



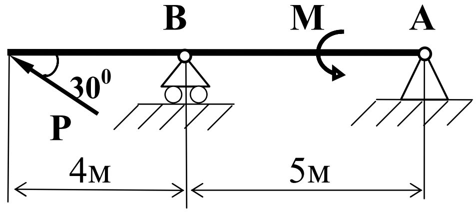
Вариант 3. P = 4 кН; M = 3 кНм.



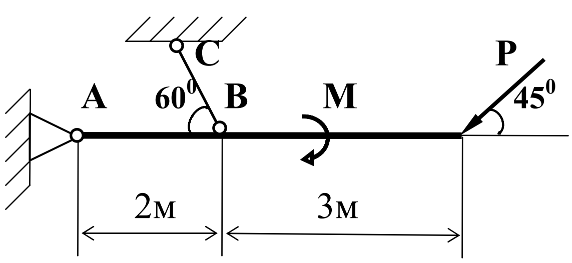
Вариант 4. P = 5 кН; M = 2 кНм.

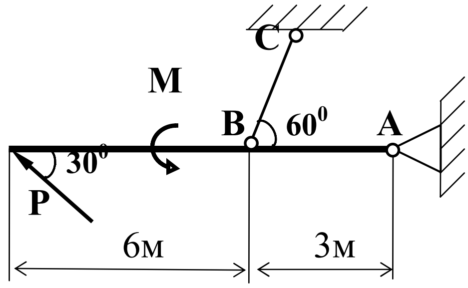


Вариант 5. P = 2 кН; M = 3 кНм.



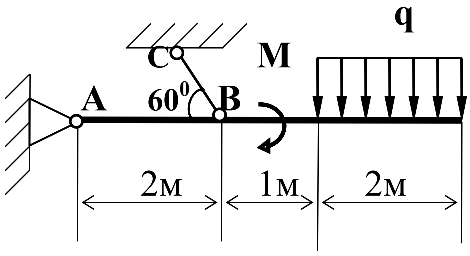
Вариант 6. P = 3 кН; M = 4 кНм.

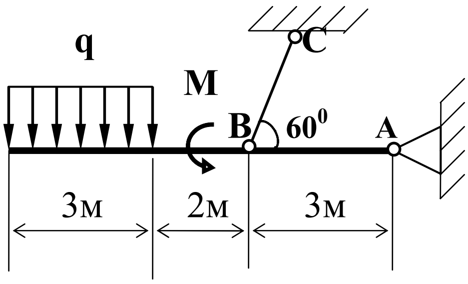




Вариант 7. P = 2 кН; M = 5 кНм.

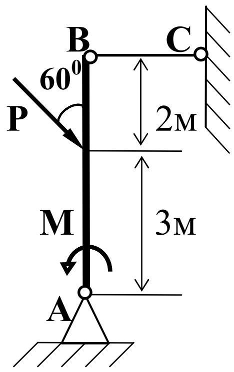
Вариант 8. P = 3 кН; M = 4 кНм.

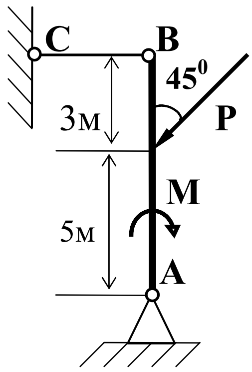




Вариант 9. q = 3 кН/м; M = 5 кНм.

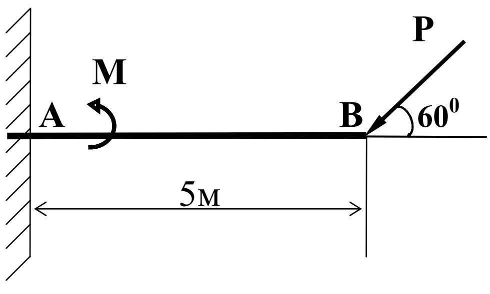
Вариант 10. q = 2 кН/м; M = 4 кНм.

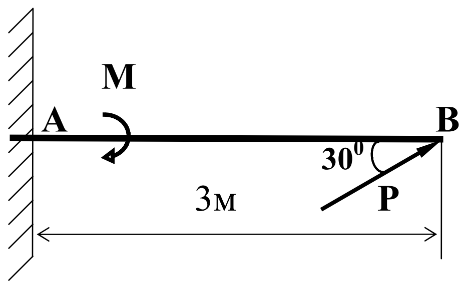




Вариант 11. P = 3 кН; M = 4 кНм.

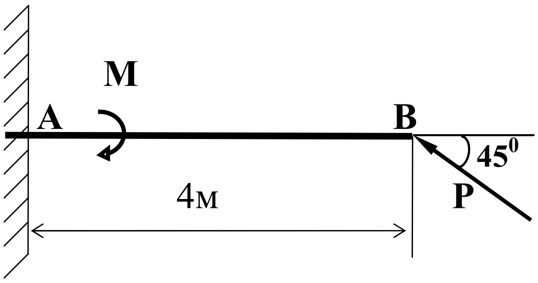
Вариант 12. P = 4 кН; M = 3 кНм.



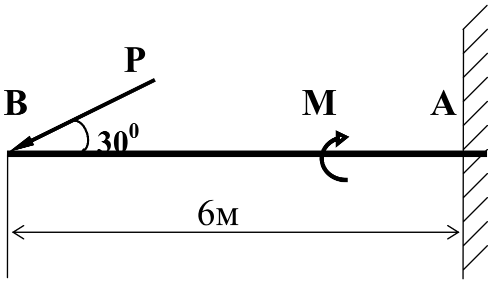


Вариант 13. P = 4 кН; M = 5 кНм.

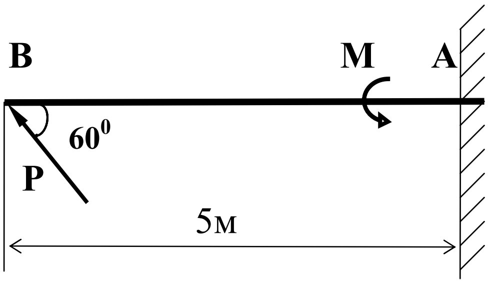
Вариант 14. P = 2 кН; M = 7 кНм.



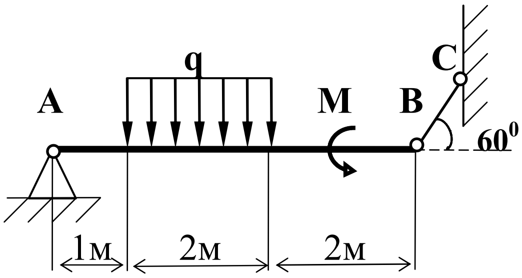
Вариант 15. Р = 6 кН; М = 2 кНм.



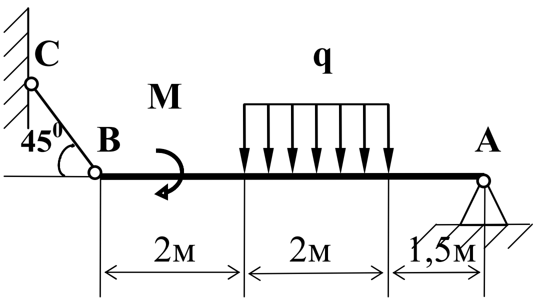
Вариант 16. Р = 4 кН; М = 2 кНм.



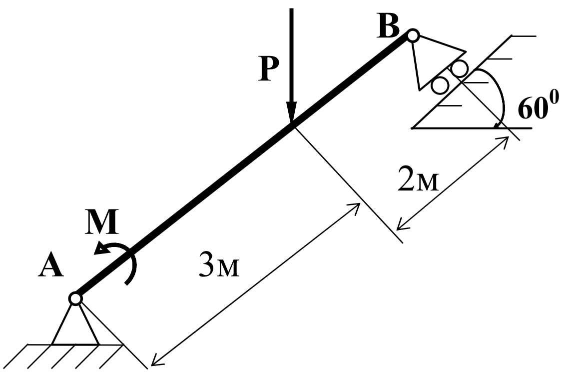
Вариант 17. Р = 4 кН; М = 3 кНм.



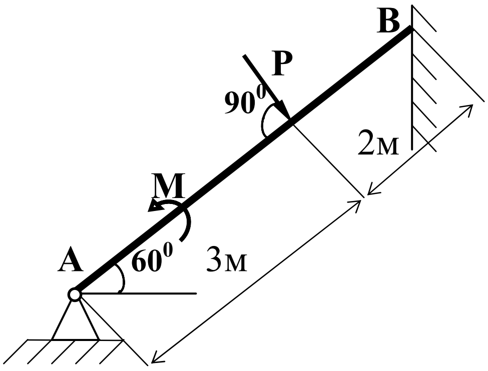
Вариант 18. q = 2 Кн/м; М = 2 кНм.



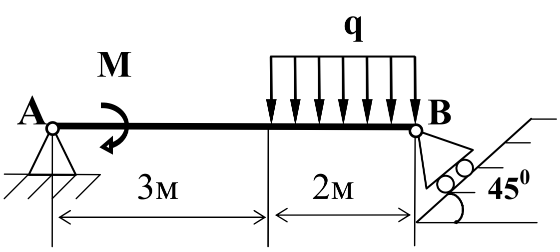
Вариант 19. q = 2 кН/м; М = 5 кНм.



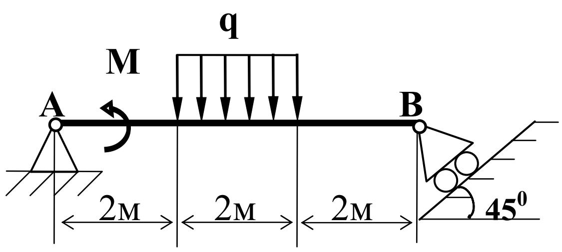
Вариант 20. Р = 3 кН; М = 4 кНм.



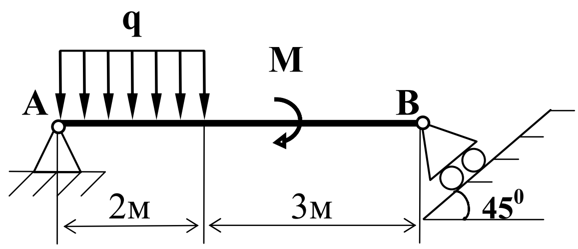
Вариант 21. Р = 2 кН; М = 5 кНм.



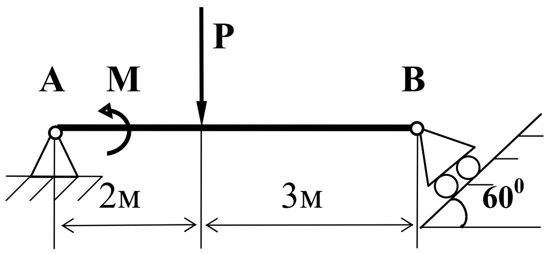
Вариант 22. q = 2 кН/м; М = 5 кНм.



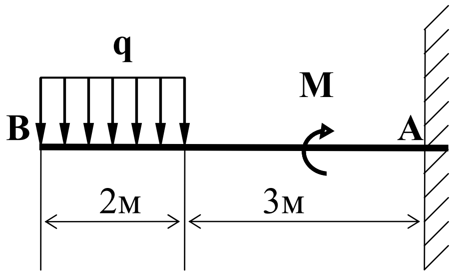
Вариант 23. q = 2 кН/м; M = 3 кНм.



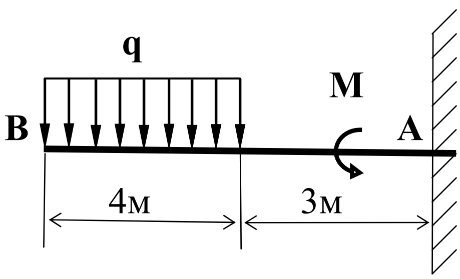
Вариант 24. q = 3 кН/м; M = 4 кНм.



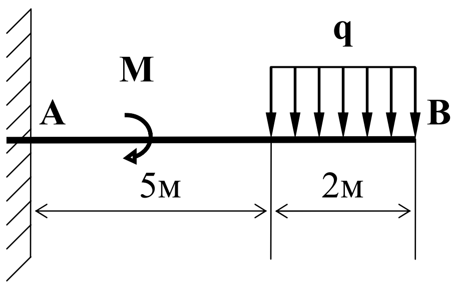
Вариант 25. P = 4 кН; M = 3 кНм.



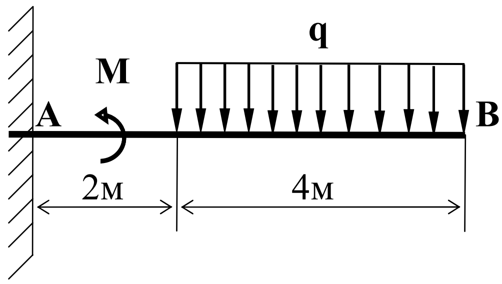
Вариант 26. q = 3 кН/м; M = 4 кНм.



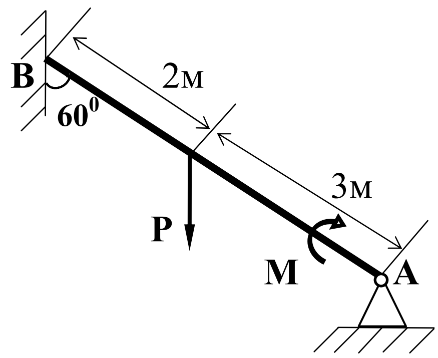
Вариант 27. q = 2 кН/м; M = 3 кНм.



Вариант 28. q = 3 кН/м; M = 5 кНм.



Вариант 29. q = 3 кН/м; M = 4 кНм.



Вариант 30. P = 4 кН; M = 5 кНм.

Пример выполнения задания 1.1

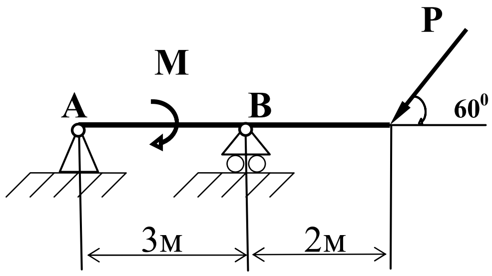


Рис.1

Определить реакции опор A и B балки, находящейся под действием сосредоточенной силы P = 6 кН и пары сил с моментом M = 3 кНм.

Размеры указаны на рис. 1.

Весом балки пренебречь.

Решение задачи

1. Рассмотрим равновесие балки AB.
2. Покажем на рисунке активные и реактивные силы, приложенные к балке (рис. 2).

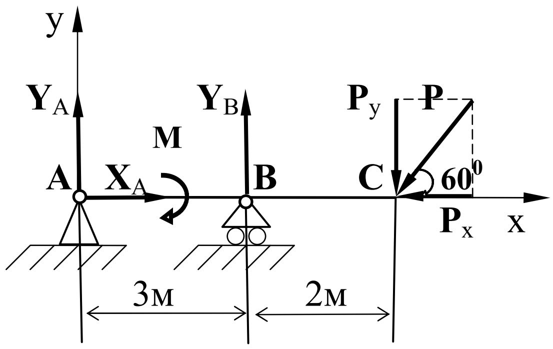


Рис. 2

Активные:

P – сосредоточенная сила, приложенная к балке в точке C. Разложим силу **P** на две взаимно перпендикулярные составляющие:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P_x} + \mathbf{P_y},$$

здесь

$|\mathbf{P_x}| = P\cos 60^0;$

$|\mathbf{P_y}| = P\sin 60^0.$

M – момент пары сил, действующей в плоскости чертежа.

Реактивные:

A – неподвижная опора. Эта связь может быть представлена двумя взаимно перпендикулярными составляющими, которые обозначим $\mathbf{X}_A$, $\mathbf{Y}_A$.

B – подвижная опора. Реакция связи $\mathbf{Y}_B \perp Ax$.

3. Получили произвольную плоскую систему сил. Запишем соответствующие условия равновесия:

   $\sum F_{ix} = 0;$

   $\sum F_{iy} = 0;$

   $\sum m_A(\mathbf{F}_i) = 0.$

4. В выбранной системе координат Axy составим уравнения равновесия для полученной системы сил:

   $\sum F_{ix} = X_A - P\cos 60^0 = 0;$ (1)

   $\sum F_{iy} = Y_A + Y_B - P\sin 60^0 = 0.$ (2)

Для составления уравнения моментов вычислим момент каждой силы относительно точки А:

$m_A(\mathbf{X_A}) = m_A(\mathbf{Y_A}) = 0$, т.к. точка А лежит на линии действия силы;

$m_A(\mathbf{Y_B}) = 3\,Y_B$, т.к. $h(\mathbf{Y_B}) = AB = 3$м и сила стремится повернуть тело около точки А против хода часовой стрелки.

Вычислим момент силы **P** относительно точки А. По теореме Вариньона:

$m_A(\mathbf{P}) = m_A(\mathbf{P_x}) + m_A(\mathbf{P_y});$

$m_A(\mathbf{P_x}) = 0$, т.к. точка А лежит на линии действия силы;

$m_A(\mathbf{P_y}) = -5\,\mathbf{P}_y = -5\,P\sin 60^0$, т.к. $h(\mathbf{P_y}) = AC = 5$м и сила стремится повернуть тело около точки А по ходу часовой стрелки.

Следовательно, $m_A(\mathbf{P}) = -5\,P\sin 60^0$.

Таким образом, уравнение моментов всех сил относительно точки А имеет вид $\sum m_A(\mathbf{F}_i) = 3\,Y_B - 5\,P\sin 60^0 - M = 0.$ (3)

5. Решим полученную систему уравнений.

Из (1) $X_A = P\cos 60^0 = ½P = 3$кН.

Из (3) $Y_B = ⅓\,(5\,P\sin 60^0 + M) = ⅓\,(5\,\sqrt{3}\,½\,6 + 3) = 5\,\sqrt{3} + 1 = 9{,}66$кН.

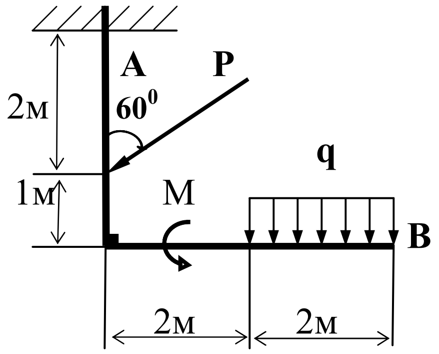
Из (2) $Y_A = P\sin 60^0 - Y_B = \sqrt{3}\,½\,6 - 9{,}66 = -4{,}46$ кН.

Ответ: $X_A = 3$кН; $Y_A = -4{,}46$ кН; $Y_B = 9{,}66$кН.

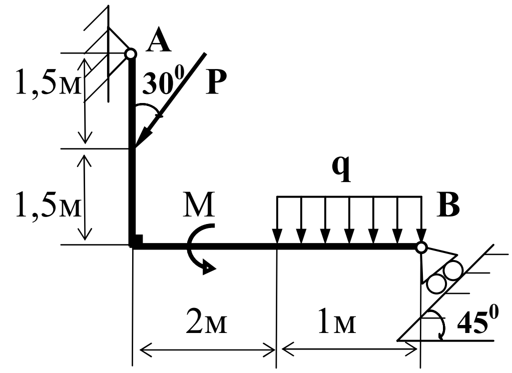
Знак указывает, что сила $\mathbf{Y}_A$ направлена противоположно показанной на рис. 2.

Задание 1.2. Условия равновесия произвольной плоской системы сил (1 тело)

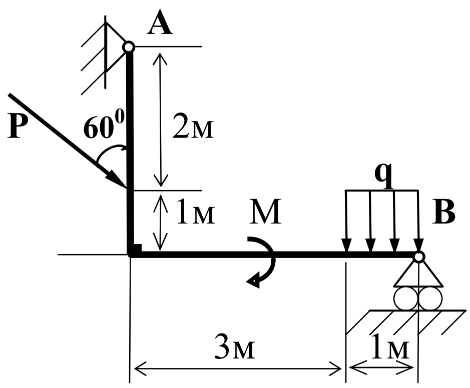
Определить реакции опор рамы АВ, находящейся под действием произвольной плоской системы сил. Размеры указаны на рисунках. Весом рамы пренебречь.



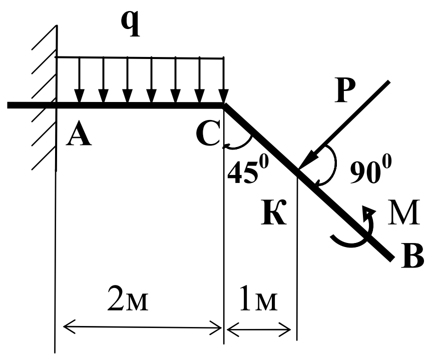
Вариант 1. Р = 10 кН, М = 6 кНм, q = 2 кН/м.



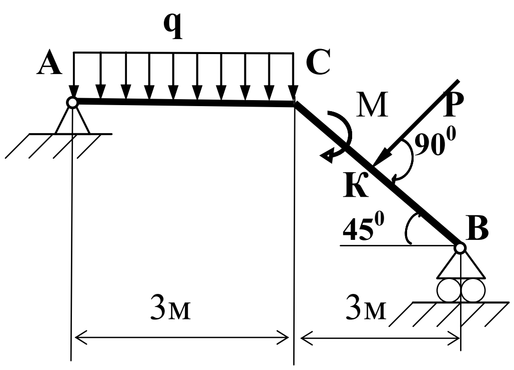
Вариант 2. Р = 20 кН, М = 5 кНм, q = 2 кН/м.



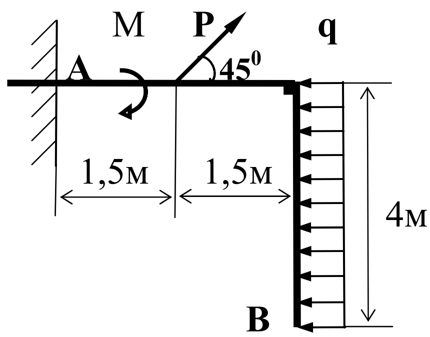
Вариант 3. Р = 20 кН, М = 5 кНм, q = 4 кН/м.



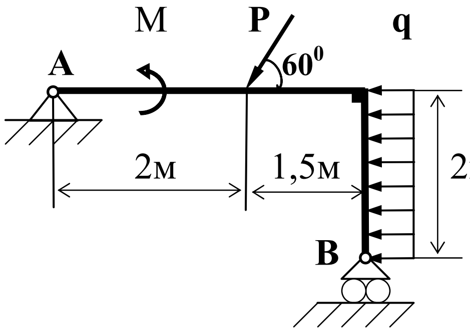
Вариант 4. Р = 20 кН, М = 8 кНм, q = 2 кН/м, СК = КВ.



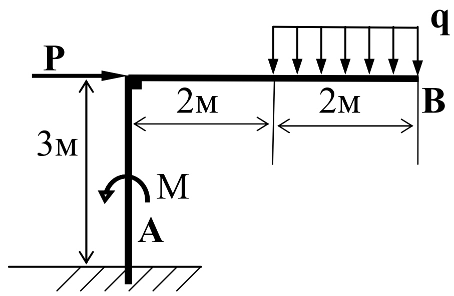
Вариант 5. Р = 10 кН, М = 4 кНм, q = 2 кН/м, СК = КВ.



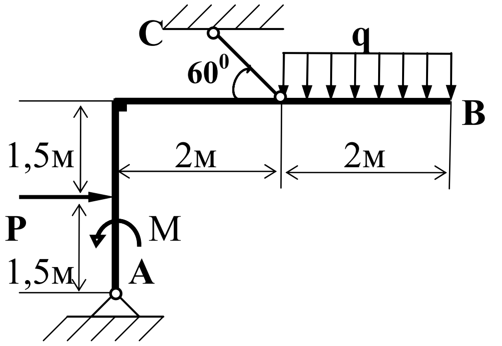
Вариант 6. Р = 10 кН, М = 6 кНм, q = 3 кН/м.



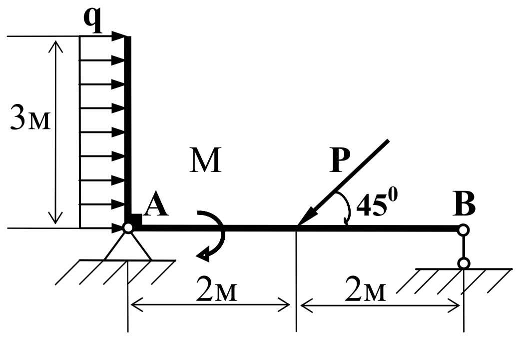
Вариант 7. P = 20 кН, M = 4 кНм, q = 2 кН/м.



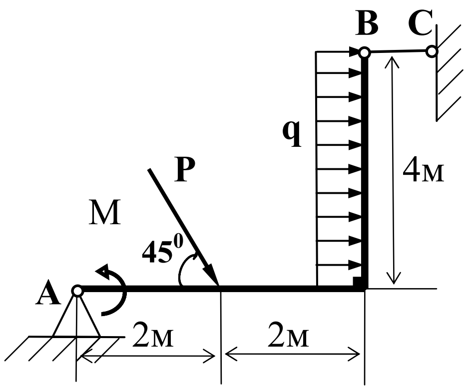
Вариант 8. P = 10 кН, M = 5 кНм, q = 3 кН/м.



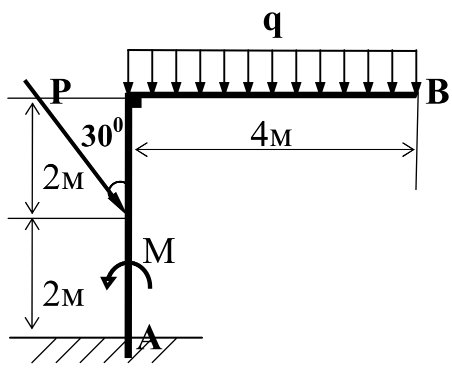
Вариант 9. P = 20 кН, M = 8 кНм, q = 3 кН/м.



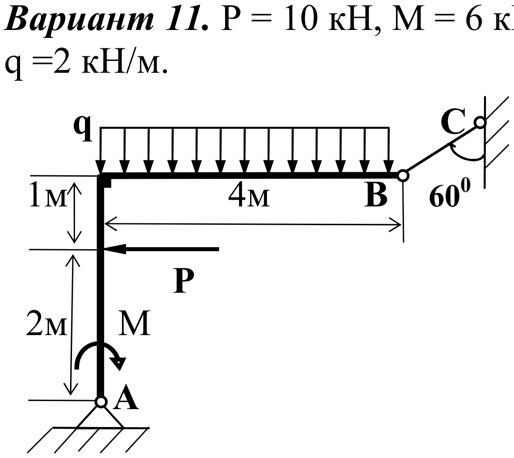
Вариант 10. P = 10 кН, M = 6 кНм, q = 2 кН/м.



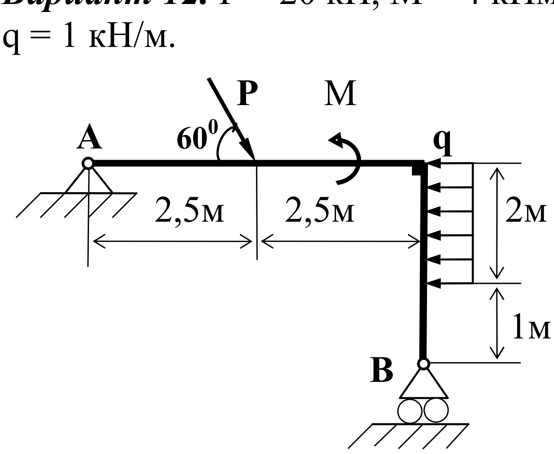
Вариант 11. P = 10 кН, M = 6 кНм, q =2 кН/м.



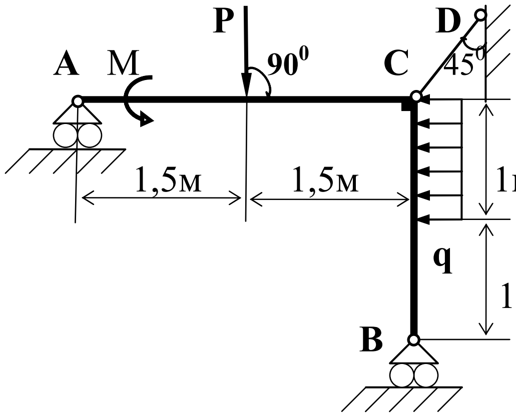
Вариант 12. P = 20 кН, M = 4 кНм, q = 1 кН/м.



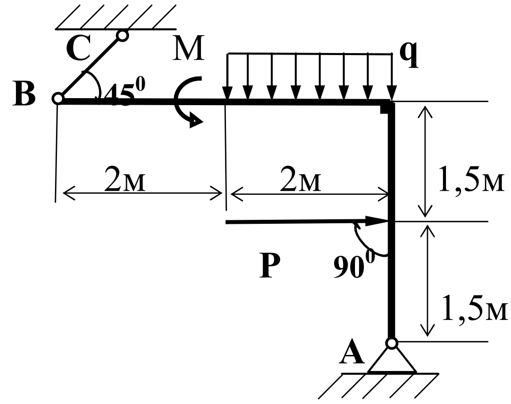
Вариант 13. P = 20 кН, M = 8 кНм, q = 2 кН/м.



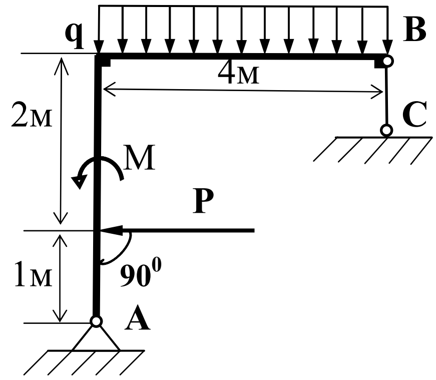
Вариант 14. P = 10 кН, M = 6 кНм, q = 3 кН/м.



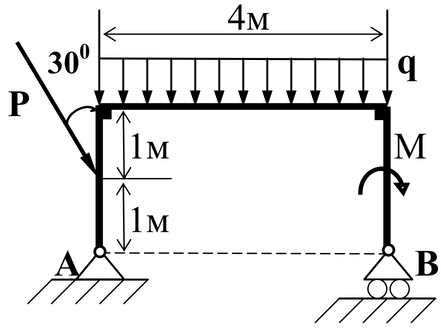
Вариант 15. P = 20 кН, M = 3 кНм, q = 2 кН/м.



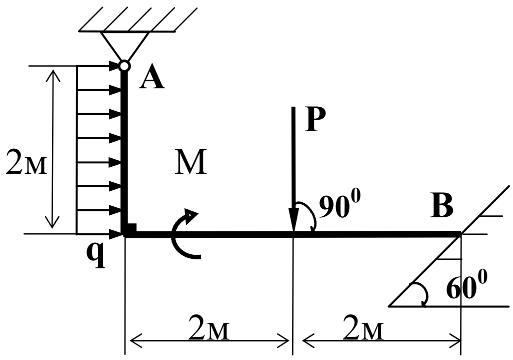
Вариант 16. P = 10 кН, M = 4 кНм, q = 2 кН/м.



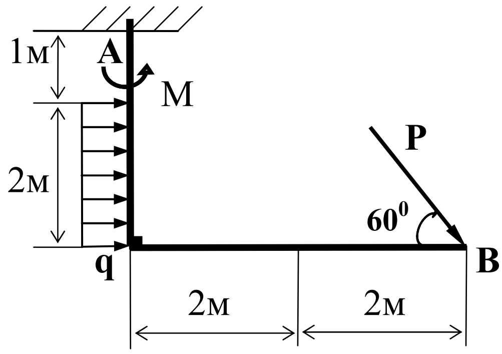
Вариант 17. P = 10 кН, M = 6 кНм, q = 2 кН/м.



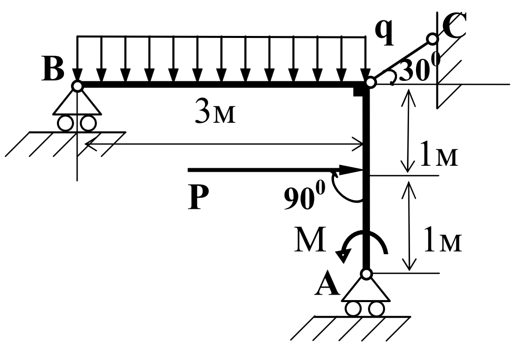
Вариант 18. P = 10 кН, M = 8 кНм, q = 2 кН/м.



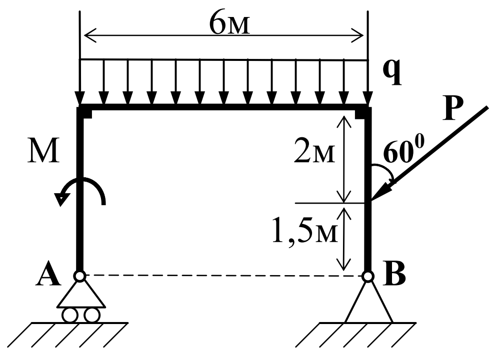
Вариант 19. P = 20 кН, M = 6 кНм, q = 3 кН/м.



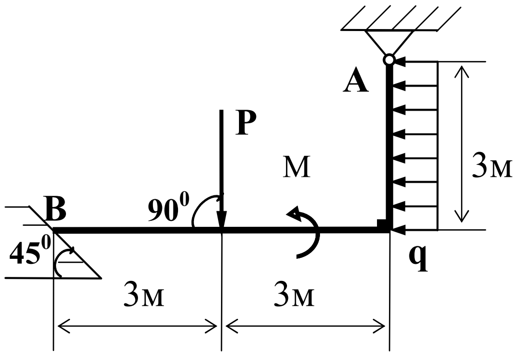
Вариант 20. P = 10 кН, M = 4 кНм, q = 2 кН/м.



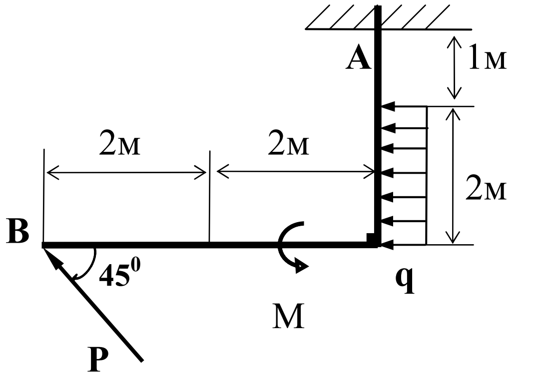
Вариант 21. P = 20 кН, M = 8 кНм, q = 2 кН/м.



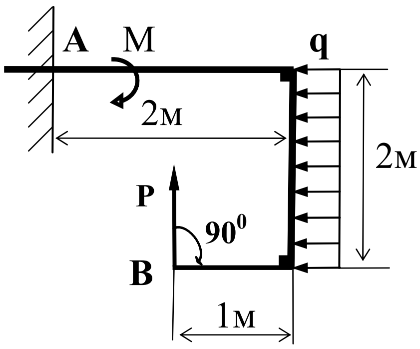
Вариант 22. P = 10 кН, M = 6 кНм, q = 1 кН/м.



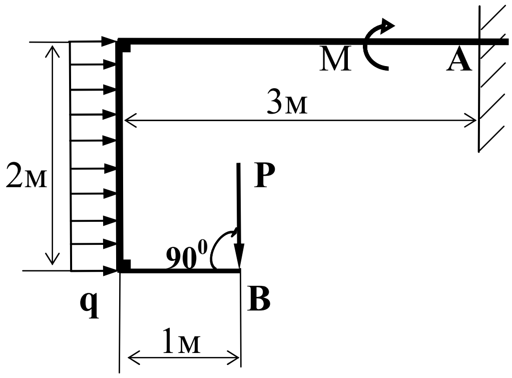
Вариант 23. P = 10 кН, M = 8 кНм, q = 2 кН/м.



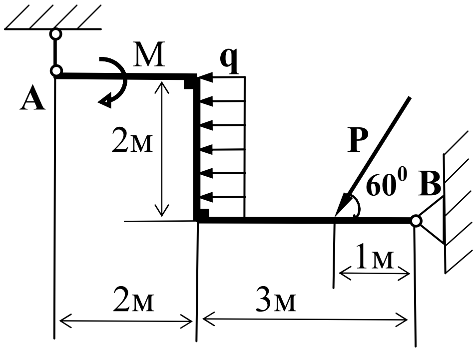
Вариант 24. P = 12 кН, M = 4 кНм, q = 3 кН/м.



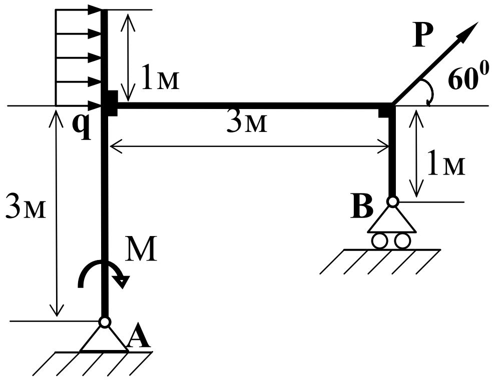
Вариант 25. P = 10 кН, M = 8 кНм, q = 3 кН/м.



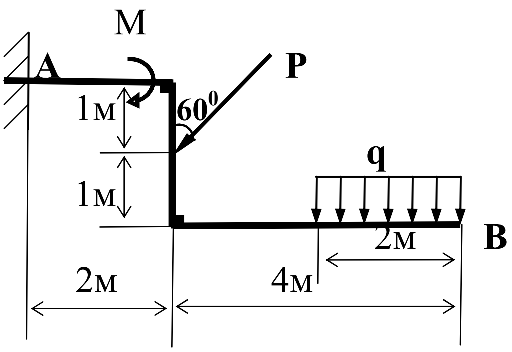
Вариант 26. P = 12 кН, M = 6 кНм, q = 2 кН/м.



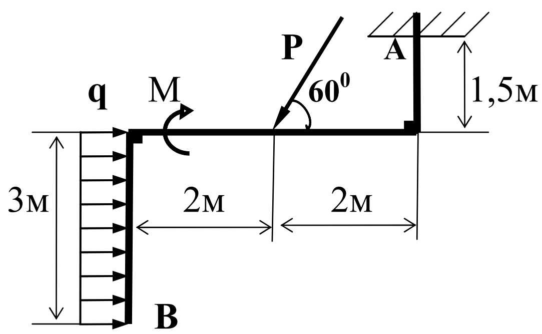
Вариант 27. P = 10 кН, M = 4 кНм, q =2 кН/м.



Вариант 28. P = 12 кН, M = 8 кНм, q = 2 кН/м.



Вариант 29. P = 10 кН, M = 6 кНм, q = 3 кН/м.



Вариант 30. P = 12 кН, M = 8 кНм, q = 2 кН/м.

Пример выполнения задания 1.2

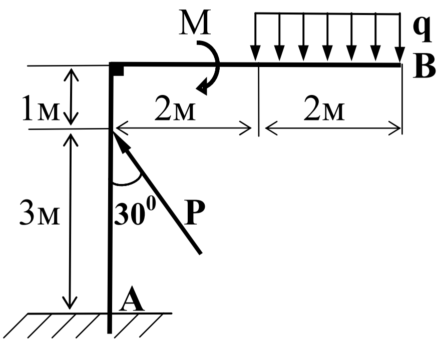


Рис. 3

Определить реакции опоры А рамы АВ, находящейся под действием сосредоточенной силы Р = 10 кН, пары сил с моментом М = 5 кНм и равномерно распределенной нагрузки интенсивностью q = 3 кН/м. Размеры указаны на рис. 3. Весом рамы пренебречь.

Решение задачи

1. Рассмотрим равновесие рамы АВ.
2. Покажем на рисунке активные и реактивные силы, приложенные к балке (рис. 4).

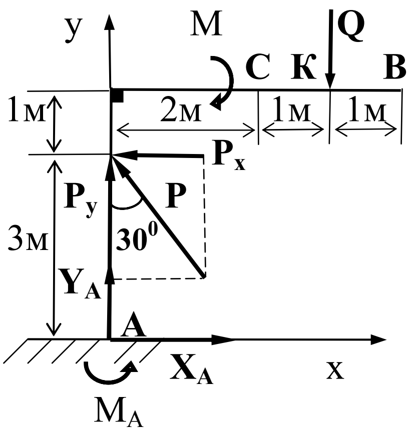


Рис. 4

Активные:

Р − сосредоточенная сила. Разложим силу **Р** на две взаимно перпендикулярные составляющие:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_x + \mathbf{P}_y,$$

здесь

$$|\mathbf{P}_x| = P \sin 30^0;$$

$$|\mathbf{P}_y| = P \cos 30^0.$$

М − момент пары сил, действующей в плоскости чертежа.

Q – сила, которой заменили равномерно распределенную нагрузку интенсивностью q. Сила приложена в середине участка СВ и |**Q**| = 2q = 6 кН.

Реактивные:

А – жесткая заделка. Эта связь может быть заменена одной силой, представленной двумя взаимно перпендикулярными составляющими, которые обозначим $\mathbf{X}_A$, $\mathbf{Y}_A$, и парой сил с моментом M_A.

3. Получили произвольную плоскую систему сил. Запишем соответствующие условия равновесия:

   $\sum F_{ix} = 0;$

   $\sum F_{iy} = 0;$

   $\sum m_A(\mathbf{F}_i) = 0.$

4. В выбранной системе координат Аху составим уравнения равновесия для полученной системы сил:

$$\sum F_{ix} = X_A - P\sin 30^0 = 0; \qquad (1)$$

$$\sum F_{iy} = Y_A + P\cos 30^0 - Q = 0. \qquad (2)$$

Для составления уравнения моментов вычислим момент каждой силы относительно точки А:

$m_A(\mathbf{X}_A) = m_A(\mathbf{Y}_A) = 0$, т.к. точка А лежит на линии действия силы;

$m_A(\mathbf{Q}) = -3Q$, т.к. $h(\mathbf{Q}) = 3$ м и сила стремится повернуть тело около точки А по ходу часовой стрелки.

Вычислим момент силы **P** относительно точки А. По теореме Вариньона:

$m_A(\mathbf{P}) = m_A(\mathbf{P_x}) + m_A(\mathbf{P_y});$

$m_A(\mathbf{P_y}) = 0$, т.к. точка А лежит на линии действия силы;

$m_A(\mathbf{P_x}) = 3P_x = 3P\sin 30^0$, т.к. $h(\mathbf{P_x}) = 3$ м и сила стремится повернуть тело около точки А против хода часовой стрелки.

Следовательно, $m_A(\mathbf{P}) = 3P\sin 30^0.$

Таким образом, уравнение моментов всех сил относительно точки А имеет вид

$$\sum m_A(\mathbf{F}_i) = M_A + 3P\sin 30^0 - M - 3Q = 0. \qquad (3)$$

5. Решим полученную систему уравнений.

Из (1) $X_A = P\sin 30^0 = ½10 = 5$ кН.

Из (2) $Y_A = Q - P\cos 30^0 = 6 - 5\sqrt{3} = -2{,}66$ кН.

Из (3) $M_A = M + 3Q - 3P\sin 30^0 = 5 + 18 - 15 = 8$ кНм.

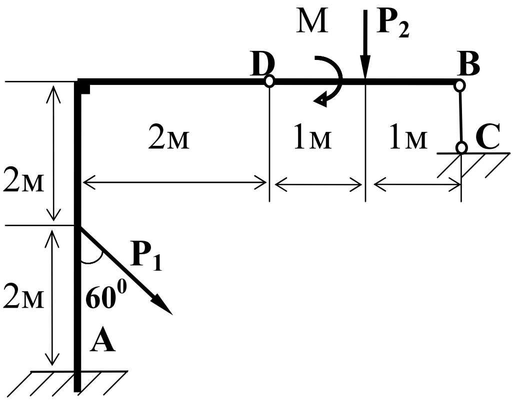
Ответ: $X_A = 5$ кН; $Y_A = -2{,}66$ кН; $M_A = 8$ кНм.

Знак указывает, что сила $\mathbf{Y}_A$ направлена противоположно показанной на рис. 4.

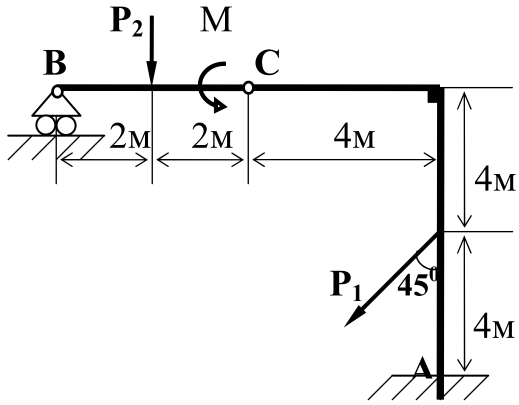
Задание 1.3. Условия равновесия произвольной плоской системы сил (2 тела)

Определить опорные реакции и силы взаимодействия между частями составной конструкции АВ, находящейся под действием произвольной плоской системы сил.

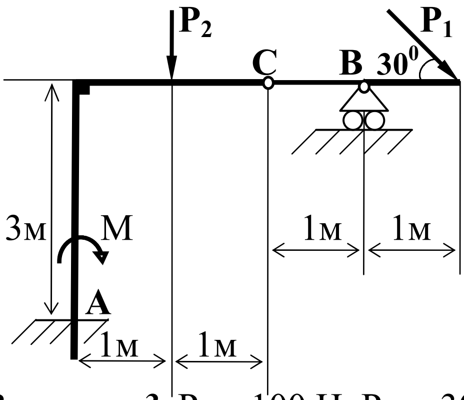
Размеры указаны на рисунках. Весом частей составной конструкции АВ пренебречь.



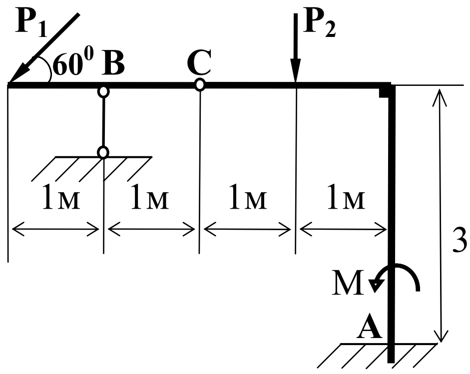
Вариант 1. P_1 = 180 Н, P_2 = 80 Н, М = 220Нм.



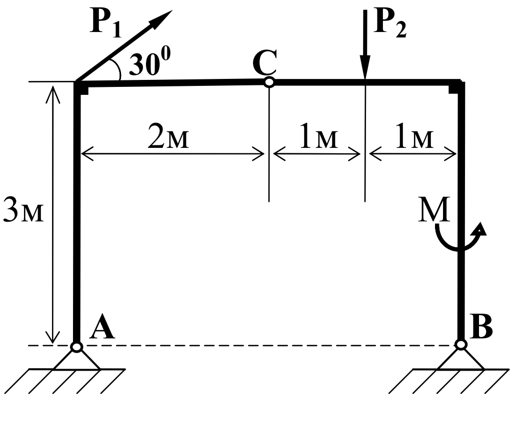
Вариант 2. P_1 = 200 Н, P_2 = 60 Н, М = 180 Нм.



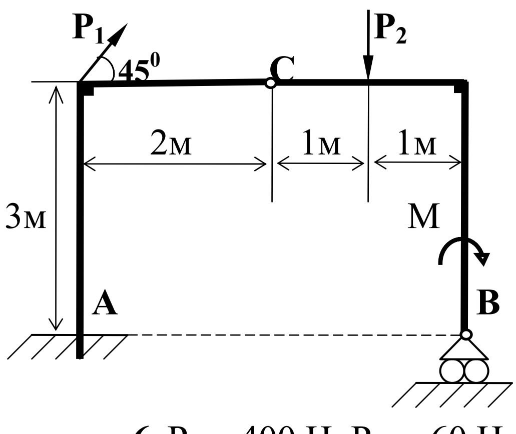
Вариант 3. P_1 = 100 Н, P_2 = 300 Н, М = 400Нм.



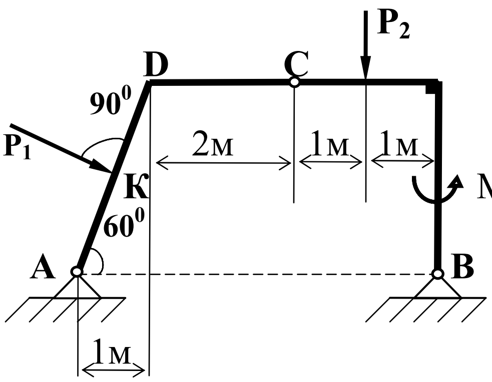
Вариант 4. P_1 = 80 Н, P_2 = 100 Н, М = 200 Нм.



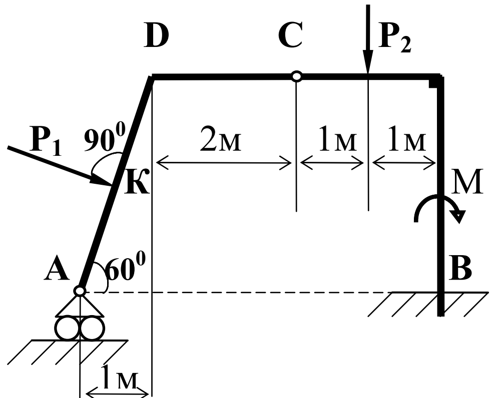
Вариант 5. P_1 = 300 Н, P_2 = 80 Н, М = 220Нм.



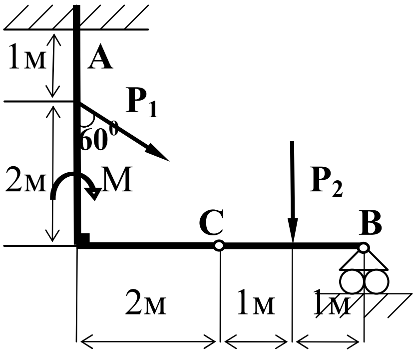
Вариант 6. P_1 = 400 Н, P_2 = 60 Н, М = 300 Нм.



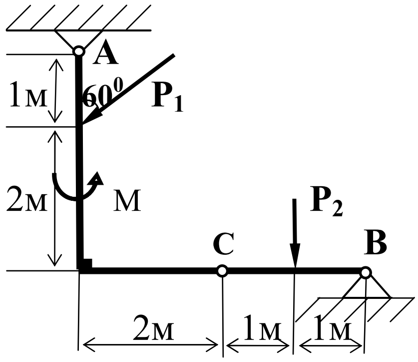
Вариант 7. P_1 = 300 Н, P_2 = 80 Н, М = 220 Нм, АК = КD.



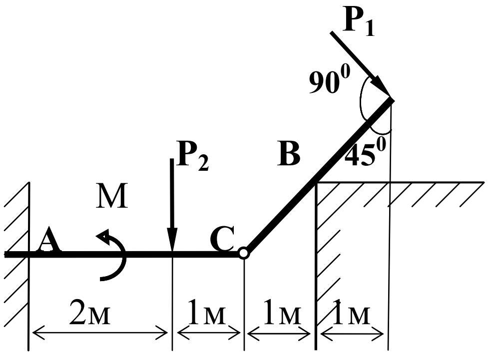
Вариант 8. P_1 = 280 Н, P_2 = 100 Н, М = 200 Нм, АК = КD.



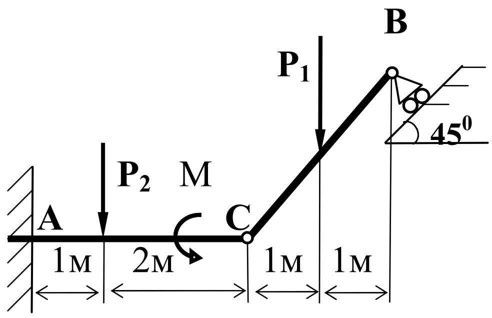
Вариант 9. P_1 = 320 Н, P_2 = 150 Н, М = 400 Нм.



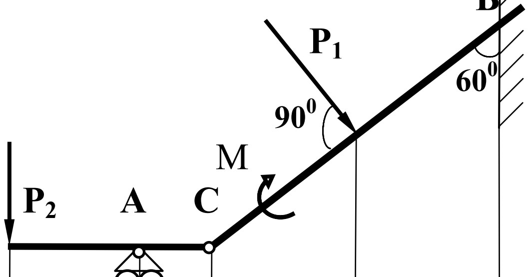
Вариант 10. P_1 = 280 Н, P_2 = 60 Н, М = 150 Нм.



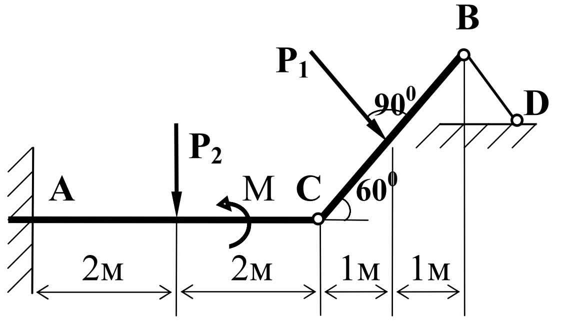
Вариант 11. P_1 = 300 Н, P_2 = 80 Н, М = 400 Нм.



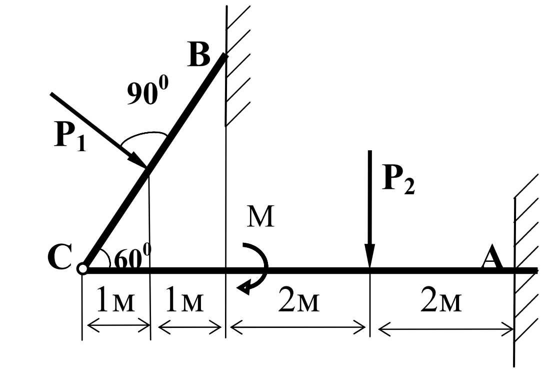
Вариант 12. P_1 = 300 Н, P_2 = 360 Н, М = 600 Нм.



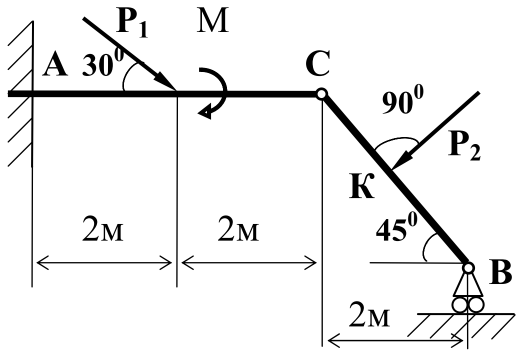
Вариант 13. P_1 = 120 Н, P_2 = 120 Н, М = 300 Нм.



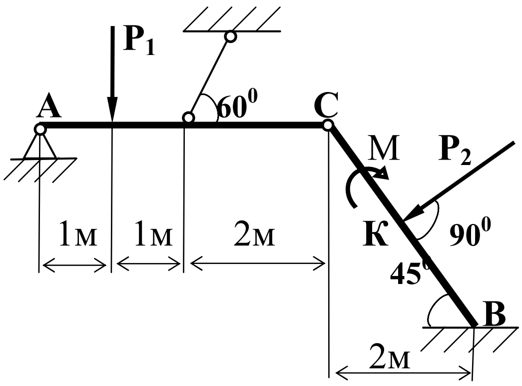
Вариант 14. P_1 = 400 Н, P_2 = 150 Н, М = 300 Нм.



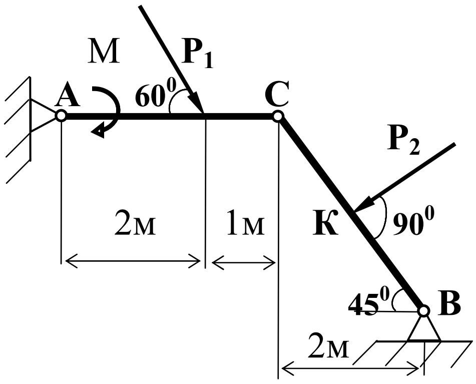
Вариант 15. P_1 = 100 Н, P_2 = 180 Н, M = 500 Нм.



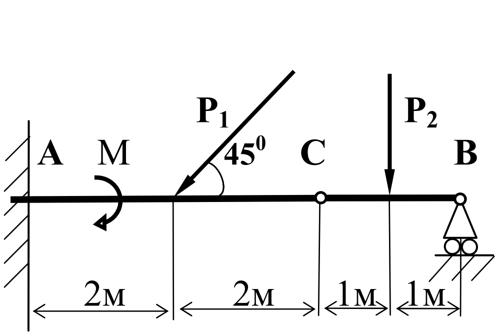
Вариант 16. P_1 = 320 Н, P_2 = 200 Н, M = 140 Нм, CK = KB.



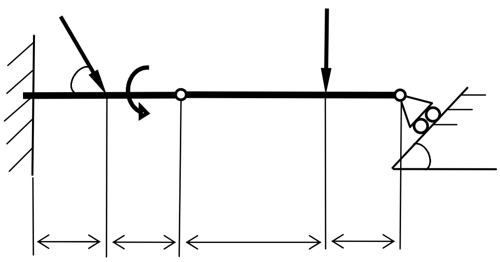
Вариант 17. P_1 = 180 Н, P_2 = 680 Н, M = 200 Нм, CK = KB.



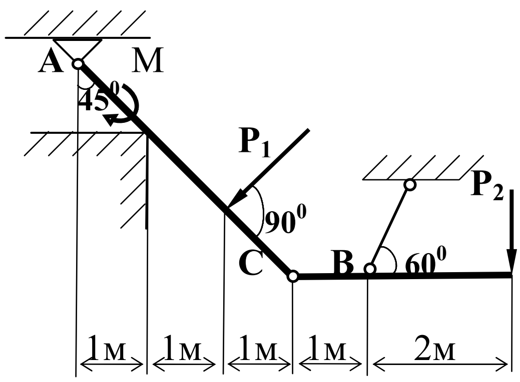
Вариант 18. P_1 = 300 Н, P_2 = 200 Н, M = 480 Нм, CK = KB.



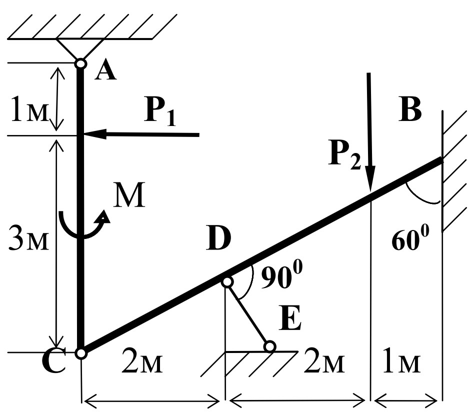
Вариант 19. P_1 = 250 Н, P_2 = 80 Н, M = 200 Нм.



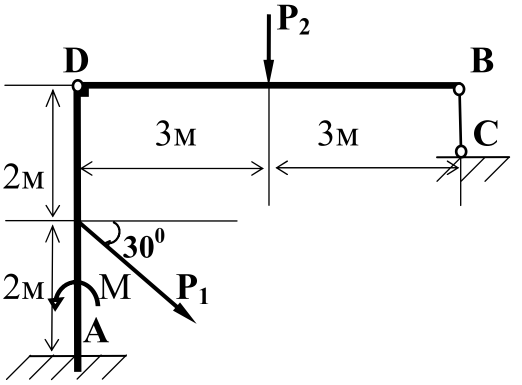
Вариант 20. P_1 = 400 Н, P_2 = 360 Н, M = 600 Нм.



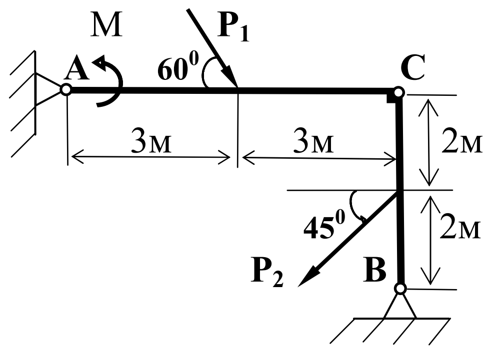
Вариант 21. P_1 = 200 Н, P_2 = 140 Н, M = 500 Нм.



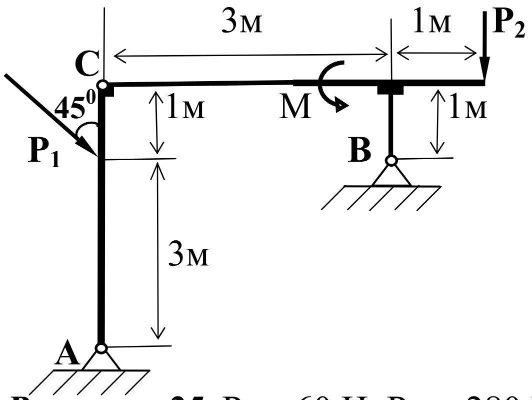
Вариант 22. P_1 = 400 Н, P_2 = 620 Н, M = 800 Нм.



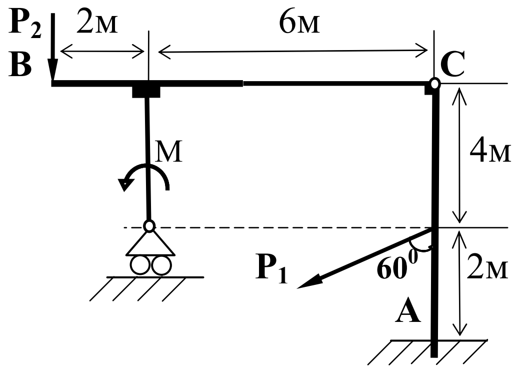
Вариант 23. $P_1 = 200$ Н, $P_2 = 300$ Н, $M = 250$ Нм.



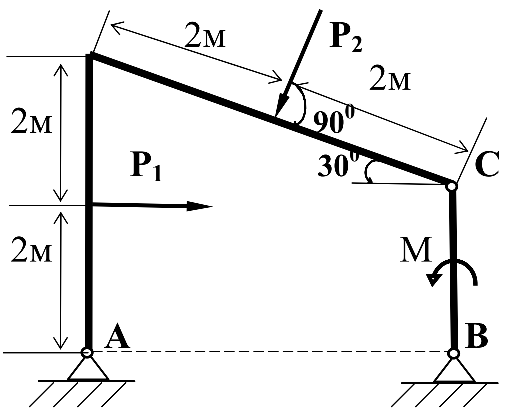
Вариант 24. $P_1 = 200$ Н, $P_2 = 300$ Н, $M = 280$ Нм.



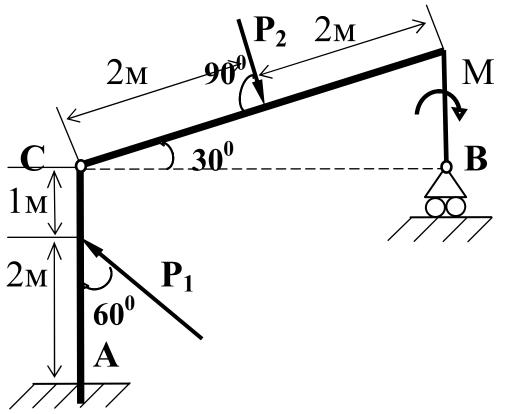
Вариант 25. $P_1 = 60$ Н, $P_2 = 280$ Н, $M = 300$ Нм.



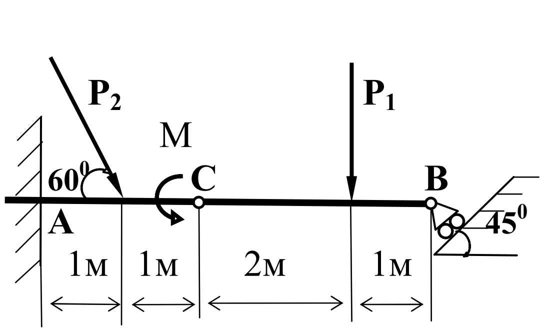
Вариант 26. $P_1 = 100$ Н, $P_2 = 60$ Н, $M = 180$ Нм.



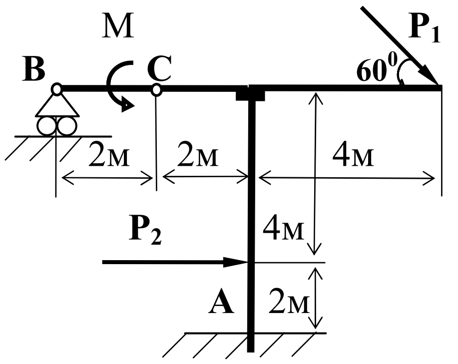
Вариант 27. $P_1 = 300$ Н, $P_2 = 180$ Н, $M = 280$ Нм.



Вариант 28. $P_1 = 380$ Н, $P_2 = 80$ Н, $M = 200$ Нм.



Вариант 29. $P_1 = 160$ Н, $P_2 = 200$ Н, $M = 300$ Нм.



Вариант 30. $P_1 = 100$ Н, $P_2 = 60$ Н, $M = 180$ Нм.

Пример выполнения задания 1.3

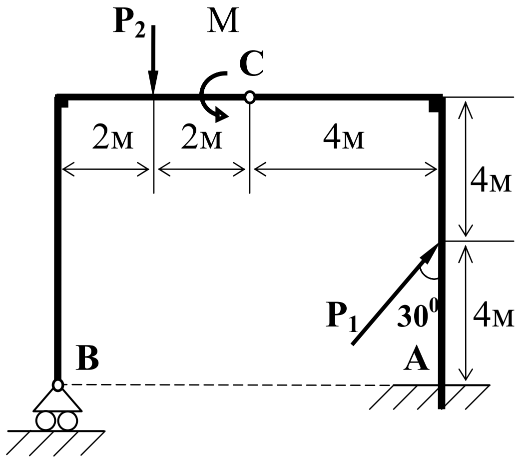


Рис. 5

Определить опорные реакции и силы взаимодействия между частями составной конструкции АВ, находящейся под действием:

сосредоточенной силы P_1 = 100 Н,

сосредоточенной силы P_2 = 80 Н,

пары сил с моментом М = 160 Нм.

Размеры указаны на рис. 5. Весом конструкции пренебречь.

Решение задачи

Для определения искомых реакций рассмотрим сначала равновесие всей конструкции АВ, а затем равновесие ее левой части АС.

1. Рассмотрим равновесие всей конструкции АВ.
2. Покажем на рисунке активные и реактивные силы, приложенные к конструкции (рис. 6).

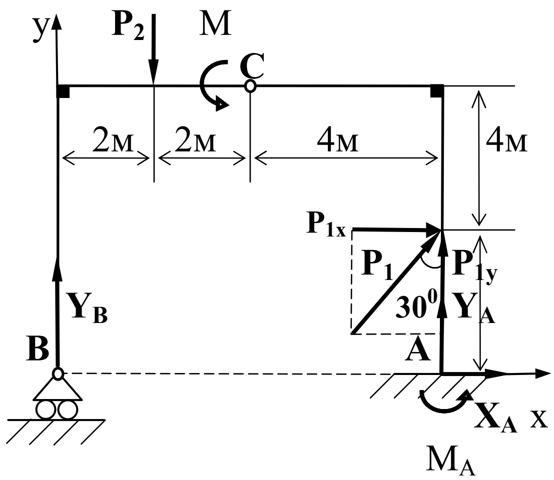


Рис. 6

Активные:

$\mathbf{P_1}$ − сосредоточенная сила. Разложим силу $\mathbf{P_1}$ на две взаимно перпендикулярные составляющие:

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_{1x} + \mathbf{P}_{1y},$$

здесь

$$|\mathbf{P}_{1x}| = P_1 \sin 30^0;$$

$$|\mathbf{P}_{1y}| = P_1 \cos 30^0.$$

$\mathbf{P}_2$ − сосредоточенная сила.

М − момент пары сил, действующей в плоскости чертежа.

Реактивные:

А – жесткая заделка. Эта связь может быть заменена одной силой, представленной двумя взаимно перпендикулярными составляющими, которые обозначим $\mathbf{X}_A$, $\mathbf{Y}_A$, и парой сил с моментом M_A.

В – подвижная опора. Реакция связи $\mathbf{Y}_B \perp$ Вх.

3. Получили произвольную плоскую систему сил. Запишем соответствующие условия равновесия:

$$\sum F_{ix} = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0;$$

$$\sum m_A(\mathbf{F}_i) = 0.$$

4. В выбранной системе координат Вху составим уравнения равновесия для полученной системы сил:

$$\sum F_{ix} = X_A + P_1 \sin 30^0 = 0; \qquad (1)$$

$$\sum F_{iy} = Y_A + Y_B - P_2 + P_1 \cos 30^0 = 0. \qquad (2)$$

Для составления уравнения моментов вычислим момент каждой силы относительно точки А:

$m_A(\mathbf{Y}_B) = -8\, Y_B$, т.к. $h(\mathbf{Y}_B) = 8$м и сила стремится повернуть тело около точки А по ходу часовой стрелки;

$m_A(\mathbf{P}_2) = 6\, P_2$, т.к. $h(\mathbf{P}_2) = 6$м и сила стремится повернуть тело около точки А против хода часовой стрелки;

$m_A(\mathbf{X}_A) = m_A(\mathbf{Y}_A) = 0$, т.к. точка А лежит на линии действия силы.

Вычислим момент силы $\mathbf{P}_1$ относительно точки А. По теореме Вариньона:

$m_A(\mathbf{P}_1) = m_A(\mathbf{P}_{1x}) + m_A(\mathbf{P}_{1y})$;

$m_A(\mathbf{P}_{1y}) = 0$, т.к. точка А лежит на линии действия силы;

$m_A(\mathbf{P}_{1x}) = -4\, P_1 \sin 30^0$, т.к. $h(\mathbf{P}_{1x}) = 4$ м и сила стремится повернуть тело около точки А по ходу часовой стрелки.

Следовательно,

$m_A(\mathbf{P}_1) = -4\, P_1 \sin 30^0$.

Таким образом, уравнение моментов всех сил относительно точки А имеет вид

$$\sum m_A(\mathbf{F}_i) = M_A - 4\,P_1 \sin 30^0 + 6\,P_2 + M - 8\,Y_B = 0. \qquad (3)$$

5. Рассмотрим равновесие левой части конструкции АС.
6. Покажем на рисунке активные и реактивные силы, приложенные к конструкции (рис. 7).

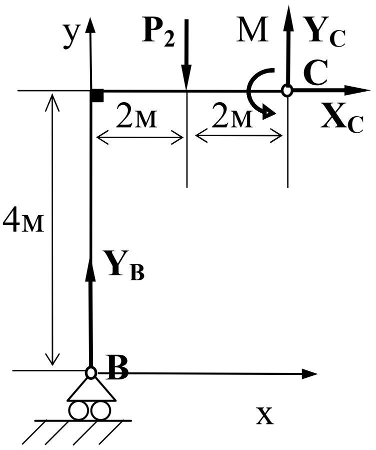


Рис. 7

Активные:

$\mathbf{P}_2$ – сосредоточенная сила.

М – момент пары сил, действующей в плоскости чертежа.

Реактивные:

В – подвижная опора. Реакция связи $\mathbf{Y}_B \perp$ Вх.

А – цилиндрический шарнир. Эта связь может быть представлена двумя взаимно перпендикулярными составляющими, которые обозначим $\mathbf{X}_C$, $\mathbf{Y}_C$.

7. Получили произвольную плоскую систему сил. Запишем соответствующие условия равновесия:

$\sum F_{ix} = 0;$

$\sum F_{iy} = 0;$

$\sum m_C(\mathbf{F}_i) = 0.$

8. В выбранной системе координат Вху составим уравнения равновесия для полученной системы сил:

$$\sum F_{ix} = X_C = 0; \qquad (4)$$

$$\sum F_{iy} = Y_B + Y_C - P_2 = 0. \qquad (5)$$

Для составления уравнения моментов вычислим момент каждой силы относительно точки С:

$m_C(\mathbf{X}_C) = m_C(\mathbf{Y}_C) = 0$, т.к. точка С лежит на линии действия силы;

$m_C(\mathbf{P}_2) = 2\,P_2$, т.к. $h\,(\mathbf{P}_2) = 2$ м и сила стремится повернуть тело около точки А против хода часовой стрелки;

$m_C(\mathbf{Y}_B) = -\,4\ Y_B$, т.к. $h\ (\mathbf{Y}_B) = 4$ м и сила стремится повернуть тело около точки А по ходу часовой стрелки.

Таким образом, уравнение моментов всех сил относительно точки С имеет вид

$$\sum m_C(\mathbf{F}_i) = 2\ P_2 + M - 4\ Y_B = 0. \qquad (6)$$

9. Решим полученную систему уравнений:

Из (6) $\quad Y_B = ¼\,(2\ P_2 + M) = 100$ Н;

Из (5) $\quad Y_C = P_2 - Y_B = -\,20$ Н;

Из (4) $\quad X_C = 0$ Н;

Из (1) $\quad X_A = -\,P_1 \sin 30^0 = -\,50$ Н;

Из (2) $\quad Y_A = P_2 - Y_B - P_1 \cos 30^0 = -\,106{,}6$ Н;

Из (3) $\quad M_A = 4\ P_1 \sin 30^0 + 8\ Y_B - 6\ P_2 - M = 260$ Нм.

Ответ: $X_A = -\,50$ Н; $Y_A = -\,106{,}6$ Н; $M_A = 260$ Нм; $Y_B = 100$ Н; $X_C = 0$ Н; $Y_C = \pm 20$ Н.

Знак указывает, что силы $\mathbf{X}_A$ и $\mathbf{Y}_A$ направлены противоположно показанной на рис. 6.

Тема 2. Условия равновесия произвольной пространственной системы сил

План решения задач

1. Выбрать объект, равновесие которого необходимо рассмотреть.
2. Изобразить на рисунке все активные силы, приложенные к телу. Применив аксиому связей, мысленно отбросить связи и заменить их действие реакциями этих связей.
3. Для полученной системы сил записать уравнения равновесия.
4. Выбрать систему координат. Оси координат рекомендуется выбирать так, чтобы они оказались параллельными или перпендикулярными возможно большему числу неизвестных сил. Записать уравнения равновесия для полученной системы сил в аналитическом виде.
5. Решить уравнения, определив искомые неизвестные.

Пусть задана произвольная пространственная система сил $\{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_{2\ldots}, \mathbf{F}_n\}$, действующая на твердое тело.

Главным вектором системы называется вектор **R**, равный геометрической сумме всех сил этой системы, т.е. $\mathbf{R} = \sum \mathbf{F}_i$.

Проекции R_x, R_y, R_z главного вектора **R** на оси декартовой системы координат равны сумме проекций сил на соответствующие оси:

$R_x = \sum F_{ix}$; $R_y = \sum F_{i\,y}$; $R_z = \sum F_{i\,z}$.

Главным моментом системы сил относительно произвольной точки О называется вектор $\mathbf{M}_0$, равный векторной сумме моментов всех сил относительно центра О:

$\mathbf{M}_0 = \sum \mathbf{m}_0 (\mathbf{F}_i) = \sum (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i)$.

Проекции главного момента $\mathbf{M}_0$ на оси декартовой системы координат называются главными моментами M_{0x}, M_{0y}, M_{0z} относительно соответствующих осей.

Главный момент пространственной системы сил относительно оси равен сумме моментов всех сил системы относительно соответствующей оси, т.е.

$M_{0x} = \sum m_x (\mathbf{F}_i)$; $M_{0y} = \sum m_y (\mathbf{F}_i)$; $M_{0z} = \sum m_z (\mathbf{F}_i)$.

Условия равновесия произвольной пространственной системы сил в векторной форме имеют вид

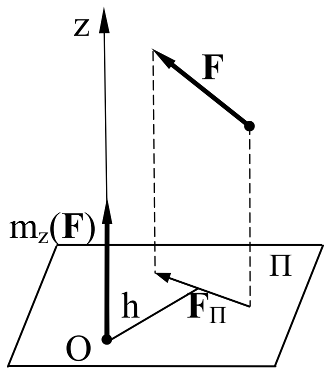
$\mathbf{R_0} = 0$; $\mathbf{M_0} = 0$.

Условия равновесия произвольной пространственной системы сил в аналитической форме имеют вид

$R_x = \sum F_{ix} = 0$; $R_y = \sum F_{iy} = 0$; $R_z = \sum F_{iz} = 0$;

$M_{0x} = \sum m_x(\mathbf{F}_i) = 0$; $M_{0y} = \sum m_y(\mathbf{F}_i) = 0$; $M_{0z} = \sum m_z(\mathbf{F}_i) = 0$.

Геометрический способ нахождения момента силы относительно оси:



1) провести плоскость П, перпендикулярную данной оси (z);
2) спроецировать силу **F** на плоскость П;
3) вычислить момент проекции силы $\mathbf{F}_п$ относительно точки О, которая является точкой пересечения плоскости П с осью z;
4) $m_z(\mathbf{F}) = \pm|\mathbf{m}_O(\mathbf{F}_П)|$.

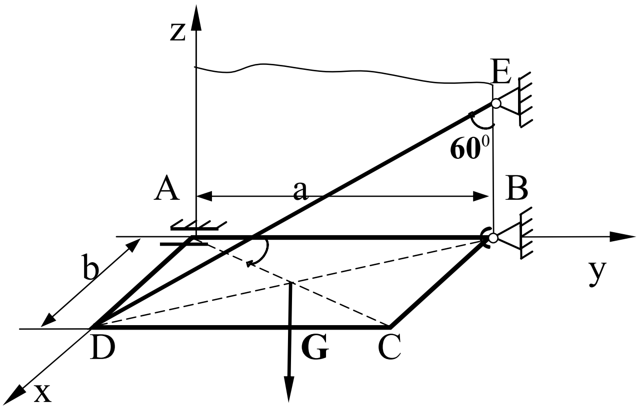
Момент силы относительно оси равен нулю в двух случаях:

1) если линия действия силы **F** пересекает ось;
2) если линия действия силы **F** параллельна оси.

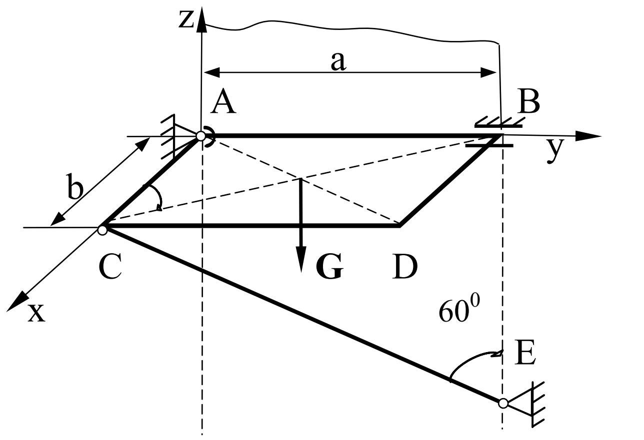
Задание 2.1. Условия равновесия произвольной пространственной системы сил

Определить опорные реакции конструкции, находящейся под действием произвольной пространственной системы сил.

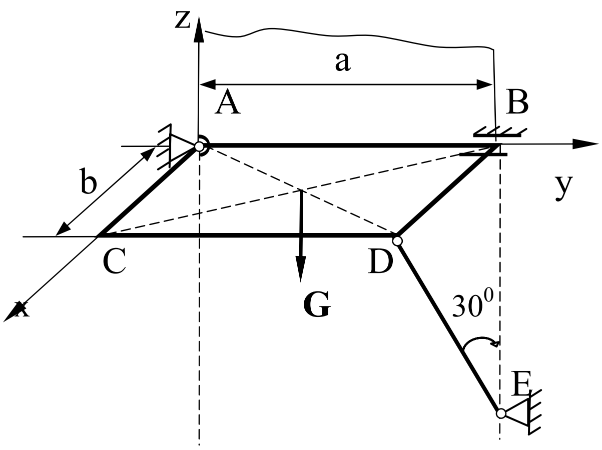
Необходимые для расчета данные приведены в табл. 1.



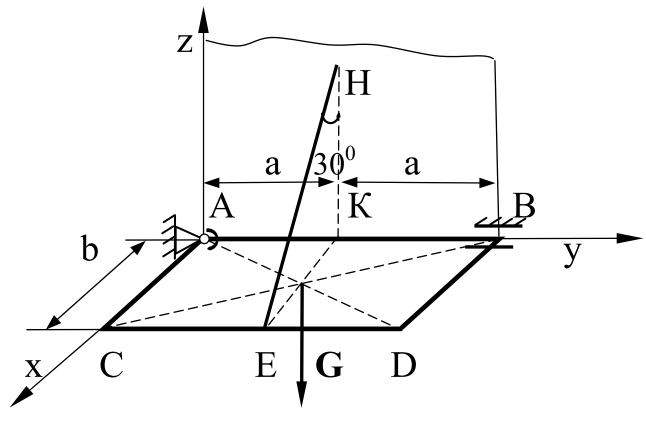
Вариант 1. $\angle BAC = 30^0$; DE – трос.



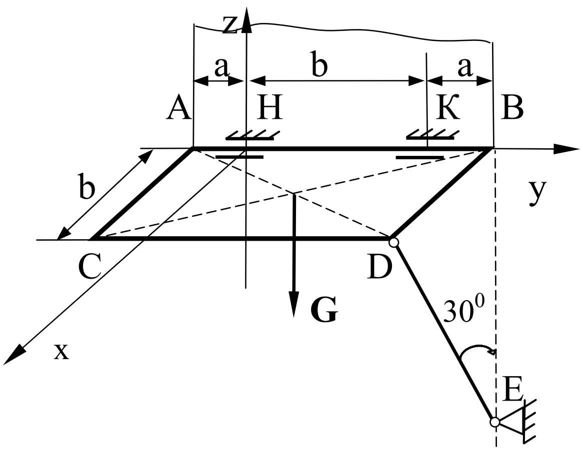
Вариант 2. $\angle ACB = 30^0$; CE – стержень.



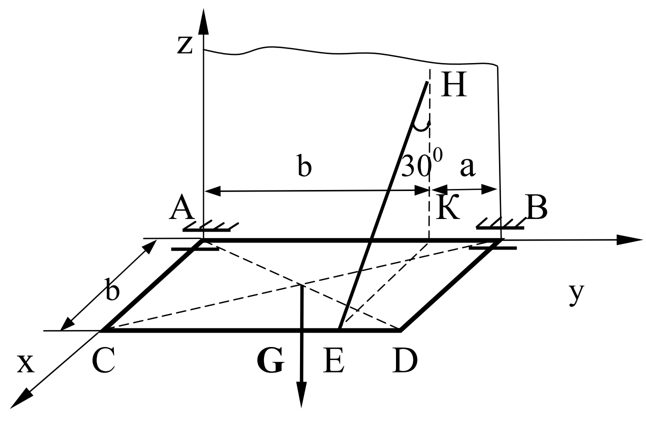
Вариант 3. DE – стержень.



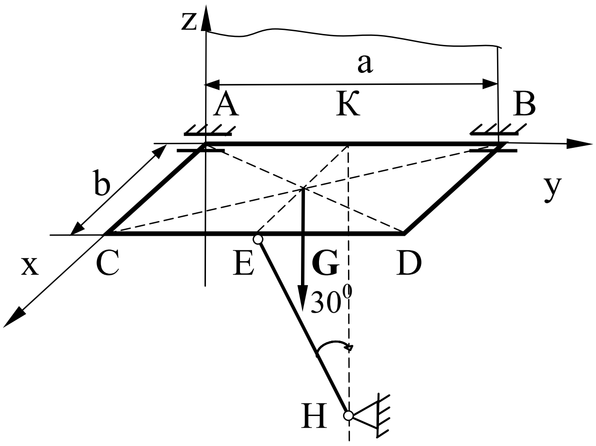
Вариант 4. HK ⊥ KE; EH – трос.



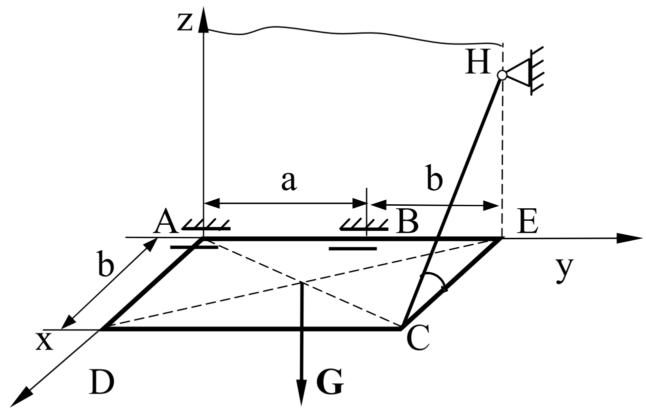
Вариант 5. DE – стержень.



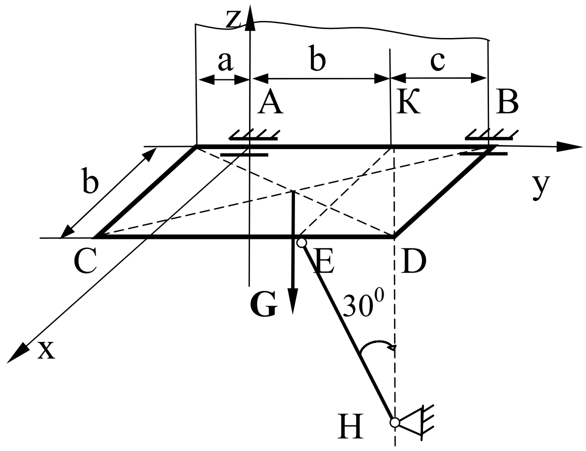
Вариант 6. HK ⊥ EK; EH – трос.



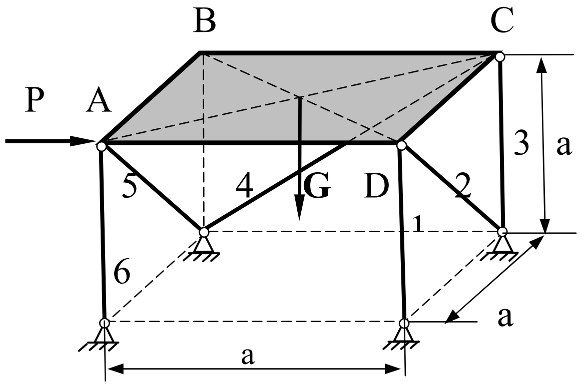
Вариант 7. АК = КВ = СЕ = ЕD; ЕН – стержень.



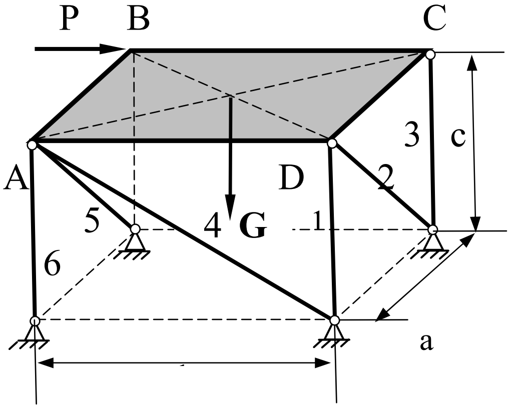
Вариант 8. $\angle$НСЕ = 30^0; СН – трос.



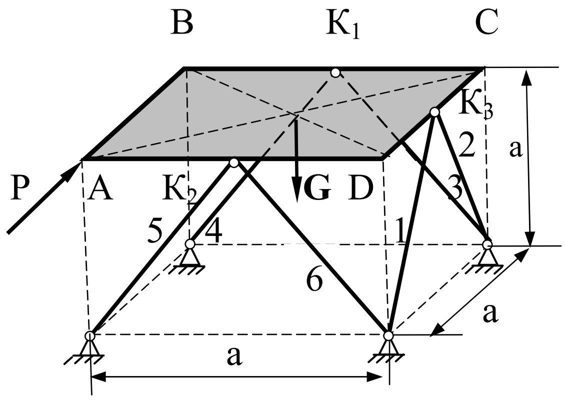
Вариант 9. ЕН – стержень.



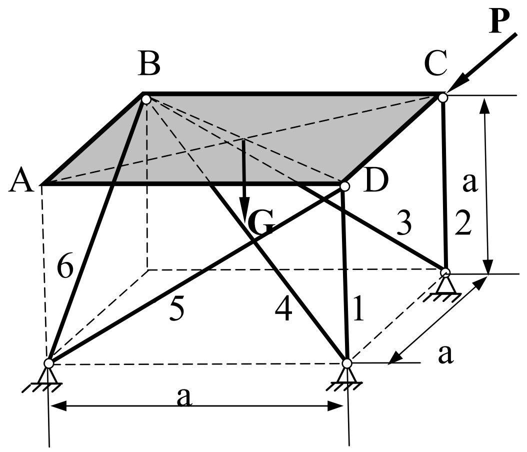
Вариант 10.



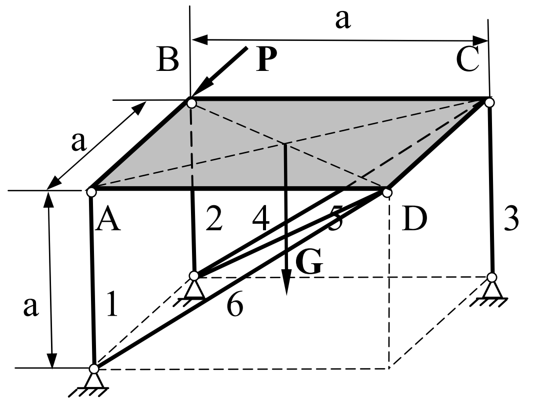
Вариант 11.



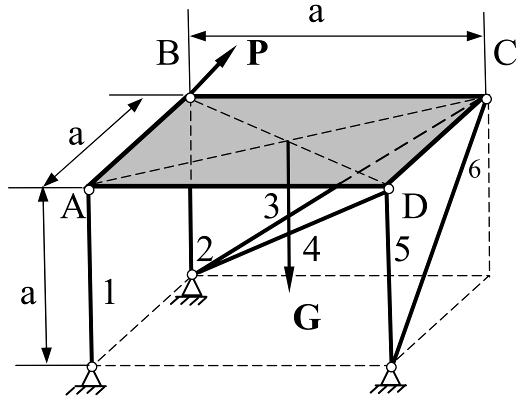
Вариант 12. $ВК_1 = К_1С$; $С\ К_3 = К_3D$; $DК_2 = К_2А$.



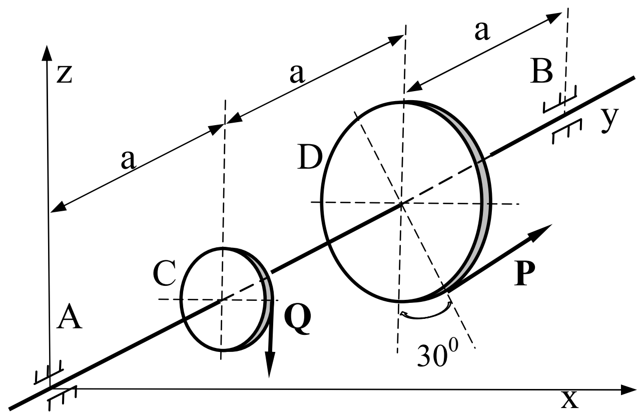
Вариант 13.



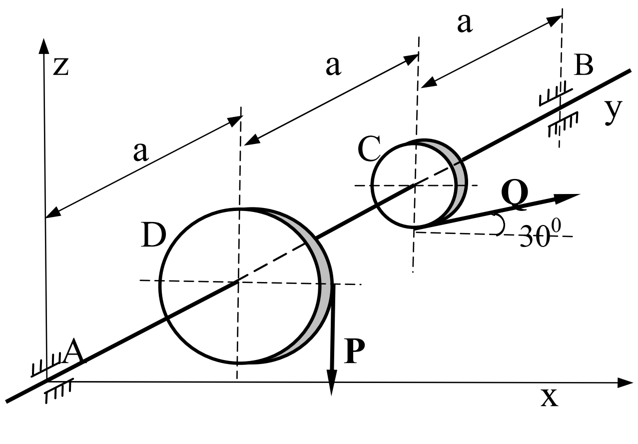
Вариант 14.



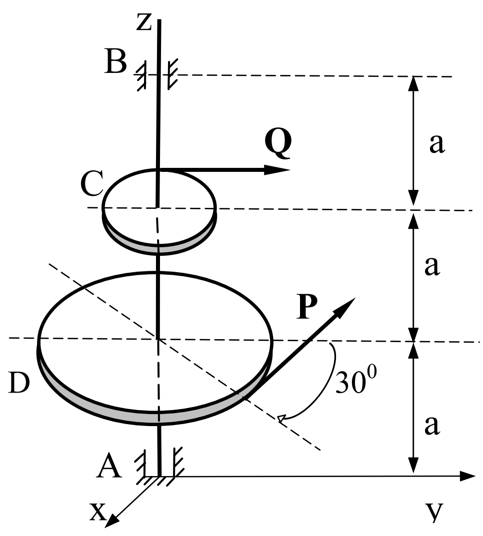
Вариант 15.



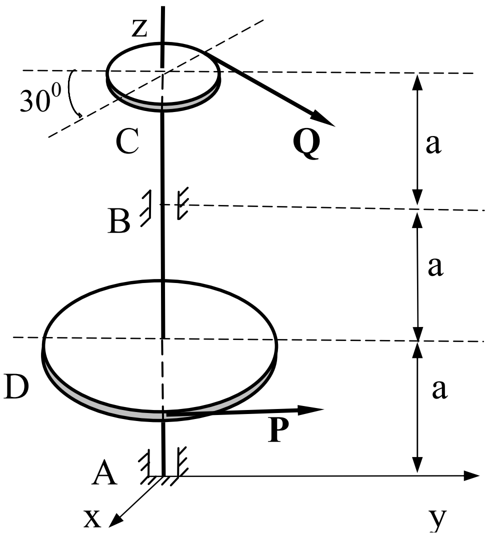
Вариант 16. $R_C = r$; $R_D = R$; **Q** $\parallel$ Az; **P**$\perp$Ay.



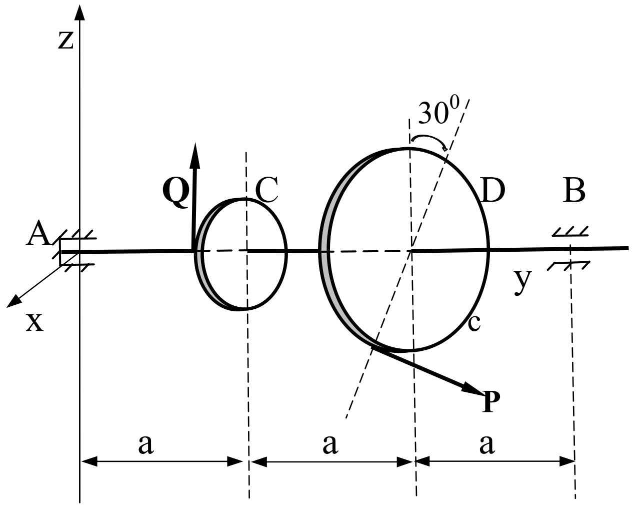
Вариант 17. $R_C = r$; $R_D = R$; **P** $\parallel$ Az; **Q**$\perp$Ay.



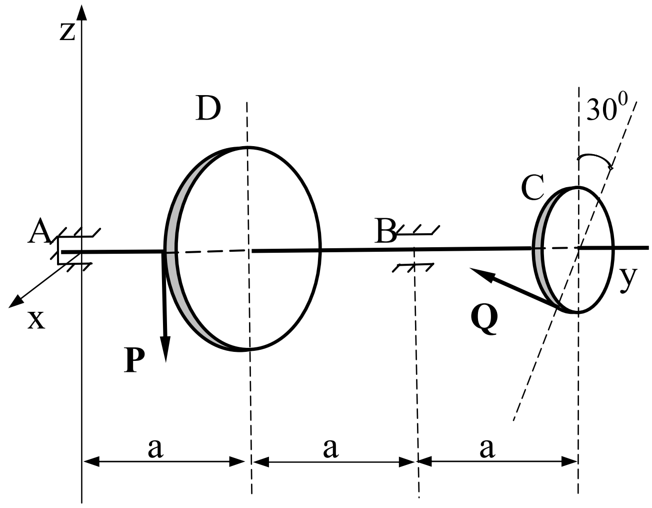
Вариант 18. $R_C = r$; $R_D = R$; **Q** $\parallel$ Ay; **P**$\perp$Az.



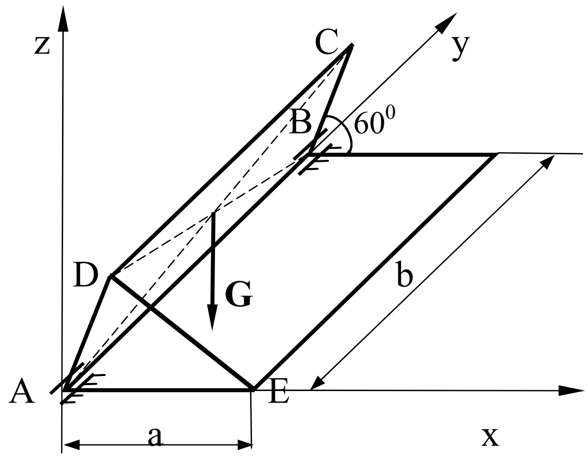
Вариант 19. $R_C = r$; $R_D = R$; **P** ∥ Ay; **Q**⊥Az.



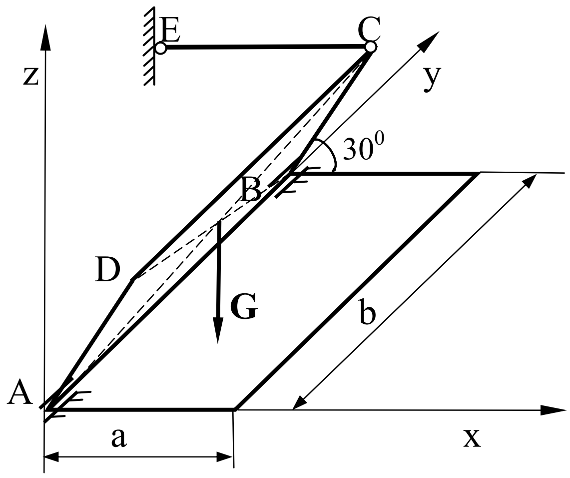
Вариант 20. $R_C = r$; $R_D = R$; **Q** ∥ Az; **P**⊥Ay.



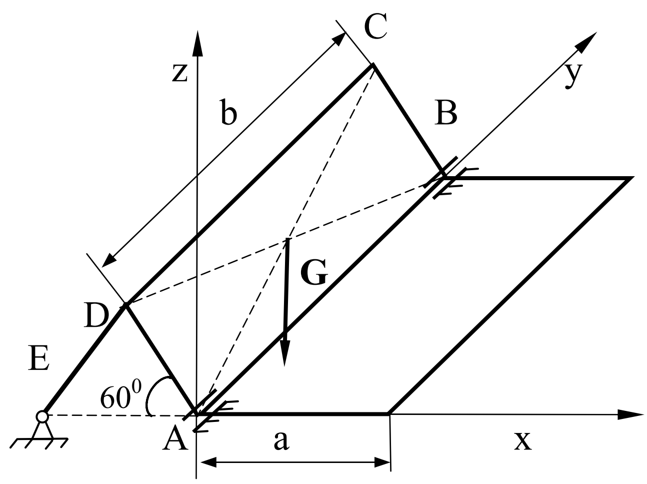
Вариант 21. $R_C = r$; $R_D = R$; **P** ∥ Az; **Q**⊥Ay.



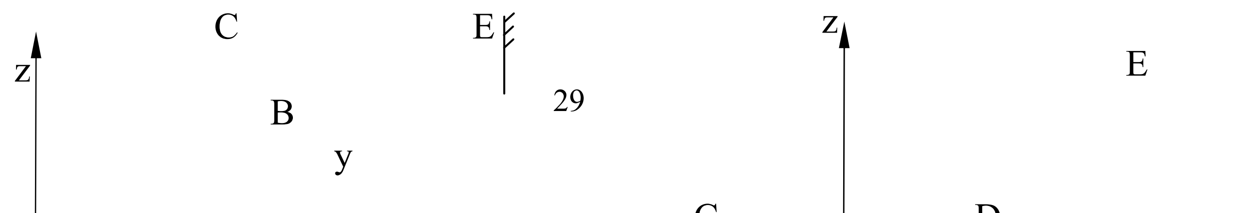
Вариант 22. DE – брус.

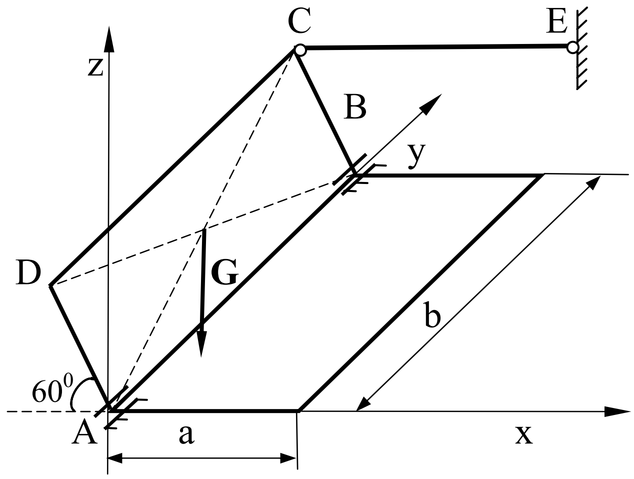


Вариант 23. CE ∥ Ax; CE – стержень.

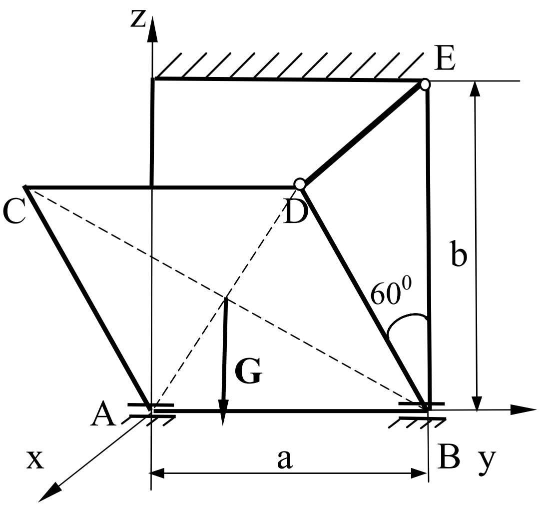


Вариант 24. AD=DE; DE – стержень.

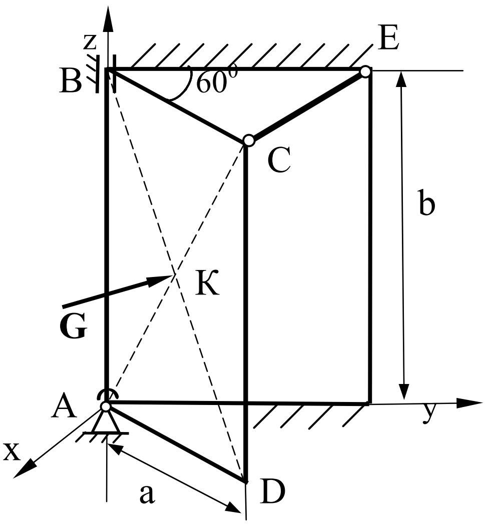




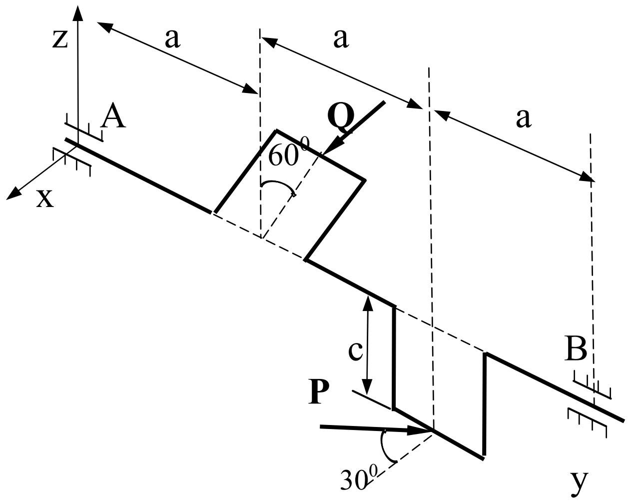
Вариант 25. CE || Ax; CE – стержень.



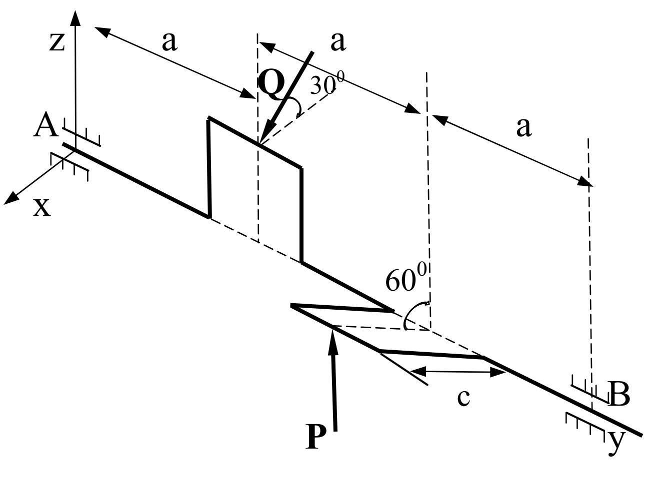
Вариант 26. BD = DE; DE – стержень.



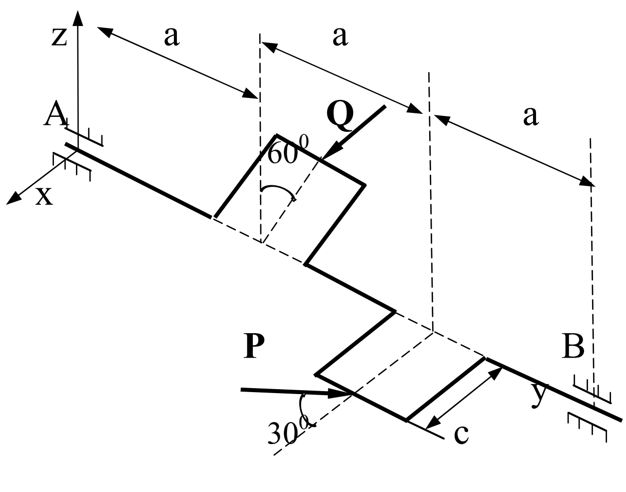
Вариант 27. **G**⊥плоскости ABCD; BE = BC; CE − стержень.



Вариант 28. **Q** || Ax, **P** ⊥ Ay**.**



Вариант 29. **P** || Az, **Q** ⊥ Ay.



Вариант 30. **Q** || Ax, **P** ⊥ Ay.

Таблица 1

Номер варианта	Силы, Н		Размеры, см				Вычислить
	G	**P**	a	b	r	R	
1	200	–	40	60	–	–	Опорные реакции
2	100	–	50	30	–	–	Опорные реакции
3	300	–	80	40	–	–	Опорные реакции
4	150	–	30	30	–	–	Опорные реакции
5	220	–	10	40	–	–	Опорные реакции
6	160	–	10	40	–	–	Опорные реакции
7	180	–	60	20	–	–	Опорные реакции
8	210	–	30	20	–	–	Опорные реакции
9	150	–	10	20	–	–	Опорные реакции
10	100	210	50	–	–	–	Усилия в стержнях
11	120	240	60	–	–	–	Усилия в стержнях
12	200	140	80	–	–	–	Усилия в стержнях
13	160	200	60	–	–	–	Усилия в стержнях
14	180	120	50	–	–	–	Усилия в стержнях
15	240	180	90	–	–	–	Усилия в стержнях
16	–	100	30	–	10	30	**Q**, опорные реакции
17	–	300	50	–	20	40	**Q**, опорные реакции
18	–	160	60	–	10	50	**Q**, опорные реакции
19	–	120	40	–	10	30	**Q**, опорные реакции
20	–	360	30	–	20	50	**Q**, опорные реакции
21	–	210	20	–	10	30	**Q**, опорные реакции
22	180	–	40	60	–	–	Опорные реакции
23	240	–	50	80	–	–	Опорные реакции
24	210	–	30	50	–	–	Опорные реакции
25	160	–	20	60	–	–	Опорные реакции
26	200	–	50	60	–	–	Опорные реакции
27	200	–	60	220	–	–	Опорные реакции
28	–	160	40	–	–	–	**Q**, опорные реакции
29	–	220	30	–	–	–	**Q**, опорные реакции
30	–	150	50	–	–	–	**Q**, опорные реакции

Пример выполнения задания 2.1

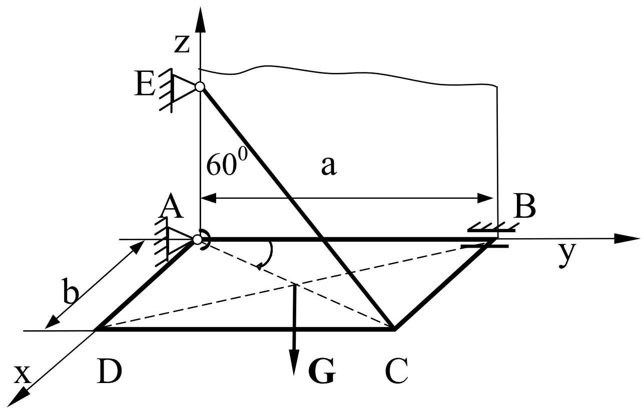


Рис. 8

Однородная прямоугольная рама ABCD веса G = 100 Н прикреплена к стене при помощи шарового шарнира A и петли B и удерживается в горизонтальном положении тросом CE (рис. 8). *Определить* опорные реакции конструкции, если $\angle BAC = 30^0$

Решение задачи

1. Рассмотрим равновесие прямоугольной рамы ABCD.
2. Покажем на рисунке активные и реактивные силы, приложенные к раме (рис. 9).

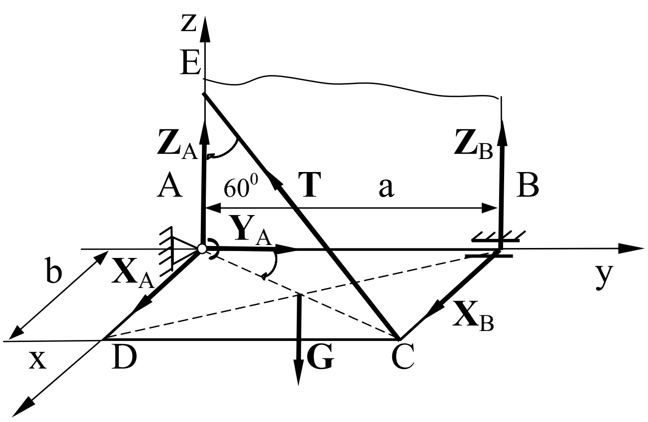


Рис. 9

Активные:

G – вес рамы. Так как рама однородная, то приложен в центре тяжести и направлен вертикально вниз.

Реактивные:

A – шаровой шарнир. Эта связь может быть представлена тремя взаимно перпендикулярными составляющими, которые обозначим $\mathbf{X}_A$, $\mathbf{Y}_A$, $\mathbf{Z}_A$;

B − петля. Эта связь может быть представлена двумя взаимно перпендикулярными составляющими, которые обозначим $\mathbf{X}_B$, $\mathbf{Z}_B$;

EC − трос. Соответствующая реакция направлена по тросу в сторону подвеса. Обозначим ее **T**.

3. Получили произвольную пространственную систему сил. Запишем условия равновесия произвольной пространственной системы сил в векторной форме:

$$\mathbf{R_0} = 0; \quad \mathbf{M_0} = 0.$$

4. Условия равновесия произвольной пространственной системы сил в аналитической форме имеют вид

$R_x = \sum F_{ix} = 0; \qquad R_y = \sum F_{iy} = 0; \qquad R_z = \sum F_{iz} = 0$

$M_{0x} = \sum m_x(\mathbf{F}_i) = 0; \quad M_{0y} = \sum m_y(\mathbf{F}_i) = 0; \quad M_{0z} = \sum m_z(\mathbf{F}_i) = 0.$

4.1. Составим и заполним следующую таблицу:

Силы	$\mathbf{F}_{ix}$	$\mathbf{F}_{iy}$	$\mathbf{F}_{iz}$	$\mathbf{m_x}(\mathbf{F_i})$	$\mathbf{m_y}(\mathbf{F_i})$	$\mathbf{m_z}(\mathbf{F_i})$
G	0	0	- G	- ½ P b	½ P a	0
$\mathbf{X_A}$	X_A	0	0	0	0	0
$\mathbf{Y_A}$	0	Y_A	0	0	0	0
$\mathbf{Z_A}$	0	0	Z_A	0	0	0
$\mathbf{X_B}$	X_B	0	0	0	0	$- X_B b$
$\mathbf{Z_B}$	0	0	Z_B	$Z_B b$	0	0
T	$- \frac{1}{4} T\sqrt{3}$	$- \frac{3}{4} T$	$\frac{1}{2}T$	$\frac{1}{2}T b$	$- \frac{1}{2}T a$	0

Промежуточные вычисления при заполнении таблицы:

- вычисление проекций силы **T** на оси координат (рис. 10):

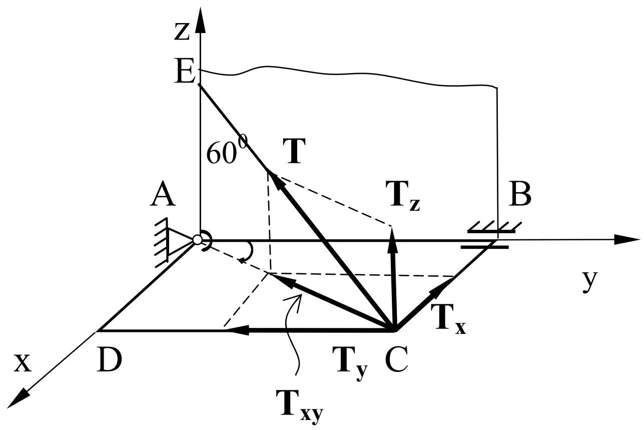


Рис. 10

$|T_z| = |T| \sin 30^0 = \frac{1}{2}T;$

$|T_{xy}| = |T| \cos 30^0 = \frac{1}{2}T\sqrt{3};$

$|T_x| = |T_{xy}| \sin 30^0 = \frac{1}{4} T\sqrt{3};$

$|T_y| = |T_{xy}| \cos 30^0 = \frac{3}{4} T;$

$\mathbf{T} = \mathbf{T}_x + \mathbf{T}_y + \mathbf{T}_z;$

- вычисление моментов силы **T** относительно осей координат:

$m_x\,(\mathbf{T}) = m_x\,(\mathbf{T_x}) + m_x\,(\mathbf{T_y}) + m_x\,(\mathbf{T_z}) = m_x\,(\mathbf{T_z}) = T_z\, b = ½T\, b;$

$m_y\,(\mathbf{T}) = m_y\,(\mathbf{T_x}) + m_y\,(\mathbf{T_y}) + m_y\,(\mathbf{T_z}) = m_y\,(\mathbf{T_z}) = -\, T_z\, b = -\, ½T\, a;$

$m_z\,(\mathbf{T}) = \mathbf{0}$, т.к. $m_x\,(\mathbf{T_x}) = m_x\,(\mathbf{T_y}) = m_y\,(\mathbf{T_x}) = m_y\,(\mathbf{T_y}) = 0$.

4.2. Составим уравнения равновесия:

$R_x = \sum F_{ix} = X_A + X_B - ¼\, T\sqrt{3} = 0;$ (1)

$R_y = \sum F_{iy} = Y_A - ¾\, T = 0;$ (2)

$R_z = \sum F_{iz} = -\,P + Z_A + Z_B + ½T = 0;$ (3)

$M_{0x} = \sum m_x\,(\mathbf{F}_i) = -\,½\, P\, b + Z_B\, b + ½T\, b = 0;$ (4)

$M_{0y} = \sum m_y\,(\mathbf{F}_i) = ½\, P\, a - ½T\, a = 0;$ (5)

$M_{0z} = \sum m_z\,(\mathbf{F}_i) = -\, X_B\, b = 0.$ (6)

5. Решим полученную систему уравнений:

Из (6) $X_B = 0$.

Из (5) $T = P = 200$ Н.

Из (4) $Z_B = ½(\,P - T) = 0$.

Из (3) $Z_A = P - ½T = 100$ Н.

Из (2) $Y_A = ¾\, T = 150$ Н.

Из (1) $X_A = ¼\, T\sqrt{3} = 86{,}6$ Н.

Ответ: $X_A = 86{,}6$ Н; $Y_A = 150$ Н; $Z_A = 100$ Н; $X_B = Z_B = 0$; $T = 200$ Н.

Учебное электронное текстовое издание

Савина Елена Александровна

СТАТИКА

Редактор *Е.А. Ишунина*
Компьютерная верстка *А.А. Гребенщикова*

Рекомендовано РИС ГОУ ВПО УГТУ-УПИ
Разрешен к публикации 14.05.07.
Электронный формат – PDF
Формат 60×90 1/8

Издательство ГОУ ВПО УГТУ-УПИ
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19
e-mail: sh@uchdep.ustu.ru

Информационный портал
ГОУ ВПО УГТУ-УПИ
http://www.ustu.ru