**Лабораторная работа №2**

**тема: “Решение задачи линейного программирования симплексным методом”**

**Цель работы:** получение практических навыков решения задачи линейного программирования с помощью симплекс-метода (I способ).

**1.Теоретическая часть**

**1.1 Основные теоремы и определения**

Симплекс–метод основан на ряде следующих теорем.

**Теорема 1***. О множестве планов задачи линейного программирования*

Множество всех планов задачи линейного программирования является выпуклым множеством.

**Теорема 2.** *О целевой функции задачи линейного программирования*

Целевая функция задачи линейного программирования принимает своё оптимальное значение в одной из угловых точек области допустимых значений переменных.

Если целевая функция принимает своё оптимальное значение в нескольких угловых точках, то такое же значение она принимает и в любой точке, являющейся выпуклой комбинацией данных угловых точек.

**Определение.** План , положительным координатам которого соответствуют линейно независимые векторы, называется ***опорным планом ЗЛП****.*



**Теорема 3***. Достаточные условия угловой точки*

Пусть система векторов ,,…, (k ≤ n ) в разложении х1+х2+…+хn = (\*\*) является линейно независимой и такой, что х1+х2+…+хk=, где все , то точка =(х1,х2,…,хk,0,0,…,0) является угловой точкой ОДЗ.



**Теорема4.** *Необходимые условия угловой точки*

Пусть точка =(х1,х2,…,хn) является угловой точкой ОДЗ, тогда векторы в разложении (\*\*), соответствующие положительным значениям переменных будут линейно независимыми.



*Следствия из теорем*

***Следствие 1.*** Опорный план имеет не более **m** положительных координат. Если он имеет ровно **m** положительных координат, то такой опорный план называется невырожденным, в противном случае – вырожденным.

***Следствие 2.*** Каждая угловая точка ОДЗ является опорным планом

Идея решения задач линейного программирования симплекс-методом

Теорема 1 утверждает, что ОДЗ задачи линейного программирования является выпуклым множеством. Теорема 2 утверждает, что целевая функция принимает своё оптимальное значение в одной из угловых точек. Таким образом, можно найти все угловые точки и вычислить значения целевой функции в этих точках. Оптимальной будет та точка, в которой целевая функция принимает своё минимальное или максимальное значение. Однако количество угловых точек, в зависимости от размерности задачи, может быть очень значительным, но не более . Поэтому найти все угловые точки бывает невозможно.



Симплекс-метод является целенаправленным перебором части угловых точек (метод последовательного улучшения опорного плана).

Х1

Х2

хmax

х4

х3

хисх  х2



Для решения задачи симплекс-методом мы должны ответить на два вопроса:

1. Является ли очередной опорный план оптимальным; если не является, то указать к какому опорному плану необходимо перейти.

2. Как перейти от одного опорного плана к другому.

Переход от одного опорного плана к другому

Пусть задача линейного программирования находится в канонической форме и имеет исходный опорный план. Не теряя общности, предположим, что векторы А1, А2,…,Аm являются единичными, то есть базисными.

z = с1х1 + с2х2 +…+ сmхm + сm+1хm+1 +…+ сnхn  min.



х1 + а1m+1хm+1 + а1m+2хm+2 +…+ а1nхn = а1,

х2 + а2m+1хm+1 + а2m+2хm+2 +…+ а2nхn = а2,

……………………………………………………..

хm + аmm+1хm+1 + аmm+2хm+2 +…+ аmnхn = аm,

xj  0, .



В этом случае вектор правых частей системы уравнений можно разложить по векторам данного базиса следующим образом:

х1А1 + х2А2 +…+ хmAm = A0 (2.1)

Тогда исходный опорный план будет записан в виде вектора:

=(а1;а2; …;am;0; 0;…;0).



Для перехода к новому опорному плану, необходимо один из свободных векторов Аm+1, Am+2,…, An ввести в базис, а какой-то из базисных векторов вывести из него. Для введения в базис выберем вектор, имеющий хотя бы одну положительную координату.

Пусть таким вектором будет вектор Аm+1. Разложим его по векторам того же базиса

x1 m+1A1+x2 m+1A2+…+xm m+1Am=Am+1. (2.2)

Умножим соотношение (2.2) на некоторую положительную величину ≥0 и вычтем из соотношения (2.1)



(х1-х1 m+1)A1+(х2 - x2 m+1)A2+…+(xm-xm m+1)Am +Am+1=A0. (2.3)



Следующий вектор будет решением системы ограничений

=( х1-х1m+1; х2 - x2m+1;…; xm-xmm+1; ;0;0;…;0), (2.4)



если все координаты данного вектора будут неотрицательными. Рассмотрим **i**-тую координату xi - xi m+1  0.



Если xi m+1, то эта координата будет неотрицательной. Пусть xim+10. Тогда необходимо выбрать значение таким, чтобы данная координата не стала отрицательной. Для этого решим неравенство и получим ≤. Для неотрицательности всех координат, у которых xim+10 необходимо, чтобы выполнялось следующее условие:



. (2.5)



Если выполняется соотношение (2.5), то все координаты вектора в (2.4) будут неотрицательными, следовательно, является планом задачи, поскольку он содержит **m+1** неотрицательных координат.



Для того чтобы план был опорным планом задачи линейного программирования, необходимо наличие одной из координат равной нулю.



Пусть минимум в соотношении (5) был получен при i = 1.

Тогда если , (2.6)



то первая координата вектора станет равной нулю.



Соотношение (2.6) называется **симплексным отношением**. Таким образом, мы перешли от исходного опорного плана (базисные векторы А1, А2,…, Аm) к опорному плану (базисные векторы А2,А3,…,Аm,Am+1).



Критерий оптимальности задачи линейного программирования

**Теорема1***:*Если для некоторого вектора Аj выполняется соотношение zj – сj, то план не является оптимальным и можно перейти к плану такому, что z(х1) ≤ z(х0).



Здесь: zj = (, Аj) – скалярное произведение векторов,



– вектор, состоящий из коэффициентов при базисных переменных целевой функции **z**,



сj – коэффициент целевой функции **z** при переменной **хj**.

**Теорема 2.** Если для всех векторов А1, А2,…, Аn некоторого опорного плана выполняется соотношение zj – сj, то опорный планявляется оптимальным. Величины (zj – сj) – называются **оценками** соответствующих векторов.



Таким образом, данное следствие теоремы позволяет установить является ли очередной опорный план оптимальным и, если не является, то согласно теореме, мы можем перейти к другому опорному плану, при котором значение целевой функции будет меньше. Для этого в базис, согласно теореме, необходимо ввести вектор Аj, имеющий положительную оценку.

**Замечание.** В теореме и следствии предполагается, что задача находится в канонической форме с целевой функцией на минимум. Однако симплекс–методом можно решать и задачи в канонической форме с целевой функцией на максимум. В этом случае при анализе значений оценок используется их противоположный смысл, то есть план будет оптимальным, если все оценки положительные и нулевые.

**1.2 Описание симплексной таблицы**

Симплекс-метод является табличным методом решения задачи линейного программирования, то есть исходную задачу решаем в виде таблицы. Переход к следующему опорному плану осуществляется с помощью построения новой симплексной таблицы.

Пусть задача линейного программирования задана в канонической форме и имеется исходный опорный план. Предположим для определённости, что векторы А1, А2,…, Аm являются базисными, тогда:

z = с1х1 + с2х2 +…+ сmхm + сm+1хm+1 +…+ сnхn  min.



х1 + а1m+1хm+1 + а1m+2хm+2 +…+ а1nхn = а1,

х2 + а2m+1хm+1 + а2m+2хm+2 +…+ а2nхn = а2,

……………………………………………………..

хm + аmm+1хm+1 + аmm+2хm+2 +…+ аmnхn = аm,

xj  0, .



Для данной задачи строится симплексная таблица (табл. 2.1).

Таблица 2.1 – Порядок заполнения симплексной таблицы

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Б | СБ | Ао | А1 | А2 | … | Аm | Аm+1 | … | Аn |
| с1 | с2 | … | сm | сm+1 | … | сn |
| А1 | с1 | а1 | 1 | 0 | … | 0 | а1m+1 | … | а1n |
| А2 | с2 | а2 | 0 | 1 | … | 0 | а2m+1 | … | а2n |
| … | … | … | … | … | … | … | … | … | … |
| Аm | сm | аm | 0 | 0 | … | 1 | аmm+1 | … | аmn |
| zj – сj | | z(ХБо) | 0 | 0 | … | 0 | zm+1 – сm+1 | … | zn – сn |

В заголовке столбцов записываются все векторы системы ограничений и соответствующие коэффициенты при переменных целевой функции. Столбец **А0** состоит из правых частей уравнений. На пересечении 4-го, 5-го,…, **n**-го столбцов и первых **m** строк записываются коэффициенты при соответствующих переменных в уравнениях.

Столбец **Б** (базис) определяет базисные векторы, причём они записываются в той последовательности, в какой выражены базисные переменные в системе ограничений.

Столбец **СБ** определяет коэффициенты целевой функции при соответствующих базисных переменных.

Последняя строка zj – сj называется **индексной**или **оценочной** и определяет оценки соответствующих векторов, за исключением первой и второй клетки. Значения клеток индексной строки при опорном плане ХБо=(а1;а2;…; аm, ; 0; 0;…;0) вычисляются следующим образом:

z(ХБо) = (СБ;Ао) = с1а1 + с2а2 +…+ сmаm,

zm+1-сm+1 = (СБ,Аm+1) – сm+1,

**. . .**

zn – сn=(СБ,Аn) – сn.

Оценки всех базисных векторов всегда равны нулю.

**1.3 Алгоритм симплексного метода (I способ)**

При решении задачи линейного программирования симплексным методом необходимо выполнить следующую последовательность действий.

1. Проверяется, находится ли задача линейного программирования в канонической форме. Если нет, то необходимо её преобразовать.
2. Проверяется наличие исходного опорного плана. При его отсутствии задача не может быть решена обычным симплекс–методом. Существуют другие модифицированные методы для решения таких задач.
3. Проводится построение исходной симплексной таблицы.
4. Проверяются значение оценок в индексной строке. Если нет положительных оценок, то выписывается оптимальное решение и алгоритм заканчивает свою работу. В противном случае выполняется пункт 5.
5. В базис вводится вектор, которому соответствует наибольшая положительная оценка. Данный столбец называется разрешающим.
6. Из базиса выводится вектор, которому соответствует наименьшее симплексное отношение. Данная строка называется разрешающей строкой.
7. Строится новая симплексная таблица. Соответствующим образом изменяются столбцы **Б** и **СБ.** Остальная часть таблицы заполняется из предыдущей с помощью гауссовских преобразований, причём индексная строка считается **m+1** строкой и также преобразуется с помощью гауссовских преобразований. Переходим на выполнение пункта 4 данного алгоритма.

После построения каждой таблицы можно проверить правильность вычислений с использованием формул вычисления оценок приведённых в предыдущем параграфе.

**1.4 Типы оптимальных решений задач линейного программирования при решении симплекс-методом**

При решении задач симплекс-методом возможны следующие виды оптимальных решений.

*1. Единственность.* Если оценки всех свободных векторов строго отрицательные, то полученный опорный план является оптимальным и единственным.

*2. Альтернативный оптимум (множество оптимальных решений).* Если среди неположительных оценок свободных векторов имеется хотя бы одна нулевая, то полученный опорный план будет оптимальным, но не единственным. В этом случае можно перейти к другим опорным планам (вводятся в базис векторы, которым соответствуют нулевые оценки) и, затем, общее оптимальное решение записать в виде выпуклой комбинации полученных оптимальных опорных планов.

*3. Задача линейного программирования не имеет оптимального решения,* *так как целевая функция не ограничена снизу.* Если в симплекс-таблице имеется положительная оценка, а все элементы данного столбца отрицательны и нулевые, то данный вектор можно ввести в базис. Однако никакой из базисных векторов нельзя из него вывести. Следовательно, дальнейшее уменьшение целевой функции возможно только при переходе к неопорному плану.

*4. Задача линейного программирования не имеет оптимального решения,* *так как система ограничений противоречива****.*** Поскольку при решении задачи обычным симплекс–методом должен быть исходный опорный план, то система линейных уравнений заведомо непротиворечива. Следовательно, такой случай не может встретиться при решении обычным симплекс-методом.

*5. ОДЗ задачи линейного программирования состоит из одной точки.* Решение такой задачи является тривиальным и может быть получено без использования симплекс-метода.

**2. Методический пример**

Решить симплекс-методом следующую задачу линейного программирования

z = 2х1 – х2 + 3х3 – 2х4  max.



-х1 + х2 + х3 = 1,

х1 + х2 2,



х1 – х2 + х4 = 1,

хj  0, j = .



Решение.

1. Задачу необходимо привести к каноническому виду:

z′ = -2х1 + х2 – 3х3 + 2х4  min.



-х1 + х2 + х3 = 1,

х1 + х2 + х5 = 2,

х1 – х2 + х4 = 1,

хj  0, j = .



1. Задача имеет исходный опорный план: ХБо=(0;0;1;1;2). Строим симплексную таблицу (таблица 2.2).
2. Рассмотрим первую таблицу. Критерием оптимальности являются неположительные оценки в индексной строке. В таблице имеются положительные оценки, следовательно, данный опорный план не является оптимальным. Наибольшая положительная оценка в индексной строке соответствует вектору **А1**. Вводим в базис вектор **А1**. Для определения вектора, выводимого из базиса, вычисляется симплексное отношение:

.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Б | СБ | | Ао | | А1 | А2 | А3 | | А4 | | А5 | |  | |
| -2 | 1 | -3 | | 2 | | 0 | |  | |
| А3 | -3 | | 1 | | **-1** | 1 | 1 | | 0 | | 0 | | 1-я таблица | |
| А5 | 0 | | 2 | | **1** | 1 | 0 | | 0 | | 1 | |
| **А4** | **2** | | **1** | | **1** | **-1** | **0** | | **1** | | **0** | |
| Z’j-сj | | -1 | | **7** | | -6 | | 0 | | 0 | 0 |  | |
| А3 | -3 | | 2 | | 0 | **0** | 1 | | 1 | | 0 | | 2-я таблица | |
| **А5** | **0** | | **1** | | **0** | **2** | **0** | | **-1** | | **1** | |
| А1 | -2 | | 1 | | 1 | **-1** | 0 | | 1 | | 0 | |
| Z’j-сj | | -8 | | 0 | | **1** | | 0 | | -7 | 0 |  | |
| А3 | -3 | | 2 | | 0 | 0 | 1 | | 1 | | 0 | | 3-я таблица | |
| А2 | 1 | |  | | 0 | 1 | 0 | | -1/2 | |  | |
| А1 | -2 | |  | | 1 | 0 | 0 | |  | |  | |
| Z’j-сj | |  | | 0 | | 0 | | 0 | |  |  |  | |

Минимум достигается в строке **А4**, поэтому выводим из базиса вектор **А4**. Переходим ко второй таблице. Вносим соответствующие изменения в столбцы **Б** и **СБ**. Делаем пересчет остальных строк таблицы по методу Жордана–Гаусса. Третья строка переписывается без изменения, так как разрешающий элемент равен единице. Третья (разрешающая) строка новой (второй) таблицы умножается на 1 и прибавляется к первой строке старой таблицы. Результат записывается в качестве первой строки новой таблицы. Затем разрешающая строка умножается на (–1) и прибавляется ко второй строке старой таблицы. Результат записывается в качестве второй строки новой таблицы. И, наконец, третья (разрешающая) строка новой таблицы умножается на (–7) и прибавляется к индексной строке старой таблицы. Результат записывается в качестве индексной строки новой таблицы. Необходимо проверить правильность проведённых преобразований. Для этого получим значения элементов новой индексной строки с помощью формул, приведённых в предыдущем параграфе. Если значения некоторых элементов не совпадают с полученными значениями с помощью метода Жордана–Гаусса, то при проведении преобразований допущена ошибка, которую необходимо устранить.

Рассматриваем индексную строку второй таблицы. Положительная оценка в ней соответствует вектору **А2**. Вводим в базис вектор **А2**. Симплексное отношение считать не нужно, так как в данном столбце имеется единственное положительное число, соответствующее вектору **А5**. Выводим из базиса вектор **А5**. Переходим к третьей таблице. Вносим соответствующие изменения в столбцы **Б** и **СБ**. Выполняем пересчет остальных строк таблицы по методу Жордана–Гаусса.

Рассматриваем индексную строку третьей таблицы. Поскольку оценки в индексной строке отрицательные и нулевые, то полученный опорный план является оптимальный, а значение целевой функции **z′** является минимальным. Напомним, что вычислять оптимальное значение целевой функции не нужно, оно находится во второй клетке индексной строки последней симплексной таблицы – zmin = -17/2. Из последней симплексной таблицы выписываем оптимальные значения переменных Хmin = (3/2; 1/2; 2; 0; 0) Поскольку исходная задача была преобразована, запишем её ответ: Хmax = (3/2; 1/2; 2; 0) zmax = 17/2.

***Замечание.*** Исходная задача линейного программирования может не иметь решения, так как система ограничений противоречива в двух случаях:

1. Если при решении задачи симплекс-методом с искусственным базисом получается, что расширенная задача не имеет решения, так как целевая функция не ограничена снизу при наличии искусственных векторов в базисе.
2. Если получено оптимальное решение расширенной задачи при наличии искусственных векторов в базисе.

**3. Практическая часть**

1) решить задачу обычным Симплекс-методомом (I способом) – номер индивидуального варианта согласно номера в журнале преподавателя.

2) Выполнить проверку полученного решения, подставив полученный вектор Хmin в целевую функцию. Сделать выводы.

**Варианты заданий**

|  |  |
| --- | --- |
| **1** | **2** |
| z = x2 + x4 → max;  x1 - 2x2 + x4 = 5,  2x1 + 3x2 + x3 = 4,  xj≥0, j= | z = -2x1 + 3x2 + x3 + 4x4 → min;  x1  + x5 = 5,  3x3 + x4 + x5 = 4,  x2 + 2x3 + 4x5 = 6,  xj≥0, j= |
| **3** | **4** |
| z = 4x2 + 4x3 - 4x4 - x5 → min;  -3x1 + x3 + 2x4 - 2x5 = 3,  2x1 + x2 + x4 + 2x5 = 6,  xj≥0, j= | z = x2 + 4x3 + 4x4 → max;  x2 + 3x3 + x4 = 5,  x1 - 2x3 + 2x4 = 0,  -3x3  ≤ 6,  xj≥0, j= |
| **5** | **6** |
| z = 3x1 + 3x2 + x4 - 2x5 → max;  x1 + 2x2 + 4x4  = 6,  x3 + 3x4  = 7,  2x2 + 2x4 + x5 = 8,  xj≥0, j= | z = 3x2 → max;  -x1 + 2x2 + x3 = 3,  2x1 + x2  ≤ 4,  xj≥0, j= |
| **7** | **8** |
| z = 3x1 - 2x2 - 2x3 + x4 - 4x5 → min;  x2 - 2x3   = 6,  x3 + x4 + 4x5 = 6,  x1   + x5 = 6,  xj≥0, j= | z = 3x1 - x2 + 2x4 → min;  3x2 + 2x3  ≤ 5,  x1 + 2x2 + 2x4 = 7,  x2 + 4x3 + 4x4 ≤ 4,  xj≥0, j= |
| **9** | **10** |
| z = x2 + 4x3 - 3x4 - 2x5 → max;  -x1 + 3x2 + x3  = 6,  2x1 - 2x2 + x4 + x5 = 4,  xj≥0, j= | z=4x1 + 3x2 - 3x3 + 3x4 + 2x5 + 3x6→min;  x1 + 4x2 + 4x5 + x6 = 4,  2x2 + x4 + 2x5  = 4,  x3 + 4x5 + 2x6 = 6,  xj≥0, j= |
| **11** | **12** |
| z = x1 - 4x2 + 3x3 + 4x4 → max;  x1 + 2x3 - x4 = 2,  x2 + 4x3 + 2x4 = 6,  xj≥0, j= | z = 4x3 + 4x4 - x5 → min;  2x1 + x2  = 7,  -4x1 + x3 - x5 = 5,  2x1 + x4 + 2x5 = 8,  xj≥0, j= |
| **13** | **14** |
| z = 3x1 - 3x2 - x3 + 3x4 → max;  x1 - x2 - 3x4 ≤ 4,  -x2 + x3 + 3x4 = 5,  3x1   ≤ 5,  xj≥0, j= | z = x1 + x3 + 3x4 → max;  -4x2 + 2x3 + 4x4 ≤ 4,  x2 + 3x3 + x4 ≤ 3,  x1 + 4x2 - 4x3 - x4 = 5,  xj≥0, j= |
| **15** | **16** |
| z = x1 + 4x2 - 2x3 → max;  x1 - 2x3 + 3x4 = 3,  4x4 ≤ 6,  x2 + 2x3 - 4x4 = 7,  xj≥0, j= | z = -x1 - 3x2 + 4x3 + 2x5 → max;  x1 + x3 + x4 + x5 = 8,  x2 - 3x3  + 4x5 = 8,  xj≥0, j= |
| **17** | **18** |
| z = x1 - x2 - x3 + 2x4 + 3x5 → min;  4x2 + x5 = 7,  3x1 + 2x2  + x4  = 6,  2x1 - 4x2 + x3   = 4,  xj≥0, j= | z = 4x1 - 3x2 - 3x4 + 2x5 → max;  x1 + x3 + 2x4 + 3x5 = 3,  2x1 + x2 - 4x4 - x5 = 0,  xj≥0, j= |
| **19** | **20** |
| z = -3x1 + 2x2 + x3 + 4x4 + 2x5 → min;  2x1 + x3 - 3x4 + x5 = 3,  2x1 + x2 - 4x3 + x4 = 5,  xj≥0, j= | z = 4x1 + 4x2 + 2x4 + x5 + 2x6 → min;  x3 - 4x4 + x5 - 4x6 = 5,  x1 - 4x4 + 4x5 + 3x6 = 6,  x2 + 4x4 - 4x5 + x6 = 7,  xj≥0, j= |
| **21** | **22** |
| z = -3x1 + 2x2 + x3 + 4x4 - x5 - 3x6 → max;  -x4 + 4x5 + x6 = 6,  x2 + x3 - 2x4 + 3x5  = 8,  x1  + 3x4 - 2x5  = 3,  xj≥0, j= | z = x1 - 4x4 + x6 → min;  x2 + 4x4 - 2x5 = 7,  -2x1 + x3 + 2x4 + 2x5 = 3,  x1   + x6 = 0,  xj≥0, j= |
| **23** | **24** |
| z = -3x1 + 4x2 + x3 - x4 + x5 → min;  x1 - 2x2 + x3 - 2x5 = 5,  x2 + 2x3 + x4 + 3x5 = 3,  xj≥0, j= | z = -x2 + 2x4 → max;  -3x2 + x3 + 4x4 ≤ 7,  4x2 - 4x3  ≤ 6,  x1 + 3x2 + 2x3 + 4x4 = 8,  xj≥0, j= |
| **25** | **26** |
| z = -4x1 - 4x2 + 3x3 + 2x5 → min;  -2x2 - 3x3 + x6 = 0,  4x1 + x2 - 3x3 + x4 = 5,  -3x1 + 3x2 + 4x3 + x5 = 4,  xj≥0, j= | z=3x1 + 3x2 + x3 + 3x4 - x5 + 4x6 → min;  -x2 + x4 - x6 = 8,  x1 + 3x3  = 6,  -4x2 + 4x3 + x5 + 4x6 = 6,  xj≥0, j= |
| **27** | **28** |
| z = -4x1 - x3 - 4x4 → max;  x1 - 3x2 + 3x3 = 7,  4x2 - 3x3 + x4 = 5,  xj≥0, j= | z = -3x1 - 4x2 - x3 + x4 - 3x6 → min;  2x1 + 3x2 + x3 - 3x5  = 6,  -2x1 + x2 + x4 + 4x5  = 6,  2x5 + x6 = 4,  xj≥0, j= |
| **29** | **30** |
| z = 2x1 + 3x2 + 4x3 → min;  4x1 + x2 + 4x3 = 7,  4x1 - x3 + x4 = 4,  xj≥0, j= | z = 4x1 + 4x2 + 4x4 → min;  x2 + 2x3 - 4x4 = 8,  x1 + x3 + 4x4 = 7,  xj≥0, j= |

**4. Требования к отчету**

1. Индивидуальное задание (условие)
2. Представление задачи в каноническом виде (с пояснениями).
3. Построение табличного решения в соответствии с алгоритмом п.1.3 (с пояснениями)
4. Анализ полученных результатов. Выводы.