

Задание по теме «Анализ структурной надежности СС»

Определение квазисечения

Задание.

Выполнить анализ сети (рисунок 1) на предмет определения квазисечения между парой коммутационных узлов.

Вариант задания дан в таблице 1 и соответствует списочному номеру студента в журнале посещения занятий.

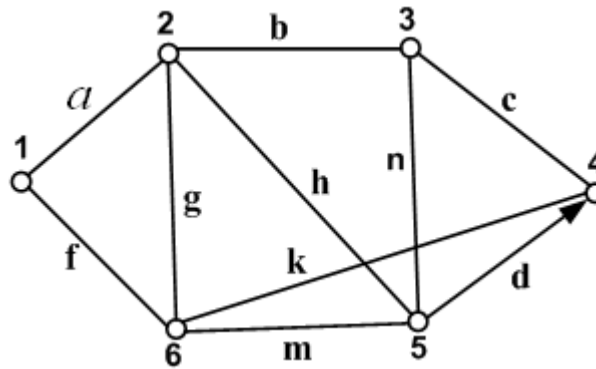


Рисунок 1. Структура сети для задачи 1

Таблица 1. Варианты исходных данных к задаче 1

Номер узла	Номер варианта											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
i	1	2	1	3	4	1	1	6	2	3	2	3
j	2	1	3	1	1	5	6	1	3	2	5	4
Номер узла	Номер варианта											
	13	14	15	16	17	18	19	20	21	пример	22	23
i	4	3	3	4	5	4	2	4	5	6	6	3
j	3	5	4	5	4	6	4	6	6	5	2	6

Алгоритм выполнения.

1) построить дерево всех возможных простых путей от $УК_i$ ко всем другим узлам сети, используя графический способ. Номер узла i взять из таблицы 1 в соответствии с номером варианта задания;

2) выделить пути ранга r не более трех в дереве путей для заданной в таблице 1 пары узлов $УК_i$ и $УК_j$;

3) найти структурную матрицу сети;

4) используя структурную матрицу, определить пути ранга r не более 3 от $УК_i$ до узла $УК_j$ матричным способом и сравнить полученный результат с результатом п. 2;

5) найти квазисечения между узлами $УК_i$ и $УК_j$ для множества путей ранга $r \leq 3$.

Методические указания

Сеть связи отображается в виде графа, вершины которого сопоставляются с узлами коммутации первичной или вторичной сети связи. Ребра графа (ветви), соединяющие узлы, соответствуют линиям связи первичной сети или пучкам каналов вторичной сети. В зависимости от характеристик линий связи, ребра могут быть ориентированными (направленными) или неориентированными (ненаправленными).

Как вершине, так и ребру может быть приписан вес или совокупность весов, характеризующих их свойства, например надежность, пропускная способность, длина линии связи и т.п.

Для передачи информации в сети от узла коммутации $УК_i$ к $УК_j$ должен быть использован путь μ_{ij} , который представляется упорядоченным набором ребер и узлов, входящих в данный путь. Рангом пути $r(\mu_{ij})$ называется число составляющих его ребер графа (линий связи сети).

Путь может записываться перечнем ребер. При этом будем считать, что, если ребро в данном пути направлено от узла с меньшим индексом к узлу с большим индексом, то оно обозначается символами, например, $a, b, c \dots$. В противном случае - $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \dots$.

Сечением сети по отношению к узлам i и j называется минимальная совокупность ребер, которые нужно изъять из сети с тем, чтобы узлы $УК_i$ и $УК_j$ оказались в разных, не связанных между собой, частях сети.

Существуют разные методы отыскания путей в графе сети. Однако, в основном используется два: графический и матричный.

Графический метод.

Графический способ позволяет определить все простые пути от одного заданного узла ко всем остальным узлам сети. Метод предполагает построение дерева путей с целью дальнейшего просмотра каждого пути, включенного в дерево путей.

Алгоритм построения дерева путей:

Шаг 1. Отмечаем узел i и выбираем смежные с данным узлом узлы графа сети. В результате получаем узлы первого яруса по отношению к выбранному узлу.

Шаг 2. Для построения узлов r -го яруса ($r = 2, 3, \dots, h$, где h – максимально допустимое число транзитных участков в пути):

- а) поочередно рассматриваем узлы $(r - 1)$ -го яруса;
- б) для каждого узла k в $(r - 1)$ -ом ярусе выбираем поочередно смежные узлы;

в) исключаем номера узлов, относительно которых были образованы подмножества узлов в предыдущих ярусах, связанных узлом k . Оставшиеся узлы соответствуют подмножеству узлов r -го яруса, образованного узлом k .

Шаг 3. Построение дерева путей продолжается до заданного h -го яруса.

Имея дерево путей относительно узла i , можно проследить любой из возможных путей с заданным числом транзитных участков (r , рангом пути) между фиксированным узлом i и произвольным узлом j . С этой целью используем следующий алгоритм:

1) в r -ом ярусе дерева, образованного относительно узла i , находим заданный конечный узел j .

2) отмечаем номера узлов, относительно которых образованы подмножества узлов, связанные с выбранным узлом j . Отмеченные узлы принадлежат пути от i -го узла к узлу j .

Пример выполнения задания графическим методом.

В качестве примера построим дерево путей для узла 6 сети, представленной виде графа на рисунке 1.

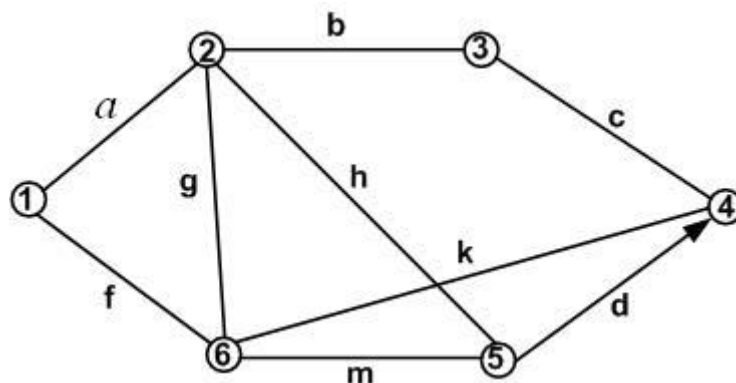


Рисунок 1. Структура сети

Определим множество путей от узла 6 к другим узлам сети. Отмечаем исходный узел 6, который относится к *нулевому ярусу*. По графу сети определяем смежные с узлом 6 узлы – 1, 2, 4 и 5, которые образуют узлы *первого яруса*. Для узла 1 выбираем узлы 2 и 6. Так как узел 1 связан с узлом 6 нулевого яруса, то во втором ярусе записываем только узел 2. Для узла 2 в подмножество узлов второго яруса попадают узлы 3 и 5. Для узла 4 в подмножество узлов второго яруса попадает узел 3. Для узла 5 в подмножество узлов второго яруса попадает узел 4. Аналогичным образом определяются подмножество узлов третьего и последующих ярусов. Узлы смежных ярусов связываются между собой соответствующими ребрами графа сети с учетом исключения путей с повторяющимися узлами в этих путях.

На рисунке 2 приведено дерево путей для узла 6.

Используя данное дерево путей, запишем пути $r \leq 3$ от узла 6 до узла 5:

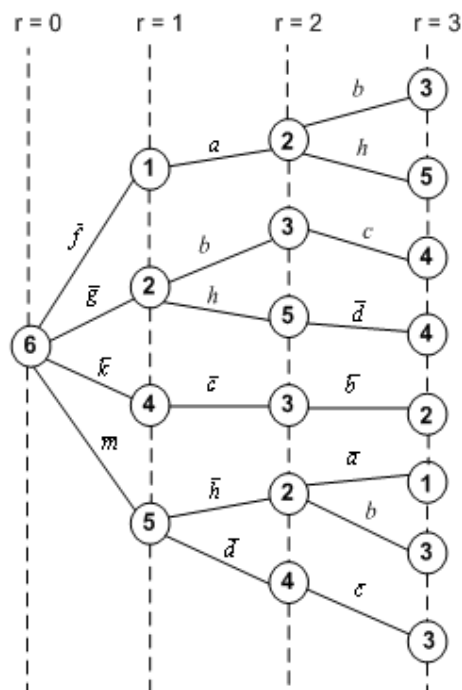


Рисунок 2. Дерево путей ранга $r \leq 3$ для узла 6

Решение $\mu_{65}^1 = \bar{m}$; $\mu_{65}^2 = \bar{g} h$; $\mu_{65}^3 = \bar{f} a h$.

Матричный метод.

Матричный метод основан на составлении структурной матрицы B , с последующим ее разложением. Матрица B – квадратная матрица, строки и столбцы которой сопоставлены узлам сети. Связь внутри узла отображается единицей (1). Если связи между узлами нет, то вхождение матрицы равно нулю (0).

Значения матрицы B рассматриваются как элементы булевой алгебры с двумя значениями: 1- соединение есть, 0 – соединения нет. Поэтому матрицу B преобразуют как булеву матрицу, применяя к ней аппарат булевой алгебры. При этом будем использовать следующие основные правила и законы булевой алгебры:

- 1) $a \cup (a \cap b) = a$ - закон поглощения;
- 2) $1 \cup a = 1$; $1 \cap a = a$;
- 3) $0 \cup a = a$; $0 \cap a = 0$;
- 4) $a \cap \bar{a} = 0$; $a \cup \bar{a} = 1$;
- 5) $a \cup a = a$; $a \cap a = a$ - закон поглощения.

В дальнейшем знак логического умножения \cap будем опускать. Знак логического сложения \cup соответствует параллельному существованию путей в сети между узлами сети. Знак логического умножения будем рассматривать как последовательное соединение элементов сети в том или ином пути.

Множество путей m_{ij} может быть найдено раскрытием минора структурной матрицы B , путем вычеркивания i -го столбца и j -ой строки в матрице B , и последующим разложением полученного определителя.

При вычислении определителей матриц учитываем:

а) если в каждой строке (столбце) определителя есть хотя бы одна единица, то определитель равен 1;

б) если в определителе строка (или столбец) состоит из одних нулей, то определитель равен нулю;

в) если строка (столбец) содержит одну единицу, а остальные нули, то ее (его) можно вычеркнуть;

г) для определения номера строки на последующем шаге разложения определителя, необходимо выбрать любое ребро графа сети из строки определителя, соответствующей рассматриваемому узлу на данном шаге разложения определителя. Номер строки на следующем шаге разложения определяется номером узла, с которым выбранное ранее ребро связывает рассматриваемый узел графа сети.

Рассмотрим пример определения путей в сети от узла i до узла j матричным методом.

Пример выполнения задания матричным методом.

Определим совокупность путей от узла 6 до узла 5 матричным методом, используя сеть, структура которой показана на рисунке 1.

Структурная матрица B для рассматриваемого примера имеет вид:

$B =$

Узлы	1	2	3	4	5	6
1	1	a	0	0	0	f
2	\bar{a}	1	b	0	h	g
3	0	\bar{b}	1	c	0	0
4	0	0	\bar{c}	1	0	k
5	0	\bar{h}	0	\bar{d}	1	m
6	\bar{f}	\bar{g}	0	\bar{k}	\bar{m}	1

Для определения множества путей m_{65} из матрицы B вычеркнем столбец 6 и строку 5, поскольку узел 6 является исходящим, а узел 5 – входящим. Получаем определитель (рисунок 3а). Обращаемся к строке 6 определителя (рисунок 3а), так как узел 6 является исходящим. Анализ строки 6 показывает, что узел 6 связан с узлами 1, 2, 4 и 5 соответственно ребрами \bar{f} , \bar{g} , \bar{k} и \bar{m} . Поэтому разложение определителя рисунка 3а осуществим по указанным ребрам (\bar{f} , \bar{g} , \bar{k} и \bar{m}). В полученных определителях (рисунки 3б, 3в, 3г, 3д), обращаемся, соответственно, к строке 1, строке 2 и строке 4. Определитель рисунка 3д равен 1, так как в каждой строке определителя имеется по одной единице.

Далее проведем разложение определителей **3б, 3в и 3г** по ненулевым членам соответственно **1-ой, 2-ой и 4-ой строкам**. Определители **3ж, 3з** равны нулю, так как в каждой строке и столбце указанных определителей **имеются нули**. Определитель **3и равен единице**, т. к. в каждой строке определителя имеется по одной единице. Разложение определителей **3е и 3к** осуществим соответственно по ненулевым членам **2-ой строки и 3-ей строки**. Получаем определители 3л и 3м. После разложения определителя 3л получаем 0, а после разложения определителя 3м получаем 1. Окончательно получим выражение:

$$m_{65} = \bar{f} a h \cup \bar{g} h \cup \bar{k} \bar{c} \bar{b} h \cup \bar{m}.$$

Таким образом, от узла **б** к узлу **5** могут быть использованы четыре простых пути:

$$\mu_{65}^1 = \bar{m}; \mu_{65}^2 = \bar{g} h; \mu_{65}^3 = \bar{f} a h; \mu_{65}^4 = \bar{k} \bar{c} \bar{b} h.$$

Следовательно, множество путей ранга $r \leq 3$ от узла **б** к узлу **5**, полученных как графическим, так и матричным методами, совпадают.

Последовательность разложения структурной матрицы **В** при определении путей *от узла б к узлу 5* представлена на рисунке 3.

$$m_{65} = \begin{array}{c|ccccc} \text{Узлы} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 2 & \bar{a} & 1 & b & 0 & h \\ 3 & 0 & \bar{b} & 1 & c & 0 \\ 4 & 0 & 0 & \bar{c} & 1 & 0 \\ \text{б} & \bar{f} & \bar{g} & 0 & \bar{k} & \bar{m} \end{array} =$$

а)

$$= \bar{f} \begin{array}{c|ccccc} \text{Узлы} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & b & 0 & h \\ 3 & \bar{b} & 1 & c & 0 \\ 4 & 0 & \bar{c} & 1 & 0 \end{array} \cup \bar{g} \begin{array}{c|ccccc} \text{Узлы} & 1 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & \bar{a} & b & 0 & h \\ 3 & 0 & 1 & c & 0 \\ 4 & 0 & \bar{c} & 1 & 0 \end{array} \cup$$

б)

в)

$$\cup \bar{k} \begin{array}{c|ccccc} \text{Узлы} & 1 & 2 & 3 & 5 \\ \hline 1 & 1 & a & 0 & 0 \\ 2 & \bar{a} & 1 & b & h \\ 3 & 0 & \bar{b} & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & \bar{c} & 0 \end{array} \cup \bar{m} \begin{array}{c|ccccc} \text{Узлы} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & a & 0 & 0 \\ 2 & \bar{a} & 1 & b & 0 \\ 3 & 0 & \bar{b} & 1 & c \\ 4 & 0 & 0 & \bar{c} & 1 \end{array} = I$$

г)

д)

$$= \bar{f} a \quad \cup \bar{g} \bar{a}$$

Узлы	3	4	5
2	b	0	h
3	1	c	0
4	\bar{c}	1	0

Узлы	3	4	5
1	0	0	0
3	1	c	0
4	\bar{c}	1	0

е)

ж)

$$\cup \bar{g} b \quad \cup \bar{g} h$$

Узлы	1	4	5
1	1	0	0
3	0	c	0
4	0	1	0

Узлы	1	3	4
1	1	0	0
3	0	1	c
4	0	\bar{c}	1

з)

и)

$$\cup \bar{k} \bar{c} \quad \cup \bar{m} = \bar{f} a b$$

Узлы	1	2	5
1	1	a	0
2	\bar{a}	1	h
3	0	\bar{b}	0

Узлы	4	5
3	c	0
4	1	0

к)

л)

$$\cup \bar{f} a h \quad \cup \bar{g} h \cup \bar{k} \bar{c} \bar{b} \cup \bar{m} =$$

Узлы	3	4
3	1	c
4	\bar{c}	1

$$= \bar{f} a h \cup \bar{g} h \cup \bar{k} \bar{c} \bar{b} h \cup \bar{m}.$$

м)

Рисунок 3. Определение путей от узла 6 до узла 5 матричным методом.

Для нахождения сечений (квазисечений, т.е. сечения, рассекающие пути до определенного ранга), следует заменить функцию m_{ij} на двойственную, путем замены операции логического сложения (конъюнкции) на операции логического умножения (дизъюнкции) и наоборот. Затем произвести упрощение полученного выражения. Каждое слагаемое данного выражения и будет искомым сечение.

Пример расчета.

Определим множество квазисечений для множества путей $r \leq 3$ от узла 6 до узла 5. Из рассмотренного выше примера имеем:

$$m_{65} = \bar{m} \cup \bar{g} h \cup \bar{f} a h.$$

Заменяем функцию m_{65} на двойственную S_{65} и, произведя операции умножения и сложения, получим слагаемые, определяющие квазисечения между узлами 6 и 5.

$$\begin{aligned} S_{65} &= (\bar{m})(\bar{g} \cup h)(\bar{f} \cup a \cup h) = (\bar{m} \bar{g} \cup \bar{m} h)(\bar{f} \cup a \cup h) = \\ &= \bar{m} \bar{g} \bar{f} \cup \bar{m} h \bar{f} \cup \bar{m} \bar{g} a \cup \bar{m} h a \cup \bar{m} \bar{g} h \cup \bar{m} h. \end{aligned}$$

Удаление ребер из графа сети, входящих в любое из полученных слагаемых, делает сеть несвязанной по отношению к узлам 6 и 5 при использовании путей ранга не более трех.