

### Задача 27.1. Упругие волны

Поперечная волна, описываемая уравнением бегущей волны

$$y(x, t) = A \sin(\omega t - kx)$$

распространяется вдоль упругого шнура. В таблице 27.1 представлены основные характеристики волны:

$A$  – амплитуда,

$\lambda$  – длина волны,

$T$  – период колебаний,

$\omega$  – циклическая частота,

$v$  – фазовая скорость,

$k$  – волновое число,  $\nu$  – частота.

Определите фазу  $\Phi(x, t)$  бегущей волны и запишите уравнение волны  $y(x, t)$ . Начальную фазу колебаний примите равной нулю. Для точки шнура, удалённой от источника колебаний на расстояние  $x_1$ , найдите смещение  $y_1(x_1, t_1)$  в момент времени  $t_1$ , а также скорость  $u(x_1, t_1)$  и ускорение  $a(x_1, t_1)$  заданной точки. Если численные значения  $x_1, t_1$  не заданы, тогда уравнения для  $u(x, t)$  и  $a(x, t)$ , следует записать в общем виде и определить максимальные значения скорости и ускорения точек шнура.

#### Пример решения задачи 27.1 (вариант 21, таблица 27.1)

Поперечная волна распространяется вдоль упругого шнура со скоростью  $v = 15 \text{ м/с}$ , имея период колебаний  $T = 1,2 \text{ с}$  и амплитуду  $A = 2 \text{ см}$ . Определить частоту колебаний  $\nu$ , циклическую частоту  $\omega$ , длину волны  $\lambda$ , волновое число  $k$ , фазу  $\Phi_1$ , смещение  $y_1$ , скорость  $u$  и ускорение  $a$  точки, отстоящей на расстоянии  $x_1 = 45 \text{ м}$  от источника волны в момент  $t_1 = 4 \text{ с}$ .

**Дано:**

$$v = 15 \text{ м/с},$$

$$T = 1,2 \text{ с},$$

$$A = 0,02 \text{ м},$$

$$x_1 = 45 \text{ м},$$

$$t_1 = 4 \text{ с}$$

$$\nu - ? \quad \omega - ?$$

$$\lambda - ? \quad k - ?$$

$$y(x, t) - ?$$

$$\Phi(x, t) - ?$$

$$y_1(x_1, t_1) - ?$$

$$\Phi_1(x_1, t_1) - ?$$

$$v(x_1, t_1) - ?$$

$$a(x_1, t_1) - ?$$

**Решение:**

Уравнение бегущей волны имеет вид

$$y(x, t) = A \sin(\omega t - kx), \quad (1)$$

где  $(\omega t - kx) = \Phi(x, t)$  – фаза колебания точки, находящейся на расстоянии  $x$  от источника волны в момент времени  $t$ .

$$\text{Циклическая частота } \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{5\pi}{3}, \text{ рад/с}$$

$$\text{Частота } \nu = \frac{1}{T} = \frac{5}{6}, \text{ с}^{-1}$$

$$\text{Длина волны } \lambda = vT = 18 \text{ м}$$

$$\text{Волновое число } k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{9}, \text{ м}^{-1}$$

Таким образом, уравнение фазы волны:

$$\Phi(x, t) = \left(\frac{5}{3}\pi t - \frac{\pi}{9}x\right) \quad (2)$$

Уравнение бегущей волны

$$y(x, t) = 0,02 \sin\left(\frac{5}{3}\pi t - \frac{\pi}{9}x\right) \quad (3)$$

Фазу  $\Phi_1$  и смещение  $y_1$  для заданной точки найдём, подставив в уравнения (2) и (3) числовые значения  $x_1$  и  $t_1$ .

$$\Phi_1(x_1, t_1) = \left(\frac{5}{3}\pi \cdot 4 - \frac{\pi}{9} \cdot 45\right) = \frac{5\pi}{3} \text{ рад.}$$

$$y_1(x_1, t_1) = 0,02 \sin \frac{5\pi}{3} = -0,02 \frac{\sqrt{3}}{2} = -1,73 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

Скорость точки  $u(x, t)$  является первой производной смещения  $y(x, t)$  по времени:

$$u(x, t) = \frac{dy}{dt} = A\omega \cos(\omega t - kx) = \frac{\pi}{30} \cos\left(\frac{5\pi}{3}t - \frac{\pi}{9}x\right) \quad (4)$$

Таблица 27.1

вар.	A, м	$\omega, 1/c$	$K, м^{-1}$	$v, 1/c$	$\lambda, м$	T, с	V, м/с	$x_1, м$	$t_1, с$	$u(x_1, t_1),$ м/с	$a(x_1, t_1),$ м/с <sup>2</sup>	$y_1(x_1, t_1),$ м	$\Phi_1(x_1, t_1),$ рад.
1	$4 \cdot 10^{-6}$	$5000\pi$	?	?	?	?	5000	1	$10^{-3}$	?	?	?	?
2	$4 \cdot 10^{-6}$	?	?	?	2	0.4	?	1	1	?	?	?	?
3	$2 \cdot 10^{-6}$	?	?	250	2	?	?	1	$3 \cdot 10^{-3}$	?	?	?	?
4	0,1	?	?	?	0.8	0.6	?	40	60	?	?	?	?
5	$10^{-6}$	$10000\pi$	?	?	$\pi$	?	?	$2.5\pi$	$10^{-4}$	?	?	?	?
6	$1 \cdot 10^{-3}$	$2000\pi$	0.4	?	?	?	?	-	-	?(max)	?(max)	-	-
7	$10^{-6}$	$4000\pi$	?	?	?	?	5000	2.5	$10^{-3}$	?	?	?	?
8	$10^{-6}$	?	?	?	?	0,002	$500\pi$	-	-	?(max)	?(max)	-	-
9	0.08	?	?	30	?	?	30	1.5	0.1	?	?	?	?
10	0.04	$600\pi$	?	?	?	?	600	0.75	0.01	?	?	?	?
11	0,005	628	2	?	?	?	?	$0.25\pi$	0.01	?	?	?	?
12	0,02	?	2	100	?	?	?	-	-	?(max)	?(max)	-	-
13	0,04	$2\pi$	2	?	?	?	?	-	-	?(max)	?(max)	-	-
14	0,005	?	$\pi$	100	?	?	?	0.5	0.02	?	?	?	?
15	0,0025	?	?	500	0.7	?	?	-	-	?(max)	?(max)	-	-
16	0,0002	?	?	?	1.2	0.003	?	2	0.007	?	?	?	?
17	0,10	314	?	?	$15\pi/8$	?	?	0.75	0.9T	?	?	?	?
18	0,01	?	$10\pi$	?	?	?	10	0.05	0.01	?	?	?	?
19	0,004	?	?	200	?	?	300	1	0.1	?	?	?	?
20	0.015	?	?	100	?	?	340	0.51	-	?	?	?	?
21	0.02	?	?	?	?	1.2	15	45	4	?	?	?	?

Ускорение точки  $a(x, t)$  является первой производной от скорости  $u(x, t)$  по времени:

$$a(x, t) = \frac{du}{dt} = -A\omega^2 \sin(\omega t - kx) = -\frac{\pi^2}{18} \sin\left(\frac{5\pi}{3} t - \frac{\pi}{9} x\right) \quad (5)$$

Подставим числовые значения  $x_1, t_1$  в (4) и (5), и рассчитаем скорость и ускорение:

$$u(x_1, t_1) = \frac{\pi}{30} \cos \frac{5\pi}{3} = 5,2 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}$$

$$a(x_1, t_1) = -\frac{\pi^2}{18} \sin \frac{5\pi}{3} = -0,47 \text{ м/с}^2$$

Как следует из уравнений (4), (5) максимальная скорость точек шнура

$$u_{\max} = \frac{\pi}{30} \text{ м/с},$$

максимальное ускорение  $-\frac{\pi^2}{18} \text{ м/с}^2$

### Задача 27.2. Электромагнитные волны

В вакууме распространяется плоская электромагнитная волна, уравнения которой имеют вид  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$

Некоторые параметры волны заданы в таблице 27.2. Определите величины, приведенные в последнем столбце таблицы, с указанием направления векторных величин. Принятые обозначения:

$T$ -период,  $\nu$ -частота,  $\lambda$ -длина волны,  $I$ -интенсивность волны,  $w_0$ -объемная плотность энергии,  $\mathbf{S}_0$  - вектор плотности потока энергии в точке  $\mathbf{r}_1 = (0, 0, 0)$  в момент времени  $t = 0$ ,  $\uparrow\uparrow$ - сонаправленные векторы,  $\uparrow\downarrow$ - противоположно направленные векторы

Таблица 27.2

Вар.	Заданные параметры электромагнитной волны	Найти:
1	$\mathbf{E}_0 = (50; 0; 0)$ мВ/м, $\mathbf{k} = (0; \pi; 0)$ м <sup>-1</sup>	$\mathbf{B}_0, \omega, w_0$
2	$\mathbf{E}_0 = (50; 0; 0)$ мВ/м, $\mathbf{B}_0 \uparrow \uparrow \mathbf{e}_z$ , $\omega = 6 \cdot 10^8$ рад/с	$\mathbf{k}, \lambda, I$
3	$\mathbf{B}_0 = (0; 1; 0; 0)$ нТл, $\mathbf{k} = (0; -\pi; 0)$ м <sup>-1</sup>	$\mathbf{E}_0, \omega, I$
4	$\mathbf{B}_0 = (1; 0; 0)$ нТл, $\mathbf{k} = (0; 0; -1)$ м <sup>-1</sup>	$\mathbf{E}_0, w_0, T$
5	$\mathbf{E}_0 = (-10; 0; 0)$ мВ/м, $\mathbf{k} = (0; 1; 0)$ м <sup>-1</sup>	$\mathbf{B}_0, \mathbf{S}_0, T$
6	$\mathbf{B}_0 = (0; 0; 1)$ нТл, $\nu = 100$ МГц, $\mathbf{E}_0 \uparrow \downarrow \mathbf{e}_y$	$\omega, w_0, \mathbf{k}$
7	$\mathbf{B}_0 = (-5; 0; 0)$ нТл, $\mathbf{k} = (0; -\pi; 0)$ м <sup>-1</sup>	$\mathbf{S}_0, \nu, \mathbf{E}_0$
8	$\mathbf{E}_0 = (-20; 0; 0)$ мВ/м, $\mathbf{k} = (0; 0; -2)$ м <sup>-1</sup>	$\mathbf{B}_0, \nu, I$
9	$\mathbf{E}_0 = (0; 50; 0)$ мВ/м, $\mathbf{B}_0 \uparrow \uparrow \mathbf{e}_x$ , $T = 10$ нс	$\mathbf{k}, \lambda, \mathbf{S}_0$
10	$\mathbf{E}_0 = (0; 70; 0)$ мВ/м, $\mathbf{k} = (0; 0; \pi)$ м <sup>-1</sup>	$\mathbf{B}_0, \lambda, w_0$
11	$\mathbf{B}_0 = (-0,5; 0; 0)$ нТл, $\lambda = 3$ м, $\mathbf{E}_0 \uparrow \uparrow \mathbf{e}_y$	$\mathbf{k}, \omega, I$
12	$\mathbf{E}_0 = (0; 30; 0)$ мВ/м, $\mathbf{B}_0 \uparrow \downarrow \mathbf{e}_z$ , $\omega = 3 \cdot 10^8$ рад/с	$\mathbf{k}, \lambda, w_0$
13	$\mathbf{B}_0 = (0; -1; 0)$ нТл, $\mathbf{k} = (\pi; 0; 0)$ м <sup>-1</sup>	$\mathbf{E}_0, \lambda, I$
14	$\mathbf{B}_0 = (0; 0; 5; 0)$ нТл, $\mathbf{k} = (0; 0; 1)$ м <sup>-1</sup>	$\mathbf{E}_0, \omega, w_0$
15	$\mathbf{E}_0 = (0; -50; 0)$ мВ/м, $\mathbf{k} = (-\pi; 0; 0)$ м <sup>-1</sup>	$\mathbf{B}_0, \omega, \mathbf{S}_0$
16	$\mathbf{B}_0 = (0; 0; -0,3)$ нТл, $\nu = 150$ МГц, $\mathbf{E}_0 \uparrow \downarrow \mathbf{e}_y$	$\mathbf{k}, \lambda, \mathbf{S}_0$
17	$\mathbf{E}_0 = (0; 0; 30)$ мВ/м, $\mathbf{k} = (2; 0; 0)$ м <sup>-1</sup>	$\mathbf{B}_0, I, T$
18	$\mathbf{E}_0 = (0; 0; 70)$ мВ/м, $\mathbf{B}_0 \uparrow \uparrow \mathbf{e}_y$ , $T = 7$ нс	$\mathbf{k}, \omega, I$
19	$\mathbf{B}_0 = (0; 0; 1)$ нТл, $\mathbf{k} = (-\pi; 0; 0)$ м <sup>-1</sup>	$\mathbf{S}_0, T, \mathbf{E}_0$
20	$\mathbf{E}_0 = (0; 0; 50)$ мВ/м, $\mathbf{k} = (0; -1; 0)$ м <sup>-1</sup>	$\mathbf{B}_0, \nu, w_0$
21	$\mathbf{B}_0 = (0; 1; 0; 0)$ нТл, $\lambda = 6$ м, $\mathbf{E}_0 \uparrow \downarrow \mathbf{e}_z$	$\mathbf{k}, T, w_0$

Найдите разность фаз электромагнитной волны в точках  $\mathbf{r}_1 = (0, 0, 0)$  м,  $\mathbf{r}_2 = (3, 4, 5)$  м и модуль вектора напряженности  $\mathbf{E}$  во второй точке в момент времени  $t = 30$  нс.

Используя данные таблицы 27.2, сформулируйте и решите задачу.