**Лабораторная работа №3**

**Тема: “Решение задачи линейного программирования симплексным методом с искусственным базисом”**

**Цель работы:** получение практических навыков решения задачи линейного программирования с помощью симплекс-метода с искусственным базисом.

**1.Теоретическая часть**

**1.1 Основные теоремы и определения**

**Симплекс-метод с искусственным базисом (II способ)**

Идея использования искусственных переменных предполагает включение неотрицательных переменных в левую часть каждого из уравнений, в которых не содержится очевидных начальных базисных переменных (когда неравенство имеет знак ≥ или задано в виде равенства). Но так как искусственные переменные не имеют отношения к поставленной задаче (отсюда их название - искусственные), то их введение допустимо только в том случае, если симплекс метод будет обеспечивать получение оптимального решения, в котором все искусственные переменные будут равны 0, то есть эти переменные следует использовать только для стартовой точки, причем итерационный метод оптимизации должен "вынуждать" эти переменные принимать нулевые значения в конечном оптимальном решении, обеспечивая допустимость оптимума.

Пусть задача линейного программирования находится в канонической форме, однако, не во всех уравнениях имеются базисные переменные, то есть исходный опорный план отсутствует. В этом случае в уравнения без базисных переменных необходимо добавить с коэффициентом +1 некоторую неотрицательную переменную, которая называется **искусственной***.* Не следует путать искусственные переменные с балансовыми переменными, которые добавляются в неравенства и входят в целевую функцию с коэффициентами нуль.

**Пример.** Пусть имеется следующее уравнение 5х1 + х2 = 5, переменные **х1** и **х2** являются свободными. Добавим в это уравнение неотрицательную искусственную переменную **х3**: 5х1 + х2 + х3 = 5.

Для того чтобы решения этих двух уравнений совпадали необходимо, чтобы искусственная переменная **х3** стала равной нулю. Для этого такая переменная должна выйти из базиса и стать свободной. С этой целью данную искусственную переменную необходимо добавить в целевую функцию с очень большим положительным числом (так как целевая функция на нахождения минимума). Это число обозначается латинской буквой **M**. Его можно считать равным +. В связи с этим иногда метод искусственного базиса называют **М**–методом. Такое преобразование исходной задачи называется построением расширенной задачи. Если решается задача с целевой функцией на нахождение максимума, то искусственные переменные входят в целевую функцию с коэффициентом (**–М**).



Таким образом, в расширенной задаче мы имеем опорный план, хотя некоторые из базисных переменных и являются искусственными.

Строится исходная симплекс–таблица, в которой индексная строка разбивается на две, поскольку оценки состоят из двух слагаемых. В верхней строке записывается слагаемое оценки без **M**, в нижней – коэффициенты при **М**. Знак оценки определяется знаком коэффициента при **M**, независимо от величины и знака слагаемого без **M**, так как **M** очень большое положительное число.

Для определения вектора, который вводится в базис необходимо провести анализ нижней индексной строки. Если искусственный вектор выводится из базиса, то соответствующий столбец в последующих симплексных таблицах можно не вычислять, если нет необходимости в получении решения двойственной задачи (см. следующую тему).

После того, как все искусственные векторы будут выведены из базиса, нижняя строка будет иметь все нулевые элементы, за исключением оценок, соответствующих искусственным векторам. Они будут равны (–1). Такую строку можно удалить из рассмотрения и дальнейшее решение проводить обычным симплекс-методом, если нет необходимости в получении решения двойственной задачи.

**Постановка и решение двойственной задачи**

Правила построения двойственных задач рассмотрим на примере

Z = 2x2 + x3 → min;

3x1 ≤ 6,

x1 - 4x2 + x3 = 5,

4x1 + 2x2 ≥ 6,

xj≥0, j=1÷3.

1. Количество переменных двойственной задачи равняется количеству ограничений исходной задачи.

3x1 ≤ 6, *у1*

x1 - 4x2 + x3 = 5, *у2*

4x1 + 2x2 ≥ 6, *у3*

1. Коэффициентами при переменных в целевой функции **F** двойственной задачи являются правые части ограничений исходной задачи.
2. Если в исходной задаче требуется определить минимальное значение целевой функции **z**, то в двойственной – требуется определить максимальное значение целевой функции **F** и наоборот.

F=6у1+5у2+6у3→ mах;

1. Матрицей коэффициентов при переменных в ограничениях двойственной задачи является транспонированная матрица этих коэффициентов исходной задачи.

Исходная задача:

Двойственная задача:

1. Правыми частями ограничений двойственной задачи являются коэффициенты при переменных в целевой функции исходной задачи.

3у1 + у2 + 4у3  **?** 0,

- 4у2 + 2у3 **?** 2,

у2 **?** 1,

1. Определение типов ограничения двойственной задачи.

**Определение 1***.* Если целевая функция задачи на минимум, то неравенства типа «больше или равно» называются **«правильными»**,а неравенства типа «меньше или равно» – **«неправильными».** Если целевая функция задачи на максимум, то неравенства типа «меньше или равно» называются **«правильными»,**а неравенства типа «больше или равно» называются **«неправильными».**

**Определение 2***.* Если на некоторую переменную накладываются ограничения «больше или равно» нуля, то такая переменная называется **«правильной»,** если «меньше или равно» – **«неправильной»***.*

Типы ограничения двойственной задачи определяются исходя из значений соответствующих переменных исходной задачи.

Если переменная **хj** исходной задачи является «правильной», то **j**-е ограничение двойственной задачи также является «правильным» относительно своей целевой функции.

Если **хj** – «неправильная», то **j**-е ограничение также будет «неправильным» относительно своей целевой функции.

Если переменная **хj** исходной задачи может принимать любые значения, то **j**-е ограничение двойственной задачи будет уравнением.

В исходной задаче все переменные правильные:

xj≥0, j=1÷3.

Следовательно, и неравенства двойственной будут все правильные относительно своей ЦФ. Для задачи на max – это «≤»

3у1 + у2 + 4у3 ≤ 0,

- 4у2 + 2у3 ≤2,

у2 ≤ 1.

7) Определение значений переменных двойственной задачи. Значения двойственных переменных определяются исходя из типов соответствующих ограничений исходной задачи:

Если **i**-е ограничение исходной задачи является «правильным» неравенством относительно своей целевой функции, то переменная **уi** будет также «правильной» переменной.

Если **i**-е ограничение исходной задачи является «неправильным» неравенством относительно своей целевой функции, то переменная **уi** будет также «неправильной» переменной.

Если **i**-е ограничение исходной задачи задано в виде уравнения, то переменная **уi** может принимать любые значения.

Ограничение №1 в исходной задаче – неравенство, неправильное относительно своей ЦФ, значит у1 будет неправильной переменной:

у1≤0,

Ограничение 3 в исходной задаче – неравенство, правильное относительно своей ЦФ, значит у3 будет правильной переменной:

у3≥0,

Ограничение №2 в исходной задаче – равенство, значит у2 - любое

Таким образом, двойственная задача имеет вид:

F=6у1+5у2+6у3→ mах;

3у1 + у2 + 4у3 ≤ 0,

- 4у2 + 2у3 ≤2,

у2 ≤ 1.

у1≤0, у3≥0.

**2. Методический пример**

**Симплекс-метод с искусственным базисом (II способ)**

Решить задачу линейного программирования

Z = 2x2 + x3 → min;

3x1 ≤ 6,

x1 - 4x2 + x3 = 5,

4x1 + 2x2 ≥ 6,

xj≥0, j=1÷3.

Решение.

Приводим задачу к каноническому виду:

Z = 2x2 + x3 +**0х4+0х5**→ min;

3x1**+х4**= 6,

x1 - 4x2 + x3 = 5,

4x1 + 2x2 **–х5**= 6,

xj≥0, j=1÷5.

Исходного опорного плана нет, так как балансовая переменная х5 входит в третье уравнение с коэффициентом (–1), и, следовательно, не является базисной, а другой подходящей на роль базисной переменной в данном уравнении нет. Смотрим расширенную задачу.

Z = 2x2 + x3 +0х4+**0х5+*Мх6***→ min;

3x1+**х4** = 6,

x1 - 4x2 + **x3** = 5,

4x1 + 2x2 **–х5**+***х6***= 6,

xj≥0, j=1÷6.

Составляем первую симплекс-таблицу

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Б | СБ | А0 | А1 ↓ | А2 | А3 | А4 | А5 | А6 |  |
| 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | М |
| А4 | 0 | 6 | 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1-я таблица |
| А3 | 1 | 5 | 1 | -4 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| ←А6 | М | 6 | 4 | 2 | 0 | 0 | -1 | 1 |
| δi =zj – сj  М | | 5 | 1 | -6 | 0 | 0 | 0 | 0 |  |
| 6 | 4 | 2 | 0 | 0 | -1 | 0 |  |

Рассчитаем значение ЦФ

Z1=(СБ;А0) = с4а40 + с3а30 + с6а60 = 0·6+1·5+М·6=5+6М

Число пишем в первую (верхнюю) оценочную строку, а коэффициент при М – во вторую (нижнюю).

Вычислим оценку для столбца А1:

δ1=(СБ,А1)-c1= с4а41 + с3а31 + с6а61 - c1=0·3+1·1+М·4-0=1+4М и т.д.

Сначала анализируем вторую индексную строку. В первой таблице положительные оценки имеют два вектора: А1 и А2. «Худшая» оценка получена в столбце А1, поэтому его нужно ввести в базис.

Для определения вектора, выводимого из базиса, вычисляем симплексное отношение

.

*θ* получено в строке А6, следовательно, вектор А6 выводится из базиса. Вносим соответствующие изменения в столбцы Б и СБ. Делаем пересчет остальных столбцов таблицы.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Б | СБ | А0 | А1 | А2 | А3 | А4 | А5 ↓ | А6 |  |
| 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | М |
| ←А4 | 0 | 3/2 | 0 | -3/2 | 0 | 1 | 3/4 | -3/4 | 2-я таблица |
| А3 | 1 | 7/2 | 0 | -9/2 | 1 | 0 | 1/4 | -1/4 |
| А1 | 0 | 3/2 | 1 | 1/2 | 0 | 0 | -1/4 | 1/4 |
| δi =zj – сj  М | | 7/2 | 0 | -9/2 | 0 | 0 | 1/4 | -1/4 |  |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 |  |

Опорный план уже не содержит искусственных векторов, следовательно, во второй индексной строке остались коэффициенты, равные 0 и -1. Дальнейшее решение можно осуществлять обычным симплексным методом с одной индексной строкой. Однако, для решения двойственной задачи нам в дальнейшем понадобится вторая строка, поэтому при анализе ее учитывать уже не будем, но продолжим производить ее расчет.

Итак, анализируем первую индексную строку. В ней присутствует положительная оценка в столбце А5. Вводим его в базис. Найдем симплекс-отношение для определения вектора, выводимого из базиса.

Не забывайте, что симплекс-отношение θ может оказаться как положительным, так и отрицательным. Однако, разрешающую строку можно выбрать только из тех, в которых оно положительное.

.

*θ2* получено в строке А4, следовательно, вектор А4 выводится из базиса. Вносим соответствующие изменения в столбцы Б и СБ. Делаем пересчет остальной части таблицы.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Б | СБ | А0 | А1 | А2 | А3 | А4 | А5 | А6 |  |
| 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | М |
| А5 | 0 | 2 | 0 | -2 | 0 | 4/3 | 1 | -1 | 3-я таблица |
| А3 | 1 | 3 | 0 | -4 | 1 | -1/3 | 0 | 0 |
| А1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1/3 | 0 | 0 |
| δi =zj – сj  М | | 3 | 0 | -4 | 0 | -1/3 | 0 | 0 |  |
|  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 |  |

В оценочной строке новой таблицы нет положительных оценок, следовательно, алгоритм заканчивает работу, оптимальное решение достигнуто и значение целевой функции Z является минимальным.

Оптимальный план: ХБо=(2;0,3;0;2;0).

Z(ХБо) = (СБ;Ао) = с5А50 + с3А30 + с1А10 =0·2+1·3+0·0+0·2=3.

Осталось записать ответ задачи. Для этого нужно вернуться к исходной формулировке (первоначальному количеству переменных):

Хmin=(2;0,3).

Подставим значение Хmin в выражение для ЦФ:

Z(Хmin) = 2x2 + x3 = 4·0+1·3=3

***Решение двойственной задачи***

F=6у1+5у2+6у3→ mах;

3у1 + у2 + 4у3 ≤ 0,

- 4у2 + 2у3 ≤2,

у2 ≤ 1.

у1≤0, у3≥0.

Решить эту задачу можно любым методом, например, тем же симплекс-методом. Но у нас решена прямая задача и по имеющейся симплекс-таблице можно найти решение сразу.

Смотрим, какие вектора выли в базисе первой таблицы: А4, А3, А6.

y1=δ4+с4; (δ4 взять из столбца А4 последней таблицы).

Проще говоря оптимальное значение y1 вычисляется следующим образом: к числу, которое находится на пересечении найденного столбца и индексной строки последней симплекс-таблицы прибавляется число, которое находится на пересечении этого же столбца и строки коэффициентов при переменных целевой функции.

y1=-1/3 +0М+0=-1/3;

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Б | | СБ | А0 | А1 | А2 | А3 | А4 | А5 | А6 |  |
| 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | М |
| А4 | | 0 | 6 | 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1-я таблица |
| А3 | | 1 | 5 | 1 | -4 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| А6 | | М | 6 | 4 | 2 | 0 | 0 | -1 | 1 |
| δi =zj – сj  М | | | 5 | 1 | -6 | 0 | 0 | 0 | 0 |  |
| 6 | 4 | 2 | 0 | 0 | -1 | 0 |  |
| А5 | 0 | | 2 | 0 | -2 | 0 | 4/3 | 1 | -1 | 3-я таблица |
| А3 | 1 | | 3 | 0 | -4 | 1 | -1/3 | 0 | 0 |
| А1 | 0 | | 2 | 1 | 0 | 0 | 1/3 | 0 | 0 |
| δi =zj – сj  М | | | 3 | 0 | -4 | 0 | -1/3 | 0 | 0 |  |
|  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 |  |

y2=δ3+с3; (δ3 взять из столбца А3 последней таблицы). То есть, чтобы найти y2 необходимо в соответствующем столбце взять число, которое находится в индексной строке последней симплекс–таблицы и к нему прибавить число, которое стоит в этом же столбце и строке коэффициентов при переменных целевой функции.

y2=0+0М+1=1.

Таким образом находятся оптимальные значения всех двойственных переменных.

y3=δ6+с6; (δ6 взять из столбца А6 последней таблицы).

y3=0-М+М=0;

Итак, Ymax=[-1/3 1 0]

Оптимальное значение целевой функции двойственной задачи, согласно первой теореме двойственности, совпадает с оптимальным значением целевой функции исходной задачи и выписывается из первой клетки индексной строки последней симплексной таблицы и равно 3.

Подставим уi в ЦФ:

F=6·(-1/3)+5·1+6·0=3

Значение ЦФ совпадает с табличным.

***Проверка правильности решения***

Оптимальное решение двойственной задачи линейного программирования имеет вид ***Yопт=СБ·А-1, Хопт=А-1·А0***.

CБ и А-1 нужно взять из последней таблицы. Причем А-1 – это матрица коэффициентов, взятых из столбцов Аi последней таблицы, которые были базисными в первой таблице и с сохранением такого же порядка следования. А0 нужно взять из первой таблицы

– совпадает с решением исходной задачи

1. **Практическая часть**

1) Решить задачу Симплекс-методом с искусственным базисом (II способом) – номер индивидуального варианта согласно номера в журнале преподавателя.

2) Составить двойственную задачу и получить ее решение по симплекс-таблице.

2) Выполнить проверку полученного решения.

**Варианты заданий**

|  |  |
| --- | --- |
| **1** | **2** |
| z = 3x1 → min;  x1 + 4x2 = 5,  3x1 + 2x2 ≥ 6,  xj≥0, j= | z = 4x1 + 4x2 + 3x3 → min;  x1 - 2x2 + x3 = 3,  4x1 - 4x2 + 3x3 ≥ 6,  xj≥0, j= |
| **3** | **4** |
| z = 3x1 + x2 → min;  4x2 - 3x3 ≥ 4,  x1 + 2x2 + x3 = 8,  xj≥0, j= | z = 3x1 + 4x2 + 2x3 → min;  -4x1 + 4x2 + 4x3 = 7,  2x1 - 4x2 - x3 ≥ 6,  xj≥0, j= |
| **5** | **6** |
| z = 3x2 + 4x3 → max;  x1  + 2x3 ≤ 3,  3x1  + x3 ≥ 6,  -4x1 + x2 + x3 = 5,  xj≥0, j= | z = x1 + 4x2 → max;  x2 ≥ 2,  x1 + x2 = 4,  xj≥0, j= |
| **7** | **8** |
| z = 2x1 + x2 + 2x3 → min;  3x2 + 2x3 ≥ 6,  x1 + 4x2 + 2x3 = 8,  xj≥0, j= | z = 3x1 + 2x2 → min;  2x1 + x2 = 5,  2x1 + x2 ≥ 4,  xj≥0, j= |
| **9** | **10** |
| z = -x3 → max;  2x1 + 4x2 - x3 = 5,  -x1 + 4x2 + 3x3 ≥ 5,  xj≥0, j= | z = 3x1 + 4x2 → min;  3x1  ≥ 7,  2x1 + x2 = 6,  xj≥0, j= |
| **11** | **12** |
| z = 2x1 - 3x2 → min;  x1 - 4x2 = 6,  3x1 - 2x2 ≥ 4,  xj≥0, j= | z = -4x1 - 3x2 + 2x3 → max;  x1 + 3x2 ≤ 5,  -x1 + 3x3 = 7,  -4x1 - 4x2 + 3x3 ≥ 5,  xj≥0, j= |
| **13** | **14** |
| z = 3x1 - 4x2 - 4x3 → min;  x1 - x2 + 2x3 = 5,  4x1 - 4x2 + 3x3 = 5,  -x2 + 4x3 ≥ 6,  xj≥0, j= | z = -4x1 + 4x3 → min;  -4x1 + 3x2 + x3 = 8,  3x1 + 2x2  = 4,  4x1 + 4x2  ≥ 5,  xj≥0, j= |
| **15** | **16** |
| z = x1 + 4x2 → min;  -x1 - x2 + 4x3 ≤ 5,  4x1 + 3x2 + 2x3 ≥ 7,  xj≥0, j= | z = -4x1 + 4x2 - 4x3 → max;  -4x2 + 2x3 = 5,  3x2 + 2x3 ≥ 8,  x1 + 4x2 = 4,  xj≥0, j= |
| **17** | **18** |
| z = x1 + 4x3 → max;  3x1  - 2x3 ≥ 0,  2x1 + x2 - x3 = 3,  xj≥0, j= | z = 4x1 + 3x2 → min;  2x1 + x2 = 7,  4x1  ≥ 7,  xj≥0, j= |
| **19** | **20** |
| z = 3x1 + x2 → max;  x1 + x2 = 8,  3x1  ≥ 0,  xj≥0, j= | z = -3x1 + 2x2 → max;  3x1 + 2x2 ≤ 8,  x1 + 4x2 ≥ 4,  xj≥0, j= |
| **21** | **22** |
| z = 3x1 - 2x2 → min; -x1 + x2 = 0,  3x1 + 4x2 ≥ 4,  xj≥0, j= | z = 4x2 → min;  x1 + x2 = 6,  3x1 - 2x2 ≥ 4,  xj≥0, j= |
| **23** | **24** |
| z = 4x1 - 4x2 + 3x3 → max;  2x1 + 3x2 + 3x3 ≤ 8,  4x1 + 2x2 + x3 ≥ 0,  xj≥0, j= | z = 3x1 + 4x2 + x3 → min;  -3x1 + x2 + 4x3 = 7,  x1 - x2 - 2x3 ≤ 3,  2x1 + 2x2 + 4x3 ≥ 4,  xj≥0, j= |
| **25** | **26** |
| z = 4x2 → min;  2x1 + 4x2 = 7,  2x1 + 4x2 ≥ 5,  xj≥0, j= | z = 2x1 - 4x2 → max;  2x1 + 4x2 ≤ 8,  3x1 - 2x2 ≥ 5,  xj≥0, j= |
| **27** | **28** |
| z = 3x1 - 2x2 + x3 → min;  -3x1 + 3x2 + x3 = 6,  4x1 - x2  ≥ 4,  xj≥0, j= | z = 2x1 → max;  3x1 + x2 = 6,  4x1  ≥ 4,  xj≥0, j= |
| **29** | **30** |
| z = -3x1 + x2 - x3 → max;  2x1 - x2 - 2x3 = 0,  2x1 + x2 + 4x3 ≤ 6,  -3x1 + 4x2 + 4x3 ≥ 6,  xj≥0, j= | z = 4x1 + 4x2 → max;  x1 + 2x2 = 4,  2x1 + x2 ≥ 6,  xj≥0, j= |

1. **Требования к отчету**
2. Индивидуальное задание (условие).
3. Представление задачи в каноническом виде (с пояснениями).
4. Построение табличного решения с пояснениями (см. методический пример).
5. Анализ полученных результатов. Выводы.