

Содержание

| | |
|---|----|
| Введение | 4 |
| 1. Основные требования по выполнению и защите расчётно-графических работ | 4 |
| 2. Задача 1. Исследование вращательного и поступательного движения тел | 7 |
| 3. Задача 2. Применение теоремы об изменении кинетической энергии системы | 13 |
| Контрольные вопросы | 19 |

Введение

При изучении дисциплины «Механика» наибольшие трудности у студентов возникают при решении практических задач.

Вместе с тем именно решение задач в значительной степени способствует развитию инженерного мышления у студентов, приобретение ими необходимых навыков расчётов механизмов и элементов инженерных конструкций.

В настоящей методической разработке подробно рассмотрены решения типовых задач из раздела теоретической механики, а также изложены требования по выполнению и оформлению индивидуальных расчётно-графических работ по курсу «Механика».

1. Основные требования по выполнению и защите расчётно-графических работ

Все расчётно-графические работы выполняются на стандартных листах формата А4, скреплённых в тетрадь. Титульный лист оформляется в соответствии с требованиями ЕСКД. Пример оформления титульного листа приведен на рис. 1.

Расчётно-пояснительная записка должна быть достаточно краткой, без лишних подробных пояснений и теоретических выводов, имеющихся в учебниках и других учебных пособиях, но не слишком краткой, содержащей одни только формулы и вычисления.

Формулы, приводимые в записке, должны быть, как правило, записаны сначала в общем виде, а затем уже должна быть произведена подстановка исходных данных и выполнены необходимые вычисления. При подстановке исходных данных нужно внимательно следить за соблюдением одинаковой размерности.

Все записи в расчётно-пояснительной записке ведутся чернилами синего или чёрного цвета на одной стороне писчей бумаги чётким разборчивым почерком, с расстоянием между строками 10-12 мм. Более предпочтительным является оформление записки с применением ЭВМ в любом текстовом редакторе (MS Word, Open Office и др.), при этом желательно применение шрифтов 12 или 14 кегля и полуторный интервал между строками.

| |
|---|
| МИНОБРНАУКИ РОССИИ |
| Федеральное государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования |
| _____ |
| <i>Кафедра</i> _____ |
| Расчётно-графическая работа |
| Исследование вращательного и поступательного движения твёрдых тел |
| <i>Вариант 11</i> |
| Выполнил: _____ |
| Проверил: _____ |

Рис. 1. Пример оформления титульного листа

Изложение текстового материала записки следует вести от первого лица или в безличной форме. Текст всей записки должен быть выдержан в едином стиле.

Графическая часть работы выполняется на бумаге формата А4 карандашом или гелевой ручкой чёрного цвета с применением необходимых чертёжных инструментов. Приветствуется использование компьютерных графических редакторов (Компас, AutoCad, MS Word, Corel Draw и др.).

В соответствии с заданием по числовым данным вычерчивается в масштабе схема механизма, на которой проставляются исходные данные. На расчётной схеме должны быть отмечены все кинематические и динамические параметры (скорости и ускорения точек, силы и др.). Каждым студентом все задачи расчётно-графической работы должны выполняться и отдаваться преподавателю на проверку в сроки, предусмотренные графиком работы студентов в текущем семестре. После исправления всех ошибок, отмеченных преподавателем

при проверке, каждая задача расчётно-графической работы должна быть защищена.

На защиту студент получает задание на решение задачи по соответствующему разделу курса. Если студент решил задачу, и у преподавателя нет никаких дополнительных замечаний по расчётно-графической работе, то защита считается законченной. В случае если студент при защите не справляется с решением типовых задач, то преподавателем назначается дополнительная защита (не более двух раз). Если студентом какие-либо расчётно-графические работы не защищены в течение семестра, то их защита производится в зачётно-экзаменационную сессию.

2. Задача 1. Исследование вращательного и поступательного движения тел

Механизм (см. рис. 2) состоит из ступенчатых колес 1—3, находящихся в зацеплении или связанных ременной передачей, зубчатой рейки 4 и груза 5, привязанного к концу нити, намотанной на одно из колес. Радиусы ступеней колес равны соответственно: у колеса 1 - $r_1 = 0,05$ м, $R_1 = 0,1$ м, у колеса 2 - $r_2 = 0.15$ м, $R_2 = 0.2$ м, у колеса 3 - $r_3 = 0.25$ м, $R_3 = 0.3$ м. На ободьях колес расположены точки *A*, *B* и *C*.

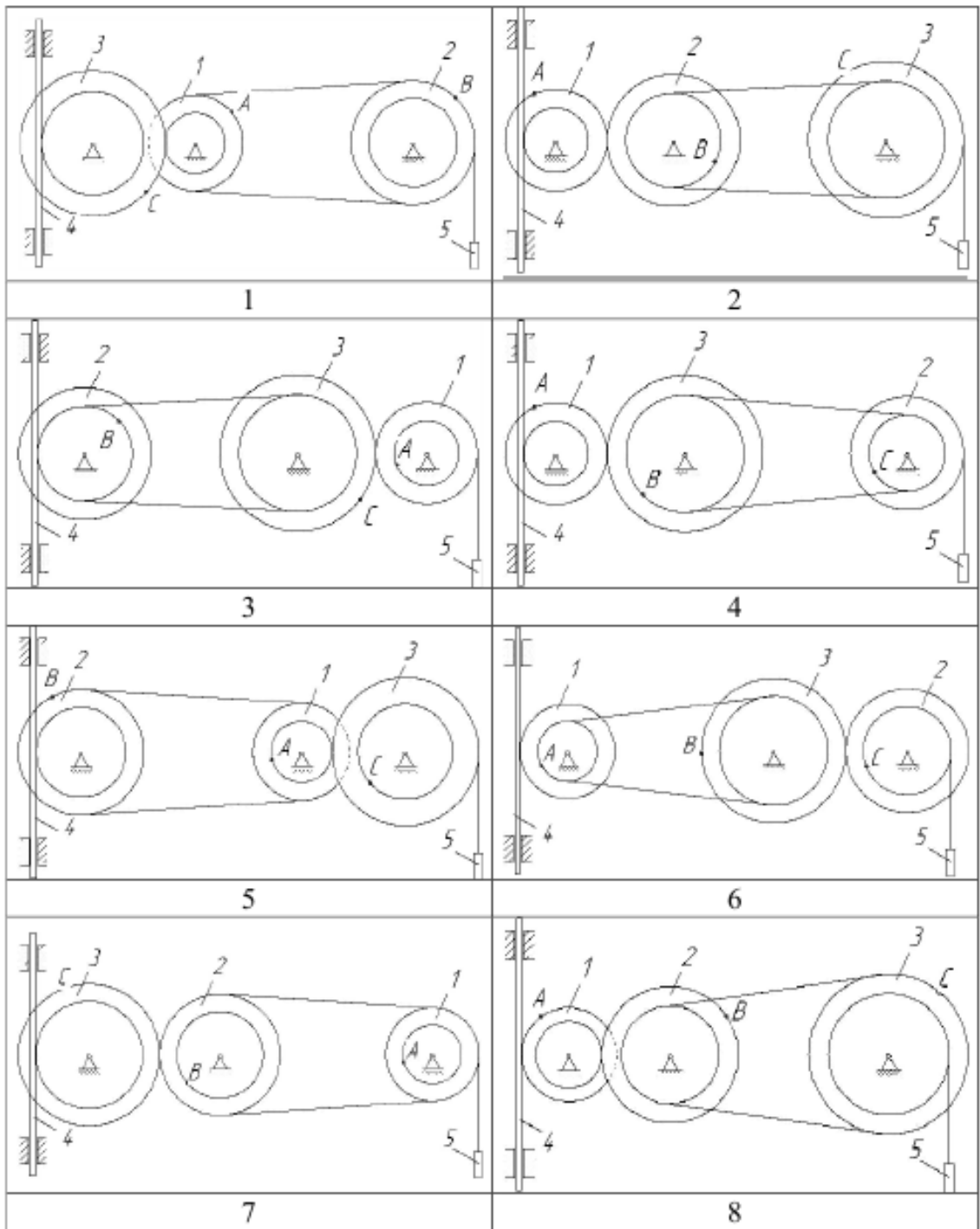
В столбце «Дано» таблицы 1 указан закон изменения скорости ведущего звена механизма, где $\omega_1(t)$ — закон изменения угловой скорости колеса 1 (рад/с), $v_5(t)$ — закон изменения скорости груза 5 (м/с) и т. д. Положительное направление для угловой скорости против хода часовой стрелки, для линейной скорости — вниз.

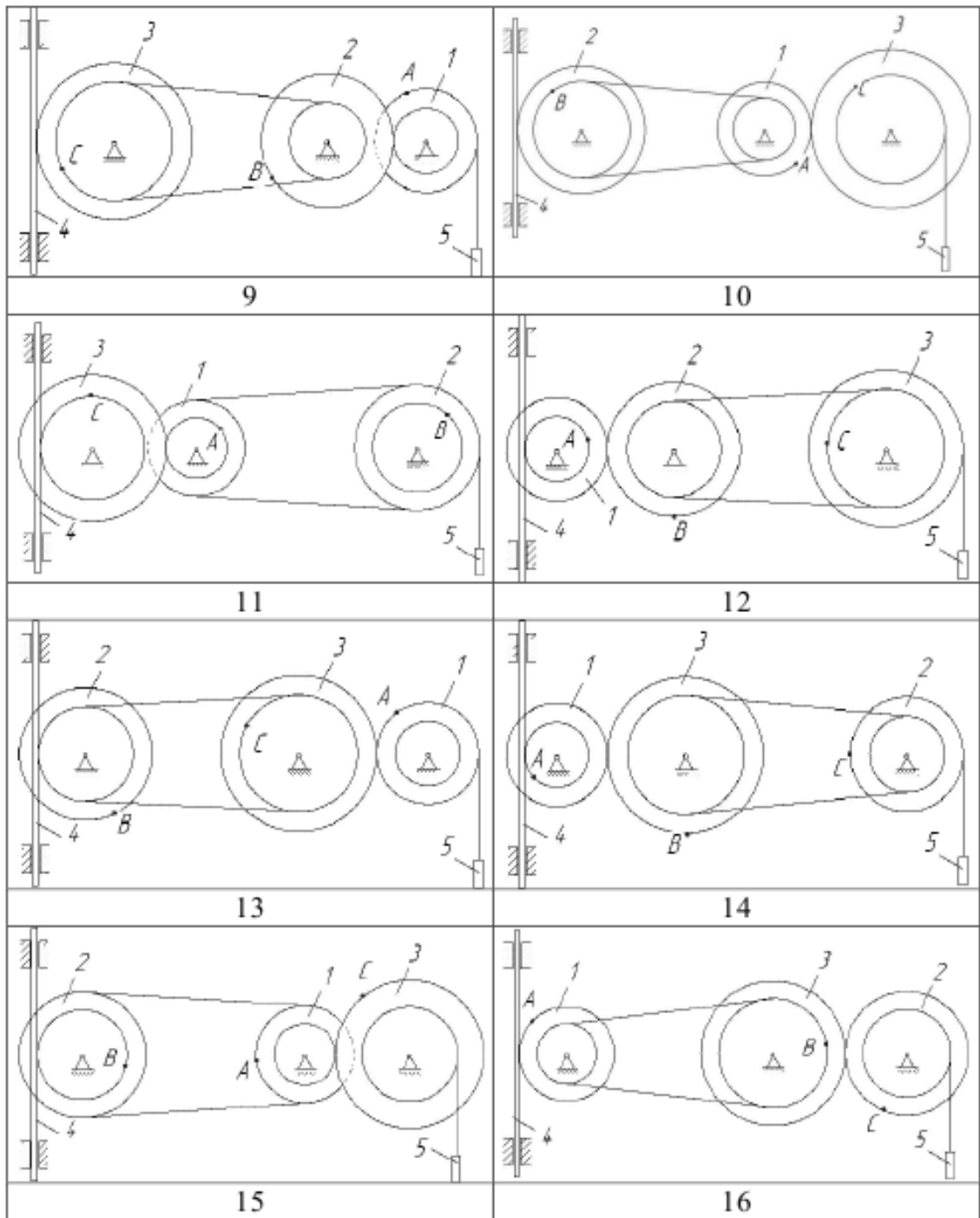
Определить в момент времени $t_1 = 3$ с скорости тел 4 и 5, точек *A*, *B*, *C*, а также угловые скорости всех колес. Определить указанные в таблице 1 в столбце «найти» ускорения (a — линейные, ε — угловые) соответствующих точек или тел.

Таблица 1

Исходные данные для расчёта

| Номер условия | Дано | Найти | Номер условия | Дано | Найти |
|---------------|--------------------------|---------------------------|---------------|------------------------|---------------------------|
| 1 | $v_5 = 0,2(t^2 - 3)$ | ε_3, a_B, a_4 | 11 | $v_4 = 0,1(t^2 + 2t)$ | ε_2, a_A, a_5 |
| 2 | $\omega_1 = 2t^2 - 9$ | ε_2, a_C, a_5 | 12 | $\omega_1 = t^2 - 12$ | ε_3, a_A, a_5 |
| 3 | $\omega_2 = 7t - 3t^2$ | ε_2, a_A, a_4 | 13 | $\omega_2 = 4t^2 - 6t$ | ε_1, a_C, a_5 |
| 4 | $\omega_3 = 4t - t^2$ | ε_1, a_B, a_5 | 14 | $\omega_3 = 3t^2 - 7t$ | ε_2, a_A, a_4 |
| 5 | $\omega_1 = 5t - 2t^2$ | ε_2, a_C, a_4 | 15 | $\omega_1 = 5t + t^3$ | ε_3, a_C, a_5 |
| 6 | $\omega_2 = 2(t^2 - 2t)$ | ε_1, a_C, a_5 | 16 | $\omega_2 = 2t^2 - 8t$ | ε_1, a_C, a_5 |
| 7 | $v_4 = 0,3t^2 - 0,8$ | ε_3, a_B, a_5 | 17 | $v_5 = 0,3t^2 - 0,6$ | ε_3, a_A, a_4 |
| 8 | $v_5 = 0,2t^2 - 0,5t$ | ε_1, a_C, a_4 | 18 | $v_4 = 0,2t^2 - 0,4t$ | ε_2, a_C, a_5 |
| 9 | $\omega_3 = 8t - 3t^2$ | ε_2, a_A, a_4 | 19 | $\omega_3 = 9t - 2t^2$ | ε_1, a_B, a_4 |
| 10 | $v_4 = 0,4(t^3 - 4t)$ | ε_1, a_C, a_5 | 20 | $v_5 = 0,4t^3 - 0,8t$ | ε_2, a_C, a_4 |





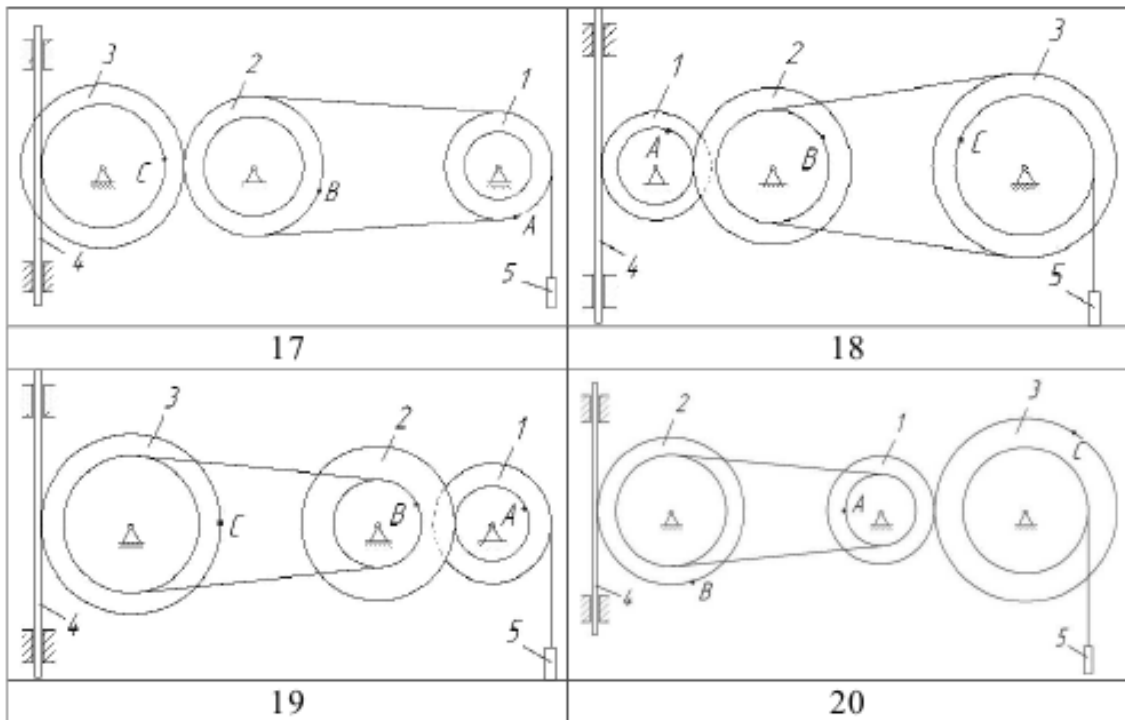


Рис. 2. Варианты расчётных схем механизмов

Пример выполнения задания.

Механизм (рис. 3) состоит из ступенчатых колес $1-3$, находящихся в зацеплении или связанных ременной передачей, зубчатой рейки 4 и груза 5 , привязанного к концу нити, намотанной на одно из колес. Радиусы ступеней колес равны соответственно: у колеса $1 - r_1 = 2$ см, $R_1 = 4$ см, у колеса $2 - r_2 = 6$ см, $R_2 = 8$ см, у колеса $3 - r_3 = 12$ см, $R_3 = 16$ см. На ободьях колес расположены точки A, B и C .

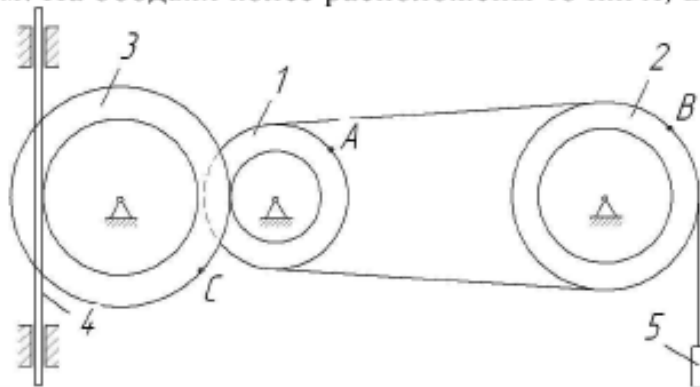


Рис. 3. Схема механизма

Известен закон изменения скорости рейки 4 $v_4 = 28 - 8t$. Определить в момент времени $t_1 = 2$ с скорости тел 4 и 5, точек А, В, С, а также угловые скорости всех колес. Определить ускорения ε_2, a_A, a_5 .

Решение

- 1) Определим скорость ускорение рейки 4 в момент времени $t_1 = 2$ с
 $v_4 = 28 - 8t = 28 - 8 \cdot 2 = 12 \text{ см/с}$ – скорость рейки направлена вниз (в направлении положительного отсчета).
 $a_4 = \dot{v}_4 = -8 \text{ см/с}^2$
 Знак «-» означает, что ускорение рейки 4 направлено вверх (в сторону отрицательного отсчета).

Рассмотрим расчетную схему (см. рис. 3, 4).

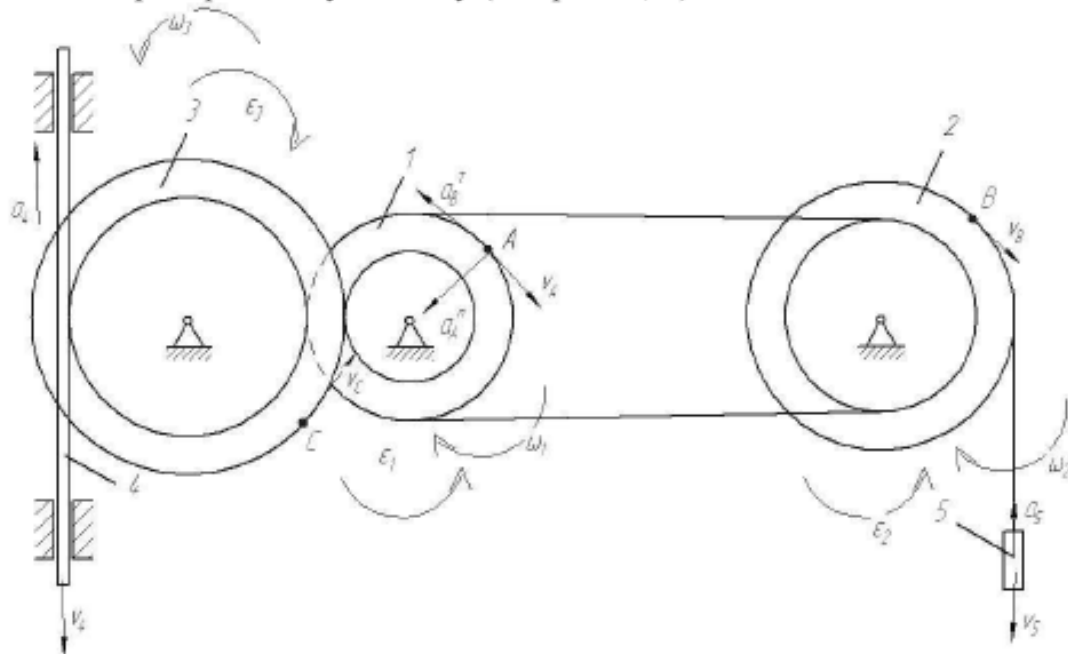


Рис. 4. Расчетная схема механизма с указанием кинематических параметров

Определим кинематические соотношения.

$$\omega_3 = \frac{v_4}{r_3} - \text{угловая скорость колеса 3}$$

$$v_C = \omega_3 \cdot R_3 = \frac{v_4 \cdot R_3}{r_3} = \frac{12 \cdot 16}{12} = 16 \text{ см/с} - \text{ скорость точки C.}$$

$$\omega_1 = \frac{v_C}{r_1} = \frac{v_4 \cdot R_3}{r_3 r_1} - \text{угловая скорость колеса 1}$$

$$v_A = \omega_1 \cdot R_1 = \frac{v_4 \cdot R_2 \cdot R_1}{r_3 r_1} = \frac{12 \cdot 16 \cdot 4}{12 \cdot 2} = 32 \text{ см/с} \quad - \text{ скорость точки } A.$$

$$\omega_2 = v_A / r_2 = \frac{v_4 \cdot R_2 \cdot R_1}{r_3 r_1 r_2} \quad - \text{ угловая скорость колеса 2.}$$

$$v_B = \omega_2 \cdot R_2 = \frac{v_4 \cdot R_2 \cdot R_1 \cdot R_2}{r_3 r_1 r_2} = \frac{12 \cdot 16 \cdot 4 \cdot 8}{12 \cdot 2 \cdot 8} = 42.7 \text{ см/с} \quad - \text{ скорость точки } B.$$

$$v_5 = v_D = \frac{v_4 \cdot R_2 \cdot R_1 \cdot R_2}{r_3 r_1 r_2} \quad - \text{ скорость тела 5.}$$

Подставив в данные формулы числовые данные, получим значения скоростей точек и тел.

2) Определим ускорения

$$\varepsilon_2 = \dot{\omega}_2 = \frac{a_4 \cdot R_2 \cdot R_1}{r_3 r_1 r_2} = \frac{8 \cdot 16 \cdot 4}{12 \cdot 2 \cdot 8} = 3.56 \text{ с}^{-2} \quad - \text{ угловое ускорение колеса}$$

2.

$$a_5 = v_5 = \frac{a_4 \cdot R_2 \cdot R_1 \cdot R_2}{r_3 r_1 r_2} = \frac{8 \cdot 16 \cdot 4 \cdot 8}{12 \cdot 2 \cdot 8} = 28.4 \text{ см/с}^2 \quad - \text{ ускорение тела 5.}$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^r + \vec{a}_A^n \quad - \text{ ускорение точки } A$$

$$a_A^r = v_A = \frac{a_4 \cdot R_2 \cdot R_1}{r_3 r_1} = \frac{8 \cdot 16 \cdot 4}{12 \cdot 2} = 21.3 \text{ см/с}^2 \quad - \text{ касательное ускорение}$$

точки A

$$a_A^n = \frac{v_A^2}{R_1} = \frac{32^2}{4} = 256 \text{ см/с}^2 \quad - \text{ нормальное ускорение точки } A$$

$$a_A = \sqrt{(a_A^r)^2 + (a_A^n)^2} = \sqrt{21.3^2 + 256^2} = 257 \text{ см/с}^2$$

$$\text{Ответ: } \quad v_B = 42.7 \text{ см/с} \quad v_C = 16 \text{ см/с} \\ \varepsilon_2 = 3.56 \text{ с}^{-2} \quad a_5 = 28.4 \text{ см/с}^2 \quad a_A = 257 \text{ см/с}^2$$

**3. Задача 2. Применение теоремы
об изменении кинетической энергии системы**

Механическая система состоит из груза 1 (коэффициент трения груза о плоскость $f = 0,1$), цилиндрического сплошного однородного катка 2 и ступенчатых шкивов 3 и 4 с радиусами ступеней $R_3 = 0,4$ м, $r_3 = 0,2$ м, $R_4 = 0,3$ м, $r_4 = 0,2$ м (массу каждого шкива считать равномерно распределенной по его внешнему ободу) (рис. 5, табл. 2). Тела системы соединены друг с другом невесомыми нитями, намотанными на шкивы; участки нитей параллельны соответствующим плоскостям.

Таблица 2

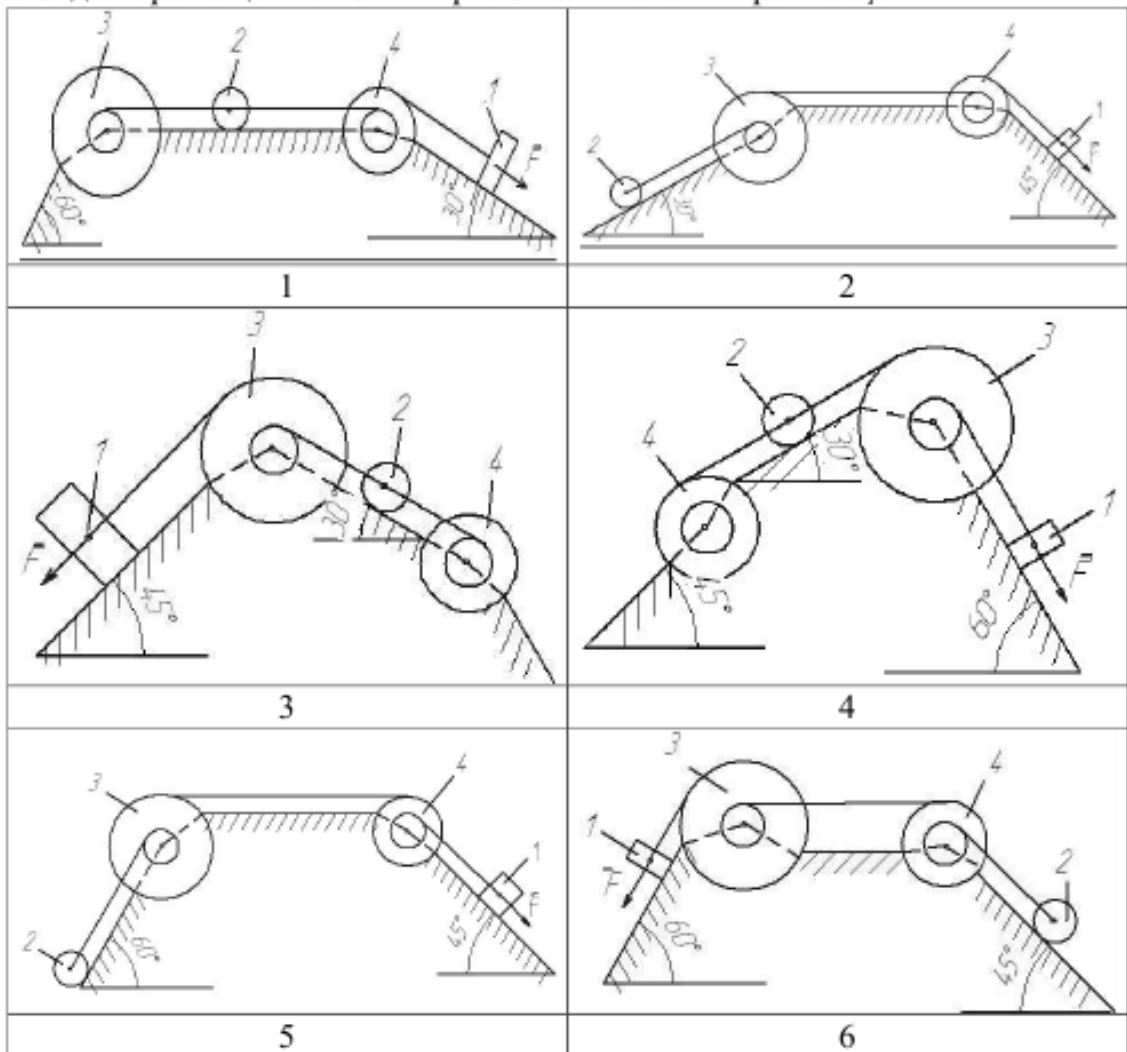
Исходные данные для расчёта

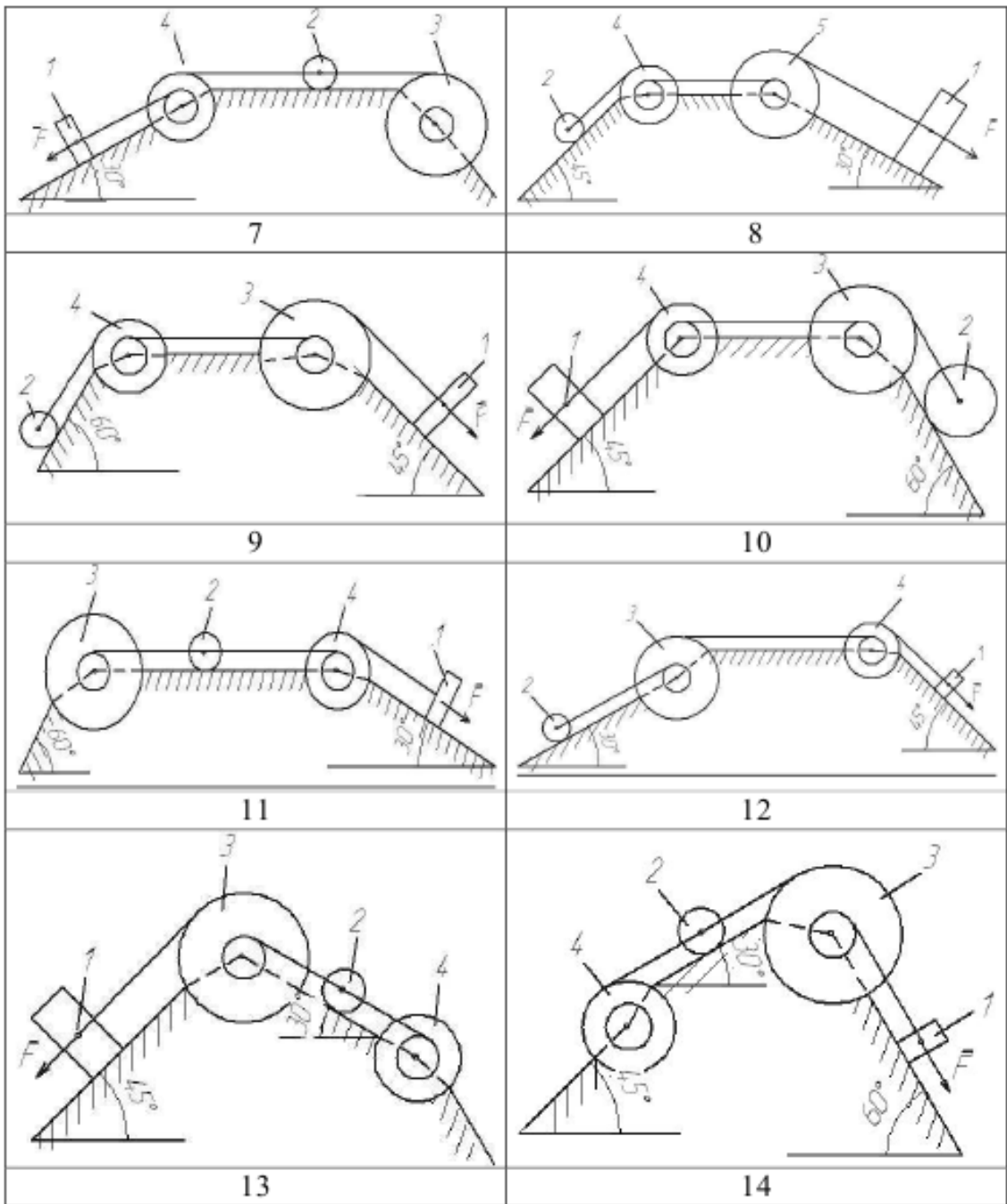
| Номер условия | m_1 кг | m_2 кг | m_3 кг | m_4 кг | M_3 Н·м | M_4 Н·м | F Н | S_1 м |
|---------------|-------------|-------------|-------------|-------------|--------------|--------------|----------|------------|
| 1 | 6 | 2 | 2 | 1 | 6 | 0 | 200 | 1,2 |
| 2 | 3 | 4 | 6 | 8 | 0 | 4 | 220 | 0,8 |
| 3 | 2 | 2 | 4 | 1 | 3 | 0 | 240 | 0,6 |
| 4 | 8 | 1 | 2 | 6 | 0 | 6 | 260 | 1,4 |
| 5 | 8 | 2 | 4 | 5 | 9 | 0 | 280 | 1,6 |
| 6 | 3 | 6 | 2 | 8 | 0 | 8 | 300 | 1,0 |
| 7 | 5 | 4 | 6 | 3 | 6 | 0 | 320 | 0,8 |
| 8 | 6 | 2 | 4 | 1 | 3 | 0 | 340 | 1,6 |
| 9 | 8 | 4 | 6 | 10 | 0 | 4 | 360 | 1,4 |
| 10 | 2 | 1 | 4 | 6 | 0 | 8 | 380 | 1,0 |
| 11 | 5 | 3 | 2 | 1 | 0 | 5 | 390 | 1,0 |
| 12 | 6 | 5 | 4 | 7 | 5 | 0 | 400 | 0,9 |
| 13 | 3 | 6 | 4 | 2 | 0 | 4 | 410 | 0,7 |
| 14 | 6 | 2 | 1 | 4 | 4 | 0 | 420 | 1,0 |
| 15 | 6 | 2 | 3 | 4 | 0 | 8 | 430 | 0,6 |
| 16 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 0 | 440 | 0,9 |
| 17 | 7 | 3 | 6 | 4 | 0 | 7 | 450 | 0,7 |
| 18 | 5 | 2 | 4 | 3 | 0 | 6 | 460 | 1,1 |

| | | | | | | | | |
|----|---|---|---|---|---|---|-----|-----|
| 19 | 8 | 5 | 6 | 7 | 6 | 0 | 470 | 1,1 |
| 20 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 0 | 480 | 1,0 |

Под действием силы F и сил тяжести система приходит в движение из состояния покоя. При движении системы на шкивы 3 и 4 действуют постоянные моменты сил сопротивлений, равные соответственно M_3 и M_4 .

Определить значение скорости груза 1 в тот момент времени, когда перемещение точки приложения силы F равно s_1 .





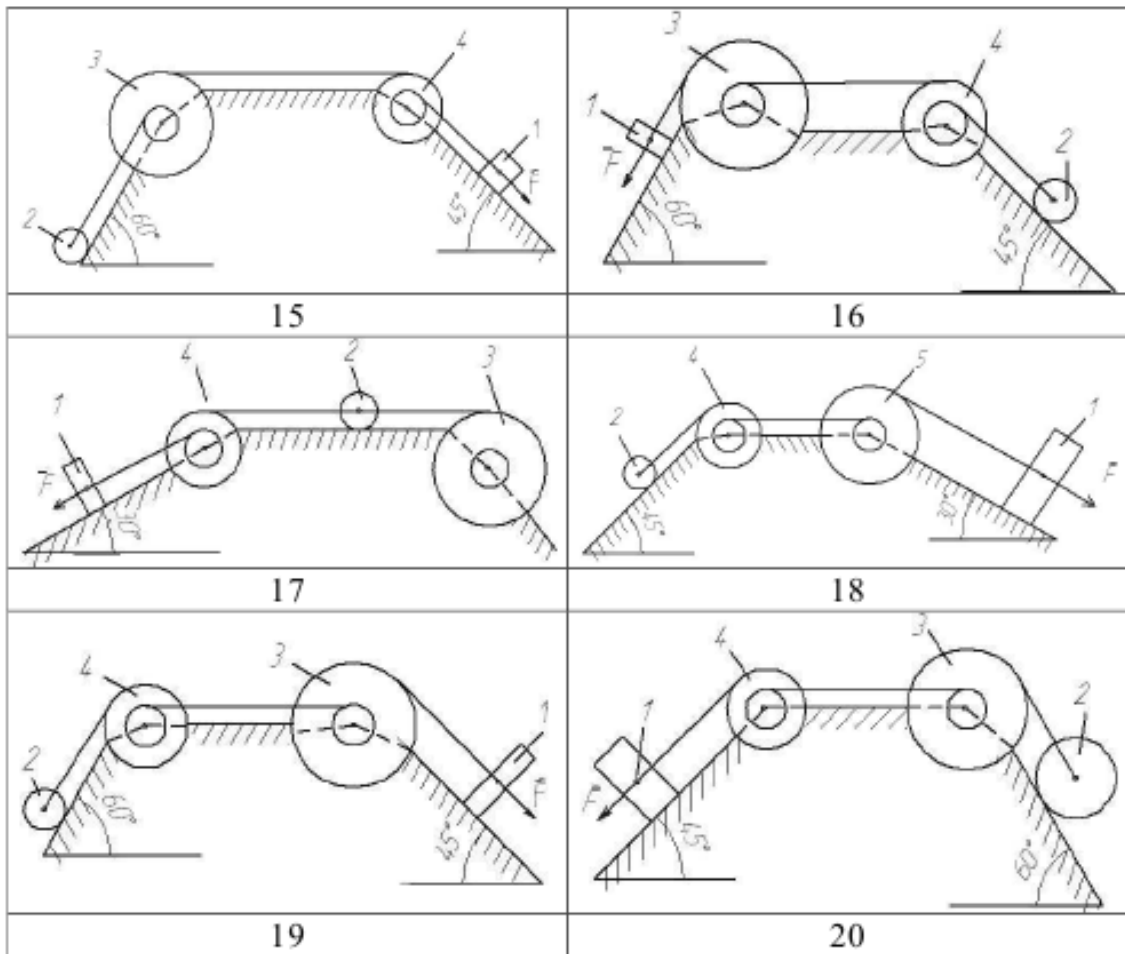


Рис. 5. Варианты расчётных схем механизмов

Пример решения задачи .

Механическая система состоит из грузов 1 и 2 (коэффициент трения грузов о плоскость $f = 0,1$), цилиндрического сплошного однородного катка 3 и ступенчатых шкивов 4 и 5 с радиусами ступеней $R_4 = 0,3$ м, $r_4 = 0,1$ м, $R_5 = 0,2$ м, $r_5 = 0,1$ м (массу каждого шкива считать равномерно распределенной по его внешнему ободу) Тела системы соединены друг с другом нитями, намотанными на шкивы; участки нитей параллельны соответствующим плоскостям (см. рис. 6 и табл. 3).

Под действием силы F и сил тяжести система приходит в движение из состояния покоя. При движении системы на шкивы 4 и 5 действуют постоянные моменты сил сопротивлений, равные соответ-

ственно M_4 и M_5 . Определить скорости груза 1 в тот момент времени, когда перемещение точки приложения силы F равно s_1 .

Таблица 3 – Данные для расчета

| m_1 кг | m_2 кг | m_3 кг | m_4 кг | m_5 кг | M_4 Н·м | M_5 Н·м | F , Н | S_1 м |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|--------------|--------------|------------|------------|
| 6 | 0 | 4 | 0 | 8 | 0,3 | 0 | 240 | 1,6 |

Решение

1) Используем теорему об изменении кинетической энергии механической системы:

$$T - T_0 = \sum A_t$$

В начальный момент времени система покоится: $T_0 = 0$

Тогда получим:

$$T = \sum A_t$$

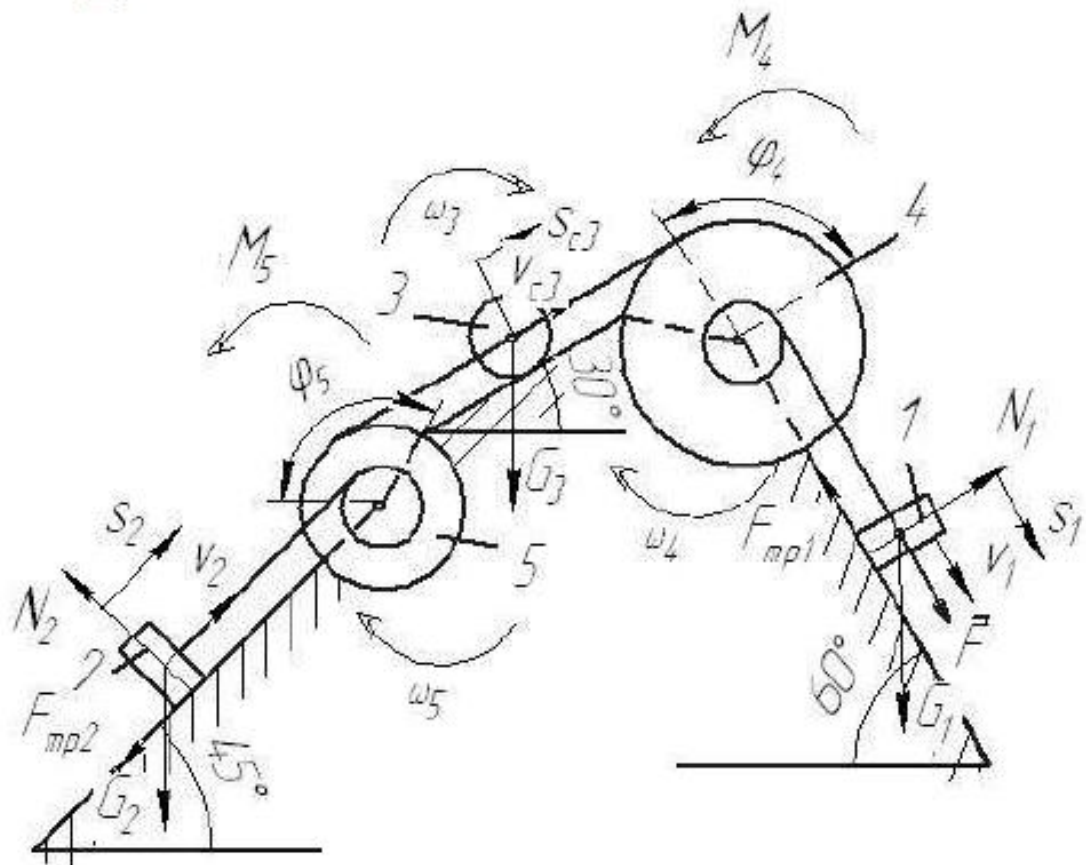


Рис. 6. Расчетная схема

2) Определим кинетическую энергию системы в конечный момент времени, когда пройденный телом 1 путь составит s_1 .

$$T = T_1 + T_3 + T_5$$

Найдем кинетические энергии тел, имеющих ненулевую массу.

$$T_1 = m_1 v_1^2 / 2 - \text{поступательное движение}$$

$$T_5 = J_5 \omega_5^2 / 2 - \text{вращательное движение}$$

где $J_5 = m_5 R_5^2$ – момент инерции колеса 5.

$$T_3 = m_3 v_{c3}^2 / 2 + J_3 \omega_3^2 / 2 - \text{плоское движение}$$

где $J_3 = m_3 R_3^2 / 2$ – момент инерции колеса 3.

Выразим все скорости через скорость 1 тела v_1 .

$$\omega_4 = \frac{v_1}{r_4}$$

$$v_{c3} = \omega_4 R_4 = 3v_1 \quad \omega_3 = \frac{v_{c3}}{R_3} = \frac{3v_1}{R_3}$$

$$\omega_5 = \frac{v_{c3}}{R_5} = \frac{3v_1}{R_5} \quad v_2 = \omega_5 r_5 = 1,5v_1$$

Тогда получим выражение для кинетической энергии системы в конечный момент:

$$T = m_1 v_1^2 / 2 + 9m_3 v_1^2 / 2 + 9m_3 v_1^2 / 4 + 9m_5 v_1^2 / 2$$

$$T = v_1^2 \left(m_1 / 2 + 9m_3 / 2 + 9m_3 / 4 + 9m_5 / 2 \right)$$

Получим:

$$T = v_1^2 \left(6/2 + 9 \cdot 4/2 + 9 \cdot 4/4 + 9 \cdot 8/2 \right) = 66v_1^2$$

3) Найдём сумму работ внешних сил за время движения системы.

$$A_F = F \cdot s_1 = 240 \cdot 1,6 = 384 \text{ Дж} - \text{работа силы } F.$$

$A_{G_1} = G_1 s_1 \cos 30^\circ = 6 \cdot 9.8 \cdot 1.6 \cdot \cos 30^\circ = 81.5 \text{ Дж}$ - работа силы тяжести G_1 .

$A_{F_{тр1}} = -F_{тр1} s_1$ - работа силы трения $F_{тр1}$.

$$F_{тр1} = fN = fG_1 \sin 30^\circ$$

$$A_{F_{тр1}} = -fG_1 s_1 \sin 30^\circ = -0.1 \cdot 6 \cdot 9.8 \cdot 1.6 \cdot \sin 30^\circ = -4.7 \text{ Дж}$$

$A_{M_4} = -M_4 \varphi_4$ - работа момента сопротивления M_4 .

$$\varphi_4 = s_1 / r_4$$

$$A_{M_4} = -M_4 s_1 / r_4 = -\frac{0.3 \cdot 1.6}{0.1} = -4.8 \text{ Дж}$$

$A_{G_3} = -G_3 s_{c3} \cos 60^\circ$ - работа силы тяжести G_3 .

$$s_{c3} = 3 \cdot s_1$$

$$A_{G_3} = -3G_3 s_1 \cos 60^\circ = -3 \cdot 4 \cdot 9.8 \cdot 1.6 \cdot \cos 60^\circ = -94.1 \text{ Дж}$$

Работа остальных сил и моментов равна нулю.

Тогда:

$$\sum A_i = 384 + 81.5 - 4.7 - 4.8 - 94.1 = 362 \text{ Дж}$$

4) Получим:

$$66v_1^2 = 362$$

откуда:

$$v_1 = \sqrt{362/66} = 2.34 \text{ м/с}$$

Контрольные вопросы

1. Какие виды движения тел Вы знаете?
2. Основные кинематические характеристики точек и тел
3. Связь между линейными и угловыми скоростями при вращательном движении
4. Связь между линейными и угловыми ускорениями при вращательном движении
5. Работа силы. Кинетическая энергия тела.
6. Теорема об изменении кинетической энергии.