

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«КАЛИНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ»

**Д. А. Романюта, А. И. Притыкин**

**СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**

Учебно-методическое пособие по выполнению расчетно-графических работ для студентов, обучающихся в бакалавриате по направлениям подготовки 15.03.01 – Машиностроение и 15.03.02 – Технологические машины и оборудование

Утверждено редакционно-издательским советом ФГБОУ ВО «КГТУ» в качестве учебно-методического пособия по выполнению расчетно-графических работ для студентов бакалавриата по направлениям подготовки 15.03.01 – Машиностроение и 15.03.02 – Технологические машины и оборудование

Калининград  
2022

Рецензент:

кандидат технических наук, доцент кафедры теории механизмов и машин и деталей машин ФГБОУ ВО «Калининградский государственный технический университет» Н. А. Серeda

Романюта, Д.А, Притыкин А.И.

Сопротивление материалов: учеб.-методич. пособие по выполнению расчетно-графических работ для студ. бакалавриата по напр. подгот. 15.03.01 Машиностроение и 15.03.02 – Технологические машины и оборудование / Д.А. Романюта, А.И. Притыкин – Калининград: Изд-во ФГБОУ ВО «КГТУ», 2022. – 47 с.

В учебно-методическом пособии по выполнению расчетно-графических работ дисциплины «Сопротивление материалов» представлены основные теоретические сведения, необходимые для выполнения требуемых работ, а также описание практической части работ с постановкой задач, основными алгоритмами выполнения и вариантами заданий.

Табл. 5, рис. 5, список лит. – 7 наименований

Учебно-методическое пособие рассмотрено и одобрено методической комиссией института морских технологий, энергетики и строительства 30.06.2022г., протокол № 6.

Учебно-методическое пособие рассмотрено и одобрено методической комиссией института агроинженерии и пищевых систем 15.06.2022г., протокол № 7.

УДК 539.3/6

© Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Калининградский государственный технический университет», 2022 г.

© Романюта Д. А., Притыкин А.И., 2022 г.

# СОДЕРЖАНИЕ

Введение .....	4
Н РГР №1 «Построение эпюр внутренних силовых факторов» .....	6
У РГР №2 «Расчет вала на кручение» .....	8
Е РГР №3 «Расчет статически-определимой балки на изгиб» .....	10
Р РГР №4 «Расчет многопролетной неразрезной балки методом трех моментов».....	11
И РГР №5 «Расчет статически-неопределимой плоской рамы».....	13
К	
Н РГР №1. Построение эпюр внутренних силовых факторов .....	15
У РГР №2. Расчет вала на кручение .....	15
Е РГР №3. Расчет статически-определимой балки на изгиб .....	16
Р РГР №4. Расчет многопролетной неразрезной балки методом трех моментов .....	17
И РГР №5. Расчет статически неопределимой плоской рамы .....	19
К. Критерии и нормы оценивания .....	21
Л Библиографический список .....	23
О Приложение А. Схемы к РГР №1 .....	24
П Приложение Б. Схемы к РГР №2 .....	28
Р Приложение В. Схемы к РГР №3 .....	31
Т Приложение Г. Схемы к РГР №4 .....	36
Ф Приложение Д. Схемы к РГР №5 .....	39
Х Приложение Е. ГОСТ 8239 Двутавры стальные горячекатаные. Сортамент .....	44
Ц Приложение Ж. Элементы изгиба балок, свободно опертых на две опоры .....	45
0	
7 Основные теоретические сведения и методические материалы.....	6
5	
6	
5	
3	
7	
8	
"	
Практические задания на РГР .....	15

## Введение

**Целью** освоения дисциплины «Соппротивление материалов» является формирование у обучающихся знаний в области теоретических представлений о принципах и методах расчета на прочность, жесткость и устойчивость деталей и узлов машиностроительных конструкций и практических навыков расчета и проектирования типовых изделий машиностроения.

Основными **задачами** изучения дисциплины являются:

1. приобретение обучающимися навыков по составлению расчетных схем реальных конструкций;
2. изучение основных закономерностей деформирования твердых тел под действием системы сил;
3. формирование навыков расчета и проектирования конструкций, связанных с выбором геометрических размеров и материала из условия обеспечения прочности, жесткости и устойчивости.

**Целью** расчетно-графических работ (РГР) является закрепление теоретического материала по дисциплине.

Среди основных **задач**, можно выделить следующие:

1. получение опыта по определению и построению эпюр внутренних силовых факторов, возникающих в конструкциях при различных видах нагружения;
2. формирование знаний по обоснованному выбору материала и профилей рассчитываемых конструкций;
3. освоение основных принципов по выполнению расчетов на прочность и жесткость;

В результате выполнения комплекса расчетно-графических работ, обучающийся должен:

**знать:**

- основные закономерности деформирования твердых тел под действием системы сил;
- условия прочности, жесткости и устойчивости типовых конструкций и отдельных их элементов;
- основные механические характеристики машиностроительных материалов;

**уметь:**

- применять теоретические знания для проектирования узлов, деталей механизмов и машин; элементов металлоконструкций.;
- составлять расчетные схемы, определять внутренние усилия и напряжения;
- выбирать различные виды машиностроительных материалов;

- использовать справочную литературу, стандарты и другие нормативные документы;

**владеть:**

- методикой расчета на прочность, жесткость и устойчивость элементов конструкций, а также методикой расчета деформаций и перемещений.

В процессе изучения курса дисциплины «Сопротивления материалов» студенты как очной, так и заочной формы обучения выполняют пять расчетно-графических работ: три в третьем семестре (построение эпюр внутренних силовых факторов, расчет вала на кручение, расчет статически определимых балок на изгиб) и две в четвертом семестре (расчет статически неопределимой балки методом трех моментов на жестких и расчет плоской статически-неопределимой рамы).

Исходные задания определяются в соответствии с шифром, соответствующим порядковому номеру студента в списке группы, составленным в строго алфавитном порядке. Например, для студента с порядковым номером «5», шифром является «05», где «0» - «а», «5» - «б», для студента с номером «15»: «1» - «а», «5» - «б». Работы, выполненные не по шифру, не принимаются.

РГР может быть выполнена как в печатном, так и в рукописном виде с вычерчиванием расчетных схем в масштабе и указанием на них всех числовых исходных данных. Решение задач должно сопровождаться краткими пояснениями и четкими схемами. Необходимые для выполнения заданий теоретические сведения следует черпать из источников, приведенных в списке литературы, или других источников достоверной информации.

Необходимые общие справочные данные:

1. Модуль упругости стали:  $2,1 \cdot 10^{11}$  Па;
2. Коэффициент Пуассона стали: 0,3;
3. Модуль сдвига стали:  $0,8 \cdot 10^{11}$  Па;
4. Предел текучести стали:  $235 \cdot 10^6$  Па;
5. Допускаемые нормальные напряжения для стали:  $160 \cdot 10^6$  Па;
6. Допускаемые касательные напряжения для стали на изгиб:  $96 \cdot 10^6$  Па.

## 1. Основные теоретические сведения и методические материалы

### *РГР №1 «Построение эюр внутренних силовых факторов»*

По отношению к выбранному материальному телу (элементу конструкции) все действующие силы подразделяются на **внешние** и **внутренние** силы. Под **внешними силами** (нагрузками) понимаются силы взаимодействия данного материального тела со всеми другими окружающими его телами.

Взаимодействие между частями рассматриваемого тела характеризуется **внутренними силами**, которые возникают внутри тела под действием внешних нагрузок и определяются силами межмолекулярного воздействия. Эти силы сопротивляются стремлению внешних сил разрушить элемент конструкции, изменить его форму, отделить одну часть от другой.

В сопротивлении материалов считается, что если нет внешних сил, то отсутствуют и внутренние, то есть, справедлива гипотеза о ненапряженном начальном состоянии тела.

Для выявления внутренних сил и последующего их определения применяют метод сечений (метод «РОЗУ»). «РОЗУ» является аббревиатурой, где каждая буква означает определенную операцию:

Р – разрезаем;

О – отбрасываем;

З – заменяем;

У – уравниваем.

Пусть к элементу сооружения, имеющего форму бруса, приложена система внешних сил, удовлетворяющая условиям равновесия. Под действием этой нагрузки в элементе возникают внутренние силы.

а) в произвольном месте мысленно рассежем брус поперечным сечением А-А на две части (операция «Р» - разрезаем) – рисунок 1.1.

б) отбросим ненужную (наиболее нагруженную) часть бруса, действие этой части заменим внутренними усилиями (операция «О» - отбрасываем) – рисунок 1.2.;

в) внутренние усилия заменим главным вектором силы  $R$  и главным моментом  $M$ , которые, соответственно, разложим по трем взаимно перпендикулярным осям  $x$ ,  $y$ ,  $z$  (операция «З» - заменяем) – рисунок 1.3.

Таким образом, получаем шесть внутренних усилий –  $N$ ,  $Q_x$ ,  $Q_y$ ,  $M_x$ ,  $M_y$  и  $M_z$ .

г) полученные внутренние усилия определим из уравнения равновесия оставшейся части элемента (операция «У» - уравниваем) по формулам (1.1)-(1.6).

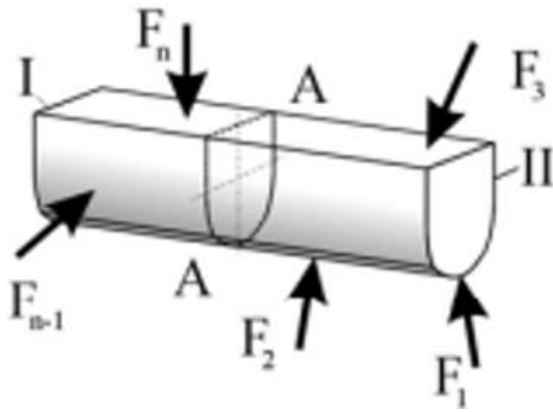


Рисунок 1.1. Мысленное рассечение бруса поперечным сечением А-А

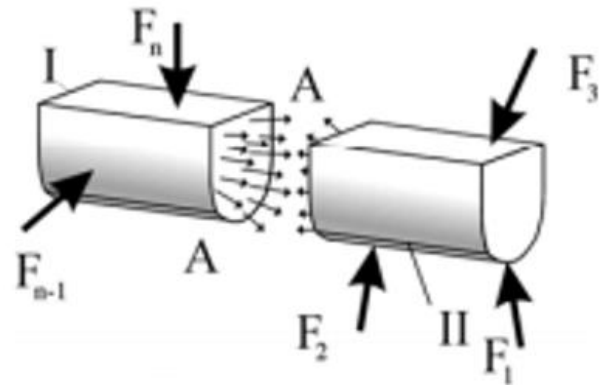


Рисунок 1.2. Отбрасывание ненужной части элемента

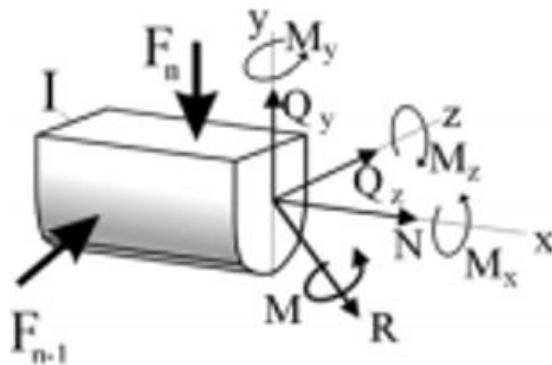


Рисунок 1.3. Замена и уравнивание отброшенной части бруса

$$\sum F_x = 0; \quad (1.1)$$

$$\sum F_y = 0; \quad (1.2)$$

$$\sum F_z = 0; \quad (1.3)$$

$$\sum M_x = 0; \quad (1.4)$$

$$\sum M_y = 0; \quad (1.5)$$

$$\sum M_z = 0. \quad (1.6)$$

$N$  – **осевое (продольное) усилие**. Осевое усилие равно сумме проекций на ось  $x$  всех внешних сил, действующих с одной стороны сечения, и определяется по формуле (1.7). Осевое усилие вызывает **растяжение/сжатие** элемента.

$$\sum F_x = N. \quad (1.7)$$

$Q_y, Q_z$  – **поперечные силы**. Поперечные силы равны сумме проекций всех внешних сил на оси  $y$  и  $z$ , и определяются по формулам (1.8) и (1.9) соответственно. Поперечные силы вызывают **сдвиг** в сечении элемента.

$$\sum F_y = Q_y; \quad (1.8)$$

$$\sum F_z = Q_z. \quad (1.9)$$

$M_x$  – **крутящий момент**. Крутящий момент равен сумме моментов внешних сил относительно оси  $x$ , и определяется по формуле (1.10). Крутящий момент вызывает **кручение** элемента.

$$\sum M_x = M_x. \quad (1.10)$$

$M_y, M_z$  – **изгибающие моменты**. Изгибающие моменты равны сумме моментов всех внешних сил относительно осей  $y$  и  $z$ , и определяются по формулам (1.11) и (1.12) соответственно. Изгибающие моменты вызывают **изгиб** элемента.

$$\sum M_y = M_y; \quad (1.11)$$

$$\sum M_z = M_z. \quad (1.12)$$

Таким образом, введя понятие внутренних усилий имеется возможность свести все многообразие внешних нагрузок и конфигураций элементов к 6-ти силовым факторам ( $N, Q_y, Q_z, M_x, M_y, M_z$ ) и представить даже самое сложное внешнее воздействие как сочетание 4-х видов нагружения: **растяжения/сжатия, сдвига, кручения, изгиба**.

*Источники:*

[1, гл.1, 2], [2, введение], [3, гл.1], [4, тема 1 ], [5, тема 1], [6, темы 1-5], [7, тема 1]

### *РГР №2 «Расчет вала на кручение»*

Под **кручением** понимается такой вид деформации, когда в поперечных сечениях бруса действует только крутящий момент  $M_{кр}$ , (другое обозначение  $T$ ), а остальные силовые факторы (нормальная и поперечная силы и изгибающие моменты) отсутствуют.

Стержни круглого или кольцевого сечения, работающие на кручение, называют **валами**.

Для расчета валов на кручение, первым делом необходимо построить эпюру распределения крутящего момента по длине вала

В сечении, в котором к брусу приложен внешний скручивающий момент, ордината эпюры изменяется скачкообразно на величину, равную значению этого момента.

Следует учитывать, что наибольший внешний скручивающий момент, приложенный к брусу, не всегда равен наибольшему крутящему моменту, по которому ведется расчет бруса на прочность и жесткость.

На практике размеры вала определяют из условий прочности и жесткости.



1.1. Условие прочности для круглого поперечного сечения определяется формулой (1.13):

$$\tau_{max} = \frac{|M_{max}|}{W_{\rho}} \leq [\tau], \quad (1.13)$$

где  $\tau_{max}$  – максимальные касательные напряжения возникающие на участке вала;  $M_{max}$  – максимальный крутящий момент на участке вала;  $W_{\rho}$  – полярный момент сопротивления;  $[\tau]$  – допускаемые касательные напряжения.

Для круглого цельного поперечного сечения, с диаметром  $d$ , полярный момент сопротивления определяется по формуле (1.14):

$$W_{\rho} = \frac{\pi d^3}{16}. \quad (1.14)$$

Для кольцевого поперечного сечения, с внешним диаметром  $d$ , полярный момент сопротивления определяется по формуле (1.15):

$$W_{\rho} = \frac{\pi d^3}{16(1 - c^4)}, \quad (1.15)$$

где  $c$  – отношение внутреннего диаметра кольца к внешнему.

1.2. Условие прочности для прямоугольного поперечного сечения определяется формулой (1.16):

$$\tau_{max} = \frac{|M_{max}|}{W_{кр}} \leq [\tau], \quad (1.16)$$

где  $W_{кр}$  – момент сопротивления кручению.

Для прямоугольного поперечного сечения с шириной  $b$  и высотой  $h$ , момент сопротивления кручению определяется по формуле (1.17):

$$W_{кр} = \alpha m b^3, \quad (1.17)$$

где  $m = \frac{h}{b}$ ;  $\alpha$  – эмпирический коэффициент, принимаемый по таблице 1.1.

в зависимости от значения  $m$ :

Таблица 1.1. Значения эмпирических коэффициентов

$m$	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,5	3,0	4,0
$\alpha$	0,208	0,219	0,228	0,234	0,240	0,246	0,258	0,267	0,282
$\beta$	0,140	0,166	0,187	0,204	0,217	0,229	0,249	0,263	0,281

2.1. Условие жесткости для круглого поперечного сечения определяется формулой (1.18):

$$\theta_{max} = \frac{|M_{max}|}{GJ_{\rho}} \leq [\theta], \quad (1.18)$$

где  $\theta_{max}$  – максимальный угол закручивания на участке вала;  $J_{\rho}$  – полярный момент инерции;  $[\theta]$  – допускаемый угол закручивания,  $G$  – модуль сдвига материала вала.

Для круглого цельного поперечного сечения, с диаметром  $d$ , полярный момент инерции определяется по формуле (1.19):

$$J_{\rho} = \frac{\pi d^4}{32}. \quad (1.19)$$

Для кольцевого поперечного сечения, с внешним диаметром  $d$ , полярный момент инерции определяется по формуле (1.20):

$$J_{\rho} = \frac{\pi d^4}{32(1 - c^4)}. \quad (1.20)$$

2.2. Условие жесткости для прямоугольного поперечного сечения определяется формулой (1.21):

$$\theta_{max} = \frac{|M_{max}|}{GJ_{кр}} \leq [\theta], \quad (1.21)$$

где  $J_{кр}$  – момент инерции кручению.

Для прямоугольного поперечного сечения с шириной  $b$  и высотой  $h$ , момент инерции кручению определяется по формуле (1.22):

$$J_{кр} = \beta t b^4, \quad (1.22)$$

где  $\beta$  – эмпирический коэффициент, принимаемый по таблице 1.1. в зависимости от значения  $t$ .

*Источники:*

[1, гл.5], [2, гл. 2], [3, гл.3], [4, тема 6], [5, тема 5], [6, тема 22], [7, тема 3]

### *РГР №3 «Расчет статически-определимой балки на изгиб»*

**Изгибом** называется вид нагружения бруса, при котором к нему прикладывается поперечная нагрузка, лежащая в плоскости проходящей через продольную ось. Брус, работающий при изгибе, называется **балкой**.

**Статически определимыми** конструкциями называют такие конструкции, все реакции которых можно определить исходя из уравнений статики.

При изгибе балок, в поперечных сечениях возникают перерезывающие силы и изгибающие моменты. Поэтому, первым этапом расчета всегда является построение эпюр распределения данных внутренних силовых факторов по длине балки.

Профиль поперечного сечения балок подбирается из условия прочности по формуле (1.23):

$$\sigma_{max} = \frac{|M|}{W} \leq [\sigma], \quad (1.23)$$

где  $\sigma_{max}$  – максимальные нормальные напряжения, возникающие в балке;  $M$  – максимальный изгибающий момент, возникающий в поперечном сечении;  $W$  – осевой момент сопротивления;  $[\sigma]$  – допускаемые нормальные напряжения.

Помимо нормальных напряжений, в случае изгиба в балке возникают и касательные напряжения, определяемые по формуле Журавского [см. формулу (1.24)]:

$$\tau = \frac{QS^*}{Jb}, \quad (1.24)$$

где  $Q$  – поперечная сила;  $S^*$  – статический момент отсеченной части сечения балки;  $J$  – осевой момент инерции;  $b$  – ширина балки в поперечном сечении, для которого определяются касательные напряжения.

Проверка прочности балки в опасном сечении при совместном действии нормальных и касательных напряжений осуществляется по III теории прочности, в соответствии с формулой (1.25):

$$\sigma^{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma], \quad (1.25)$$

где  $\sigma^{III}$  – эквивалентные напряжения.

При расчете балок на изгиб, помимо условия прочности необходимо соблюдение и условия жесткости, в соответствии с формулой (1.26):

$$y_{max} \leq [y], \quad (1.26)$$

где  $y_{max}$  – максимальный прогиб балки;  $[y]$  – допускаемый прогиб балки.

Одним из методов определения перемещений при изгибе балок является метод начальных параметров. Универсальное уравнение метода начальных параметров определяется формулой (1.27):

$$EJz = EJz_0 + EJ\theta_0 x + \sum \frac{M(x - a_m)^2}{2!} + \sum \frac{P(x - a_p)^3}{3!} + \sum \frac{q(x - a_q)^4}{4!}, \quad (1.27)$$

где  $a_m, a_p, a_q$  – абсциссы точек приложения  $M, P$  и начала распределенной нагрузки  $q$ ;  $z_0, \theta_0$  – прогиб и угол поворота, в начале координат – начальные параметры.

#### *Источники:*

[1, гл.6-8], [2, гл. 4, 6], [3, гл.4], [4, тема 7], [5, тема 6], [6, тема 19-21], [7, тема 5]

#### *РГР №4 «Расчет многопролетной неразрезной балки методом трех моментов»*

Если в конструкции все реакции и внутренние усилия нельзя определить из уравнений статики, то такие конструкции называют **статически неопределимыми**.

При решении статически неопределимых конструкций первым делом определяют степень статической неопределимости  $N$  по формуле (1.28):

$$N = R - U, \quad (1.28)$$

где  $R$  – количество возникающих реакций;  $U$  – количество уравнений статики.

Далее, для определения и расчета внутренних возникающих усилий, необходимо раскрыть статическую неопределенность. Традиционно, для такой цели используется классический метод сил, основные положения которого изложены в части указаний для РГР №5.

Для решения многопролетных неразрезных балок используется частный случай метода сил – **метод трех моментов**.

**Многопролетной неразрезной** называется непрерывная статически неопределенная балка, перекрывающая несколько пролетов (не менее 2) и проходящая над всеми промежуточными опорами, с которыми она соединена шарнирно (рисунок 1.4.). Если у балки отсутствует закрепление в виде жесткой заделки, одна из опор считается шарнирно неподвижной, а все другие – шарнирно-подвижными. Если жесткая заделка имеется – все опоры воспринимаются как шарнирно-подвижные.

Для реализации метода трех моментов исходная балка мысленно разрезается на всех промежуточных опорах и в заделке. В этих же сечениях устанавливаются шарниры и вводятся опорные моменты. Таким образом, исходная заданная балка представляется в виде нескольких однопролетных статически определимых балок (рисунок 1.5.)

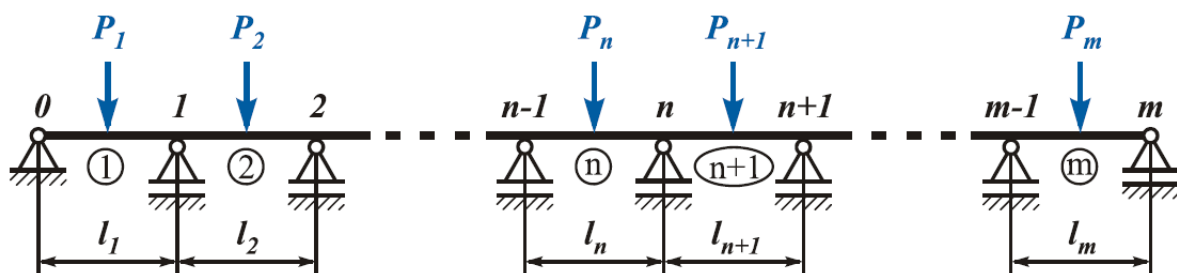


Рисунок 1.4. Пример многопролетной неразрезной балки

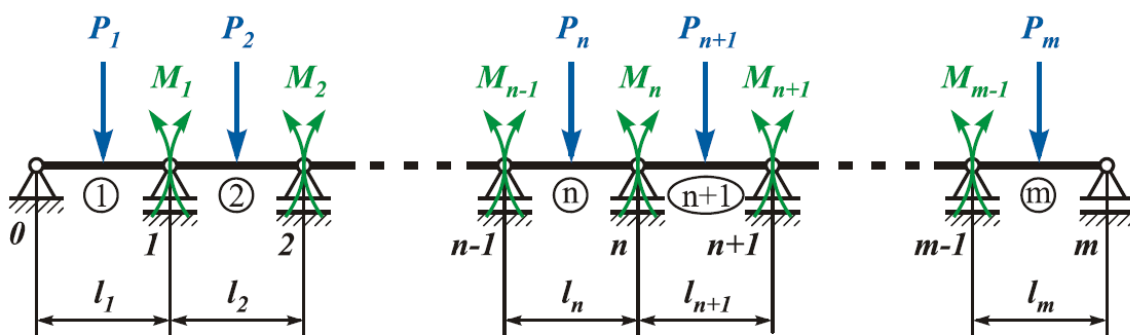


Рисунок 1.5. Преобразованная многопролетная неразрезная балка

Далее, для каждой смежной опоры, на которой установлен шарнир и введены опорные моменты, записывается уравнение совместности угловых деформаций, согласно формуле (1.29):

$$\theta_{n,n} = \theta_{n,n+1}, \quad (1.29)$$

где  $\theta$  – угол поворота соответствующей опоры; 1-й индекс – номер опоры, 2-й индекс – номер пролета.

Угол поворота каждой опоры рекомендуется записывать, руководствуясь принципом суперпозиции: угол поворота опоры от действия всех нагрузок, приложенных в пролете балки равен сумме углов поворота от каждой нагрузки в пролете по отдельности. Формулы углов поворота балок от соответствующей нагрузки можно определять, как с помощью традиционных правил «Сопротивления материалов», так и с помощью справочных материалов.

Таким образом, записывается такое количество уравнений, сколько опорных моментов введено на балке. В каждом уравнении в качестве «неизвестных» фигурируют только опорные моменты (от двух до трех в одном уравнении), значения которых определяются путем решения системы все составленных уравнений.

После определения опорных моментов система становится статически определимой, в результате чего появляется возможность построить эпюры распределения внутренних силовых факторов.

*Источники:*

[1, гл.9], [2, гл.6], [3, гл.4], [5, тема 14], [6, тема 37-38], [7, тема 7]

#### *РГР №5 «Расчет статически-неопределимой плоской рамы»*

**Плоской рамой** называют конструкцию, лежащую в одной плоскости и состоящую из нескольких изгибаемых стержней, соединенных или жестко, или с помощью шарниров.

Плоские рамы, условно, можно разделить на статически определимые и статически неопределимые.

Первым этапом расчета статически неопределимых рам является определение степени статической определимости, аналогично тому, как было указано в РГР №4.

Раскрытие статической неопределимости рамы можно выполнить несколькими способами, среди которых **метод сил** является наиболее применимым.

Он заключается в том, что заданная статически неопределимая система освобождается от дополнительных связей как внешних, так и взаимных, а их действие заменяется силами и моментами. Величина их в дальнейшем подбирается так, чтобы перемещения в системе соответствовали тем ограничениям, которые накладываются на систему отброшенными связями. Таким образом, при

указанном способе решения неизвестными оказываются силы. Отсюда и название «метод сил».

Система канонических уравнений метода сил имеет следующий вид [см. формулы (1.30)-(1.32)]:

$$X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + \dots X_n \delta_{1n} + \Delta_{1p} = 0; \quad (1.30)$$

$$X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + \dots X_n \delta_{2n} + \Delta_{2p} = 0; \quad (1.31)$$

$$X_1 \delta_{n1} + X_2 \delta_{n2} + \dots X_n \delta_{nn} + \Delta_{np} = 0. \quad (1.32)$$

Число уравнений соответствует числу отброшенных связей. Если система один раз статически неопределима, то составляется одно каноническое уравнение, описываемое формулой (1.33):

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1p} = 0, \quad (1.33)$$

где  $X_1$  – силовой фактор,  $\delta_{11}$  и  $\Delta_{1p}$  – перемещения.

Первый индекс при  $\delta$  и  $\Delta$  показывает направление перемещения, второй индекс – силу, вызвавшую это перемещение.

После составления канонических уравнений необходимо построить эпюру изгибающих моментов от единичных сил ( $M_1$ ) и от внешней нагрузки без учета единичных сил ( $M_p$ ).

Определение перемещений  $\delta_{11}$  находится путем перемножения эпюры  $M_1$  саму на себя.

Определение перемещений  $\Delta_{1p}$  находится путем перемножения эпюры моментов от внешних сил  $M_p$  на эпюру моментов от единичной нагрузки  $M_1$ .

Перемножение эпюр можно выполнить с помощью метода Верещагина, но рекомендуется использовать формулы Симпсона, как наиболее понятный и доступный метод.

После определения перемещений определяются неизвестные  $X_1, X_2, X_n$ , представляющие собой соответствующие отброшенные реакции в заданной системе.

После определения неизвестных, система становится статически определимой и появляется возможность построения эпюр внутренних силовых факторов (растягивающих/сжимающих усилий, перерезывающих сил и изгибающих моментов).

*Источники:*

[1, гл.9], [2, гл.6], [3, гл.4], [5, тема 14], [6, тема 37-38], [7, тема 7]

## 2. Практические задания на РГР

### *РГР №1. Построение эпюр внутренних силовых факторов*

**Задача:** построение эпюр внутренних силовых факторов, возникающих в конструкциях при различных видах нагружения.

**Исходные данные:** определяются по схемам Приложения А, в соответствии со своим номером варианта

#### **Порядок выполнения:**

1. Определить реакции в опорах в каждой схеме, используя уравнения статики (за исключением консольных конструкций).
2. Определить число силовых участков в каждой из расчетных схем.
3. Провести в пределах каждого участка сечение, положение которого характеризуется абсциссой сечения  $z$ , отсчитываемой от начала соответствующего участка. Если схема имеет две или более опор, то для упрощения расчета можно осуществлять разбивку на участки, идя с разных сторон.
4. Составить аналитические выражения для  $N$ ,  $T$ ,  $Q$  или  $M$  для каждого из участков, пользуясь методом сечений.
5. Построить эпюры  $N$ ,  $T$ ,  $Q$  или  $M$  для каждой расчетной схемы с указанием значений характерных ординат.
6. Для балки под номером 7 по приведенной эпюре изгибающих моментов определить нагрузку, действующую на балку, и построить эпюру  $Q$ .

### *РГР №2. Расчет вала на кручение*

**Задача:** определение размеров профиля вала на его различных участках исходя из условий прочности и жесткости

**Исходные данные:** определяются по таблице 2.1 и схемам Приложения Б, в соответствии со своим номером варианта

#### **Порядок выполнения:**

1. Построить эпюру крутящих моментов ( $M_{кр}$ ).
2. Из условия прочности и условия жесткости определить размеры всех участков вала.
3. Определить углы закручивания на длине каждого участка. Определить угол закручивания на длине всего вала.
4. Построить эпюру углов закручивания.

Таблица 2.1. Исходные данные к РГР № 2

а, б	№ схемы		M <sub>1</sub> , кНм	M <sub>2</sub> , кНм	M <sub>3</sub> , кНм	L <sub>1</sub> , м	L <sub>2</sub> , м	L <sub>3</sub> , м	$c = \frac{d_B}{d_H}$	$m = \frac{h}{b}$	[θ], рад/м	[τ], МПа
	1-я циф- ра	2-я циф- ра										
1	2	9	1	3	6	3	1	2	0,5	1,0	1,0·10 <sup>-2</sup>	50
2	1	8	2	4	5	2	3	1	0,6	1,5	1,5·10 <sup>-2</sup>	60
3	0	7	3	5	4	1	2	2	0,7	2,0	2,0·10 <sup>-2</sup>	70
4	2	6	4	2	3	1	2	3	0,8	2,5	2,5·10 <sup>-2</sup>	80
5	1	5	5	1	2	2	1	3	0,9	3,0	3,0·10 <sup>-2</sup>	90
6	0	4	1	5	3	3	2	1	0,8	2,5	3,5·10 <sup>-2</sup>	80
7	2	3	2	4	5	3	2	3	0,7	2,0	4,0·10 <sup>-2</sup>	70
8	1	2	3	4	2	1	3	1	0,6	1,5	3,5·10 <sup>-2</sup>	60
9	0	1	4	2	5	2	3	2	0,5	1,0	3,0·10 <sup>-2</sup>	50
0	2	0	5	1	3	3	2	2	0,6	1,5	2,5·10 <sup>-2</sup>	90
	а	б	а	б	а	б	а	б	а	б	а	б

*РГР №3. Расчет статически-определимой балки на изгиб*

**Задача:** определение размеров профиля балок, работающих на изгиб, и их проверка по условию прочности и условию жесткости.

**Исходные данные:** определяются по таблице 2.2 и схемам Приложения В, в соответствии со своим номером варианта

Таблица 2.2. Исходные данные к РГР № 3

а, б	№ схемы		l, м	a <sub>1</sub> /l	a <sub>2</sub> /l	L, м	c <sub>1</sub> /L	c <sub>2</sub> /L	q, кН/м	P, кН	M, кН·м
	1-я циф- ра	2-я циф- ра									
1	2	9	1	0,2	0,6	3	0,4	0,8	10	60	10
2	1	8	2	0,4	0,8	4	0,6	0,2	15	50	15
3	0	7	3	0,6	0,2	5	0,8	0,4	20	40	20
4	2	6	4	0,8	0,4	4	0,2	0,6	25	30	25
5	1	5	5	0,2	0,6	2	0,4	0,6	30	50	30
6	0	4	1	0,4	0,8	3	0,6	0,8	10	40	10
7	2	3	2	0,6	0,2	4	0,6	0,2	15	30	15
8	1	2	3	0,8	0,4	5	0,8	0,4	25	60	20
9	0	1	4	0,6	0,6	2	0,2	0,6	30	20	25
0	2	0	5	0,8	0,8	4	0,4	0,6	10	30	30
	б	а	б	а	б	а	б	а	б	а	а



### Порядок выполнения РГР №3

Для консольных балок (Приложение В, схема1):

1. Построить эпюры  $Q$  и  $M$ , указав характерные значения ординат.
2. Подобрать сечение заданной на рисунке формы.

Для двухопорных балок (Приложение В, схема2):

1. Определить реакции в опорах, используя уравнения статики.
2. Составить выражения для  $Q$  и  $M$  на каждом участке балки
3. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, указав характерные значения ординат.
4. Определить величину момента сопротивления  $W$  балки из условия прочности балки в точке, где действуют максимальные нормальные напряжения.
5. Подобрать по полученной величине  $W$  соответствующий номер двутавровой балки из таблицы сортамента прокатной стали (приложение Е)
6. Проверить прочность полученного профиля по максимальным касательным напряжениям  $\tau_{\max}$ .
7. Для опасного сечения построить эпюры распределения по высоте сечения нормальных и касательных напряжений.
8. Проверить прочность балки в точке на границе между полкой и стенкой по третьей гипотезе прочности.
9. Определить деформации балки методом начальных параметров, для чего:
  - выбрать начало координат на одном из концов балки;
  - записать дифференциальное уравнение изогнутой оси для сечения  $z$  вблизи конца балки, учтя при этом, что распределенную нагрузку надо продолжить до конца, приложив нулевую систему сил, а сосредоточенный момент умножить на плечо в нулевой степени;
  - проинтегрировать дифференциальное уравнение без раскрытия скобок;
  - определить постоянные интегрирования из граничных условий, представляющих собой условия равенства нулю прогибов на опорах;
  - подставить полученные постоянные интегрирования в уравнение изогнутой оси, вычислить прогибы балки в 5-7 сечениях и построить изогнутую ось балки.

*РГР №4. Расчет многопролетной неразрезной балки методом трех моментов*

**Задача:** раскрытие статической неопределимости балки методом трех моментов и построение эпюр внутренних силовых факторов

**Исходные данные:** определяются по таблице 2.3 и схемам Приложения Г, в соответствии со своим номером варианта

Таблица 2.3 - Исходные данные к РГР № 4

a,b	№ схемы		a	P	q	M
	-	-	м	кН	кН/м	кН*м
0	0	0	1,0	10	10	50
1	1	1	1,5	20	15	40
2	2	2	2,0	30	20	30
3	0	3	2,5	40	25	20
4	1	4	1,0	50	30	30
5	2	5	1,5	40	35	40
6	0	6	2,0	30	30	50
7	1	7	2,5	20	25	40
8	2	8	2,0	10	20	30
9	0	9	2,5	20	15	20
	a	б	б	a	б	б

**Порядок выполнения:**

1. Вычислить степень статической неопределимости рассчитываемой балки, определив количество реакций и уравнений статики.
2. Мысленно разрезать балку на всех промежуточных опорах, а также на опорах, имеющих жесткую заделку. В этих местах ввести шарниры и приложить опорные моменты.

*Примечание: при наличии загруженной консоли, нагрузки на нее заменяются главным вектором и моментом, приложенными на ближайшей опоре.*

3. Составить уравнения совместности деформаций смежных пролетов. При составлении выражения для углов поворота от соответствующих нагрузок, пользоваться приложением Ж.

*Примечание: при определении углов поворота концевых сечений однопролетных балок под воздействием внешнего сосредоточенного момента, необходимо обратить внимание на знаки углов. Если сосредоточенный момент приложен от опоры на расстоянии меньшем 0,423 длины пролета, то балка прогибается в одну сторону, углы поворота концевых сечений – разных знаков. Сосредоточенный момент, приложенный в интервале 0,423-0,577 длины пролета вызывает волнообразный изгиб балки; углы поворота концевых сечений в этом случае будут одного знака. Если момент приложен в сечении, проходящем через промежуточную опору, этот момент может быть отнесен к любому смежному пролету.*

4. Определить значения опорных моментов. Произвести проверку правильности решения системы уравнений.
5. Построить эпюры изгибающих моментов и перерезывающих сил для каждого пролета неразрезной балки отдельно, рассматривая каждый пролет как дву-

хопорную, статически определимую балку. При этом к балке (пролету неразрезной балки) должны быть приложены все внешние нагрузки и опорные моменты.

6. Построить итоговые эпюры перерезывающих сил и изгибающих моментов исходной балки, путем «склеивания» эпюр смежных пролетов. При этом, значения моментов на смежных опорах должны быть одинаковыми.
7. Проверить равновесие балки в целом с помощью уравнений статики.

*РГР №5. Расчет статически неопределимой плоской рамы*

**Задача:** раскрытие статической неопределимости рамы методом сил и построение эпюр внутренних силовых факторов.

**Исходные данные:** определяются по таблице 2.4 и схемам Приложения Д, в соответствии со своим номером варианта

Таблица 2.4 - Исходные данные к РГР № 5

а, б	№ схемы		с, м	h, м	q, кН/м	M, кН*м
	1-я цифра	2-я цифра				
1	2	9	1	2	6	30
2	1	8	2	4	8	40
3	0	7	3	6	2	50
4	2	6	4	8	4	40
5	1	5	5	2	6	20
6	0	4	1	4	8	30
7	2	3	2	6	2	40
8	1	2	3	8	4	50
9	0	1	4	6	6	20
0	2	0	5	8	8	40
	б	а	б	а	б	а

**Порядок выполнения:**

1. Определить степень статической неопределимости системы.
2. Выбрать основную систему метода сил путем удаления лишней связи.
3. Перейти к эквивалентной системе, приложив к основной заданную внешнюю нагрузку и неизвестное усилие по направлению отброшенной связи.
4. Записать каноническое уравнение метода сил  $X_1 \delta_{11} + \Delta_{1p} = 0$

5. Для определения перемещений  $\delta_{11}$  и  $\Delta_{1p}$  построить эпюры изгибающих моментов  $M_1$  и  $M_p$  для двух состояний: состояния «1» и состояния «Р».
6. Используя формулы Симпсона или метод Верещагина, перемножить эпюры  $M_1$  и  $M_p$  и определить коэффициенты  $\delta_{11}$  и  $\Delta_{1p}$ .
7. Определив неизвестное усилие  $X_1$ , построить эпюры внутренних силовых факторов - изгибающих моментов, поперечных и продольных сил.

### 3. Критерии и нормы оценивания

Для оценивания расчетно-графических работ, используется система критериев, представленных в таблице 3.1. Каждая расчетно-графическая работа оценивается как «зачет/незачет» по 3 основным критериям:

1. Правильность и полнота решения РГР;
2. Качество оформления РГР;
3. Защита РГР

Для получения зачета по РГР необходимо набрать от 7 до 10 баллов. В случае, если студент набирает 6 баллов и меньше, у него имеется возможность или переоформить РГР и представить ее в более надлежащем виде, или сделать повторную защиту работы.

Защита работы представляет собой выполнение задания, аналогичного выполненной РГР, но в сокращенном объеме. Задача на защиту выдается преподавателем в каждом случае индивидуально. При защите работы студенту разрешается пользоваться своей выполненной РГР.

Таблица 3.1 – Критерии оценивания заданий

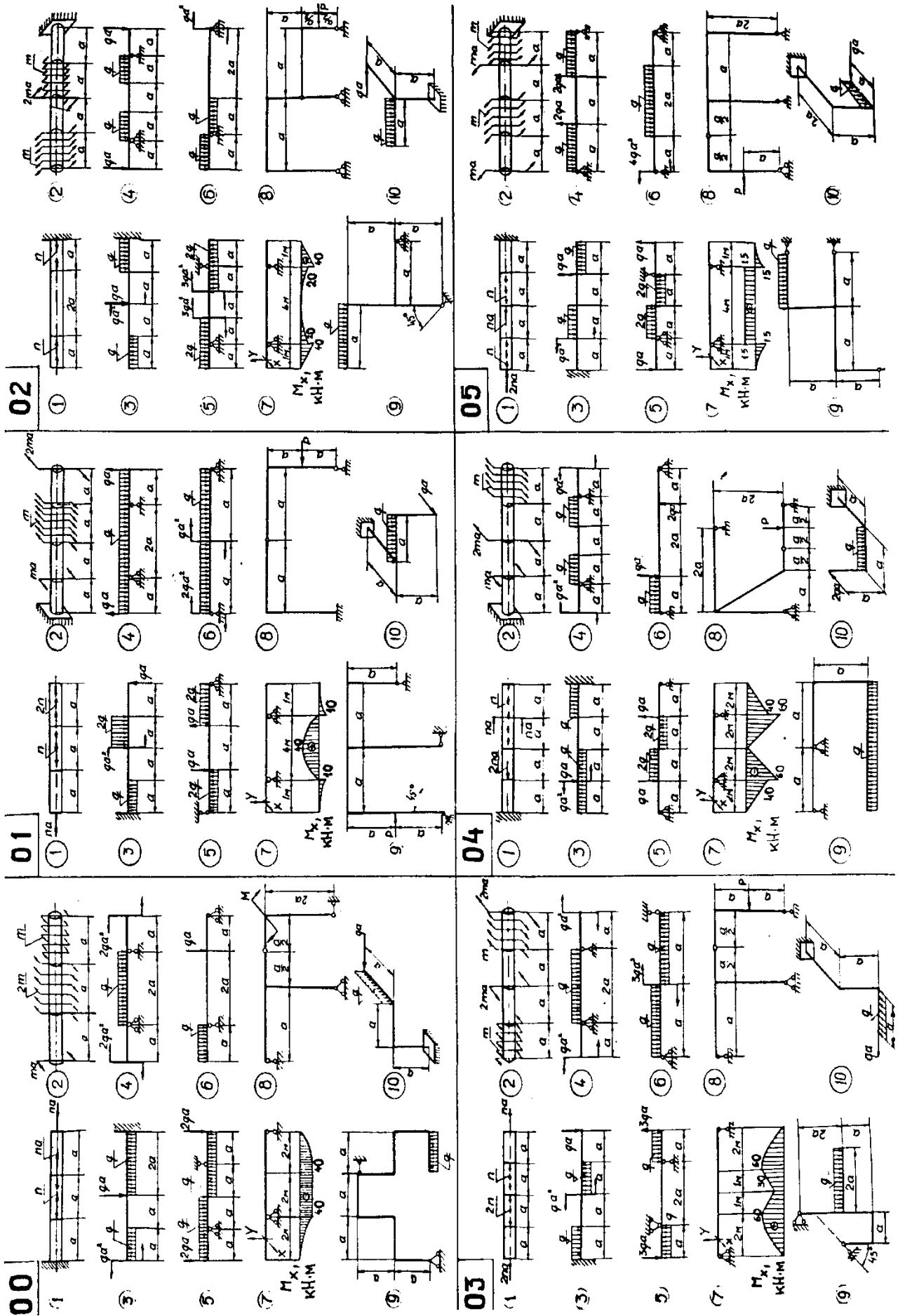
Номер п./п.	Критерии	Балл
1	<i>Правильность и полнота решения задачи РГР</i>	
1.1	Студент дает формулировку задания с исходными данными, изображает схему конструкции, верно определяет реакции связей, грамотно строит эпюры внутренних силовых факторов, правильно выбирает профиль рассчитываемой конструкции, корректно осуществляет проверку балки по условию прочности и выполняет грамотный расчет по условию жесткости.	3
1.2	То же, что и в 1.1. но: - имеется небольшая несогласованность в построении эпюр внутренних силовых факторов; - допущены недочеты в вычислениях; - присутствуют 1-2 грубые ошибки в методологии расчета, которые студент может исправить самостоятельно под руководством преподавателя;	2
1.3	Общие формулы определения опорных реакций записаны верно, но посчитаны с ошибкой, эпюры внутренних силовых факторов построены не согласовано, используемые в расчетах формулы записаны верно, но подставлены неправильные данные, последовательность и логика расчета представлены полноценно, но с 3 и более грубыми ошибками.	1
1.4	У студента отсутствует понимание цели и задач расчетно-графической работы, отсутствует владение терминологией, РГР	0

	выполнена некорректно с большим количеством грубых ошибок, которые обучающийся не можете поправить самостоятельно.	
2	<i>Качество оформления РГР:</i>	
2.1	Работа выполнена аккуратно, эпюры построены ровно, по линейке, имеются численные значения на соответствующих точках эпюры, формулы расписаны подробно и читаемо, представлены необходимые текстовые комментарии, приведен расчет размерностей.	2
2.2	Работа выполнена с некоторым количеством помарок и зачеркиваний, но в целом читаема, эпюры построены от руки, но согласованно и с указанием всех необходимых значений, последовательно расчета прослеживается, расчет размерностей не представлен, но в формулах представлены соответствующие коэффициенты.	1
2.3	Работа трудночитаема, эпюры нарисованы от руки без указаний значений в необходимых точках, присутствует большое количество помарок и зачеркиваний, нарушена последовательность и логика расчета.	0
3	<i>Защита РГР</i>	
3.1	Студент выполнил работу в полном объеме, четко осознает содержание и свободно владеет терминологией дисциплины, последовательно и логично представляет расчет, при ответе могут быть допущены 1-2 неточности;	3
3.2	Студент выполнил работу правильно, без грубых ошибок, имеются 1-2 неточности, которые обучающийся может исправить самостоятельно под руководством преподавателя, имеются некоторые ошибки в арифметических расчётах но логика расчета представлена полноценно.	2
3.3	Защита выполнена правильно, но с грубыми ошибками, которые, однако, студент может исправить самостоятельно, имеются ошибки в использовании терминологии, в некоторых местах нарушена логика расчета и представлены ошибочные формулы.	1
3.4	Защита выполнена неверно, студент не может самостоятельно исправить собственные ошибки, отсутствует понимание терминологии.	0
4	<i>Дополнительный балл:</i>	
4.1	– при ответе на вопросы, студент представляет уместную дополнительную информацию, касающуюся смежных тем	2

### Библиографический список

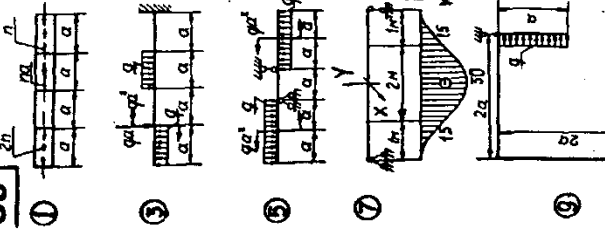
1. Александров, А. В. Сопротивление материалов: учеб. / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин. - 2-е изд., испр. - Москва: Высшая школа, 2001. - 560 с.
2. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов / В.И. Феодосьев. – М.: МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2001.
3. Кривошапко, С. Н. Сопротивление материалов. Теория и практикум: учеб. пособие / С. Н. Кривошапко; рец.: С. И. Трушин, С. П. Иванов; РУДН. - Москва: Юрайт, 2014. - 413 с.
4. Решение задач и лекции по теоретической механике и сопротивлению материалов. – URL: <https://isopromat.ru/> (дата обращения: 04.06.2022). — Текст: электронный.
5. Сопротивление материалов: электронный учебный курс для студентов очной и заочной форм обучения. Составитель к.т.н., доцент кафедры механики и конструирования машин Каримов Ильдар. — Уфа. — URL: <http://www.soprotmat.ru/> (дата обращения: 04.06.2022). — Текст: электронный.
6. Решение задач по ТОЭ, ОТЦ, Высшей математике, Физике, Программированию. – URL: <http://www.toehelp.ru/> (дата обращения: 04.06.2022). — Текст: электронный.
7. Именной сайт бывшего преподавателя «Сопротивления материалов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. – URL: <https://www.tychina.pro/> (дата обращения: 04.06.2022). — Текст: электронный.

# Приложение А. Схемы к РГР №1

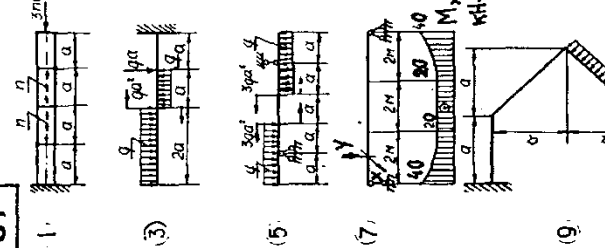




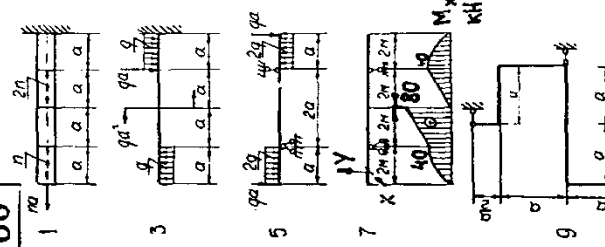
06



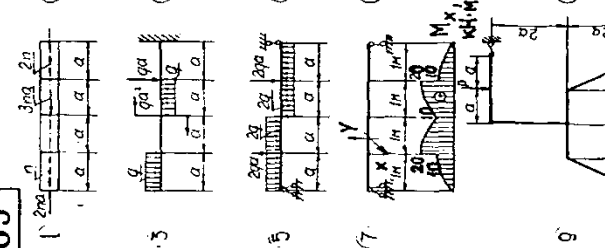
07



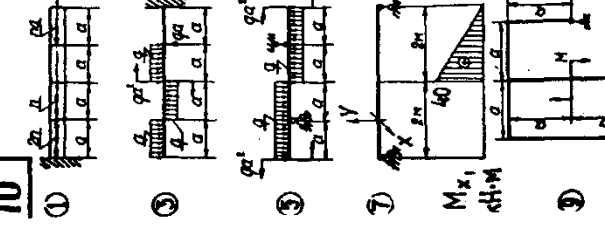
08



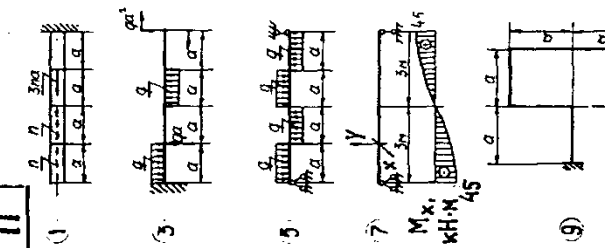
09



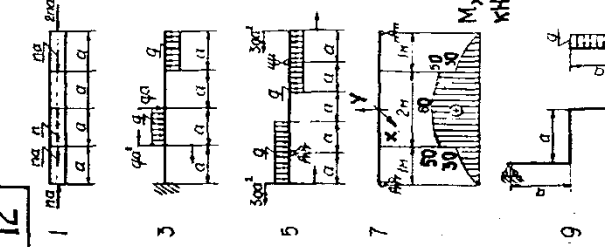
10



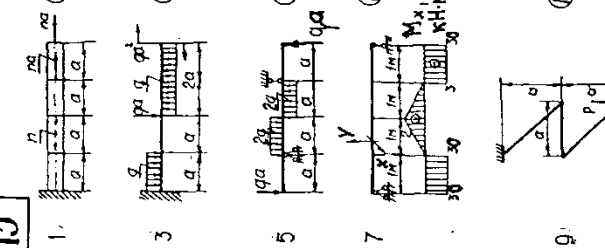
11



12



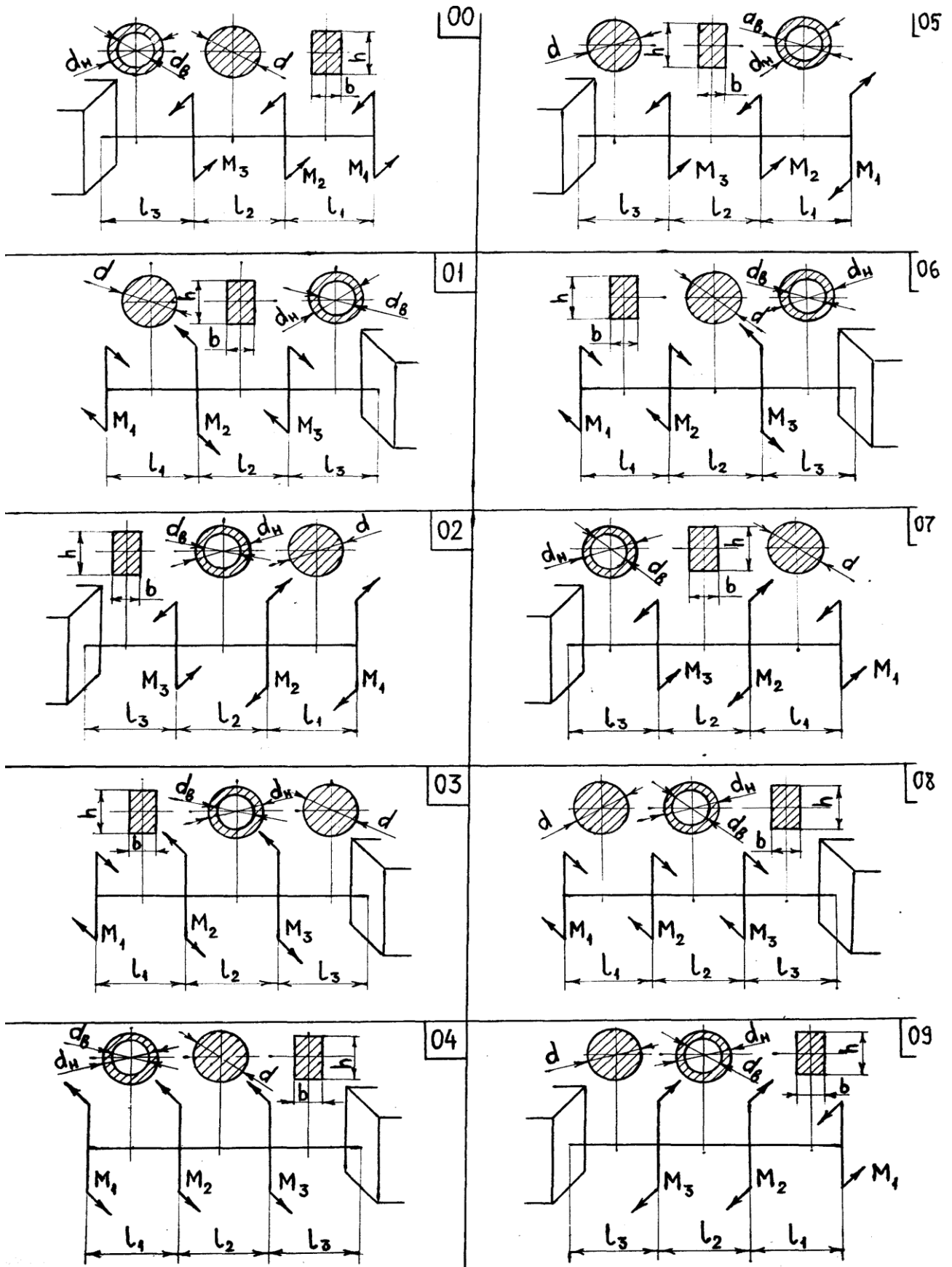
13

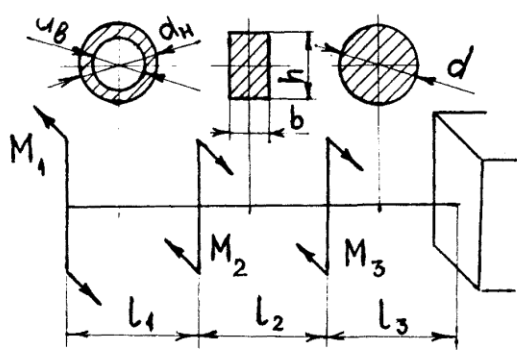




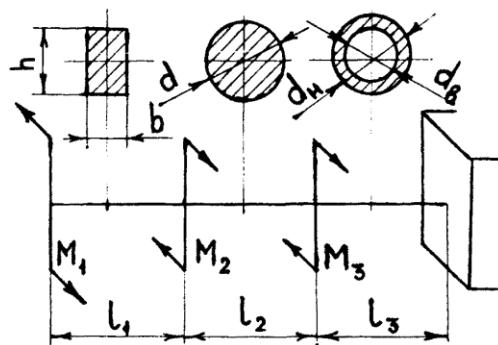


Приложение Б. Схемы к РГР №2

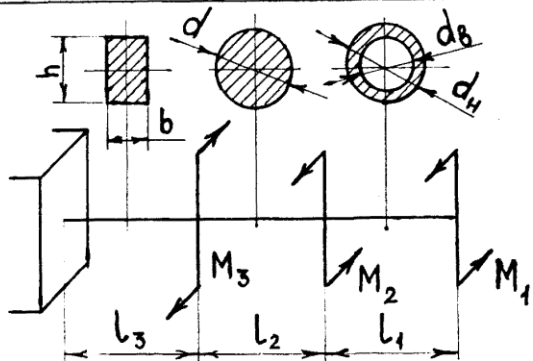




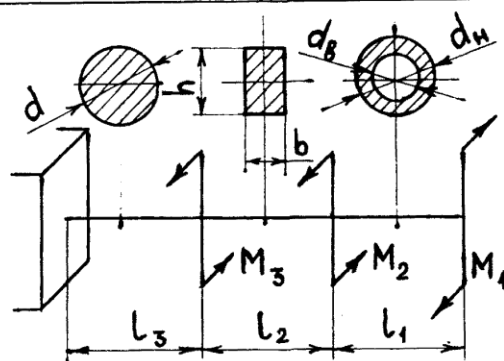
10



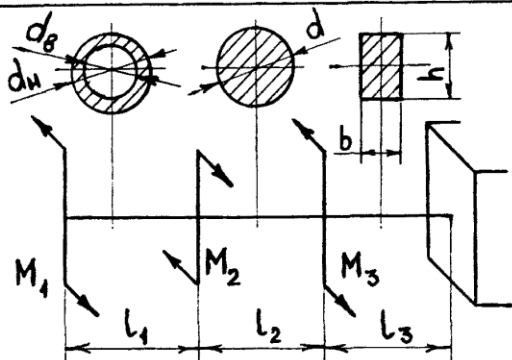
15



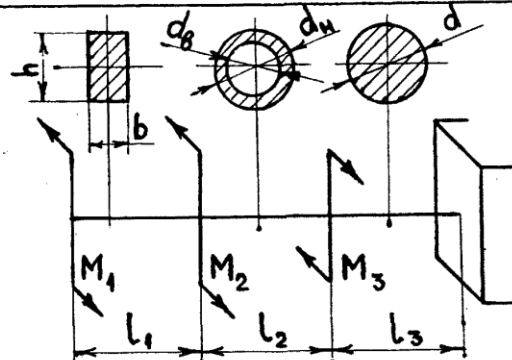
11



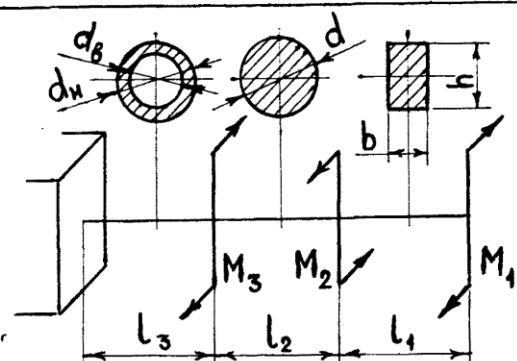
16



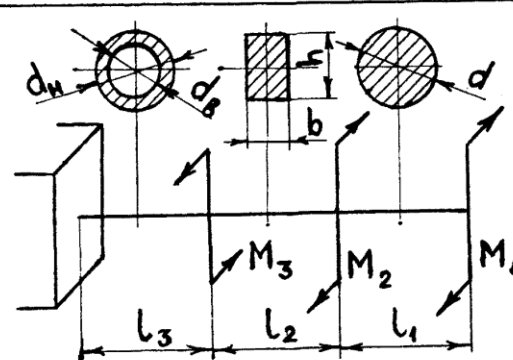
12



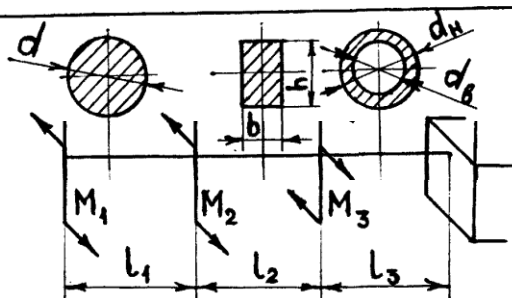
17



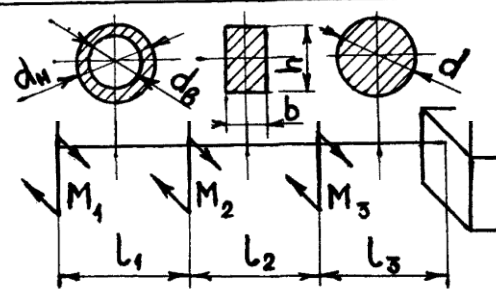
13



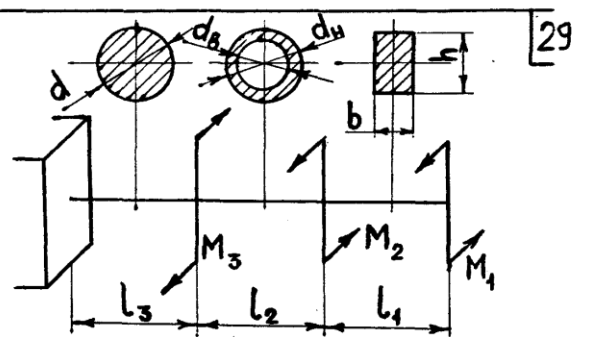
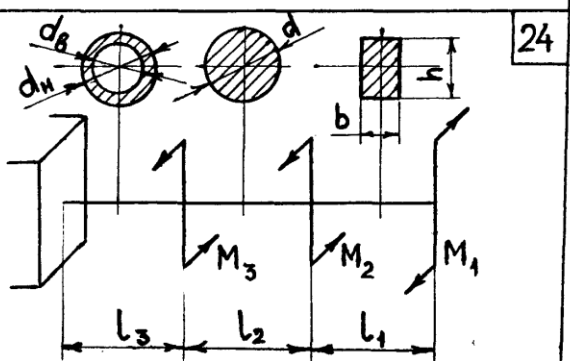
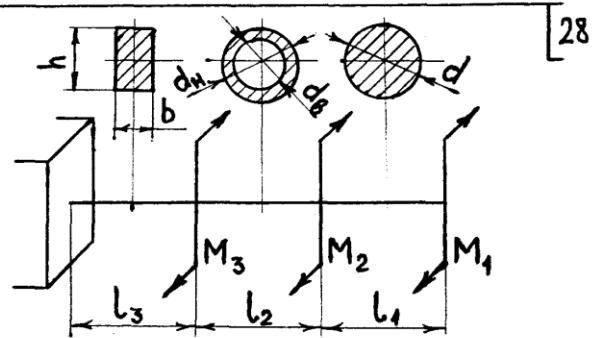
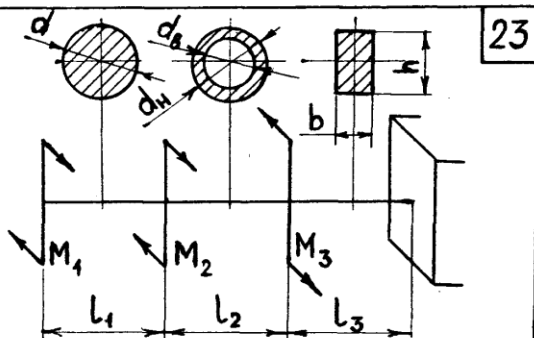
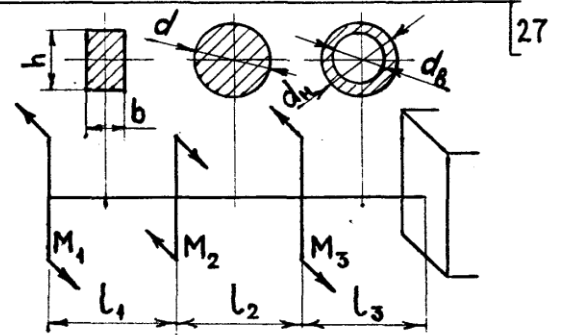
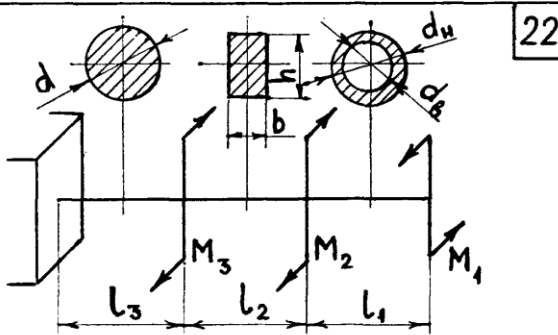
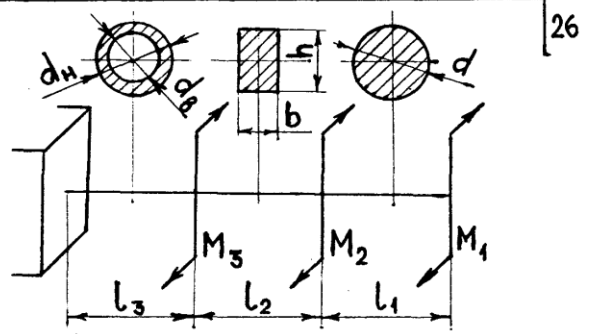
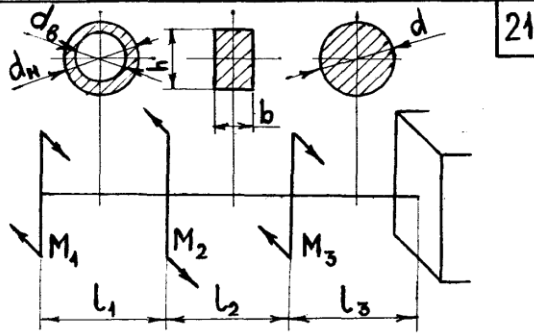
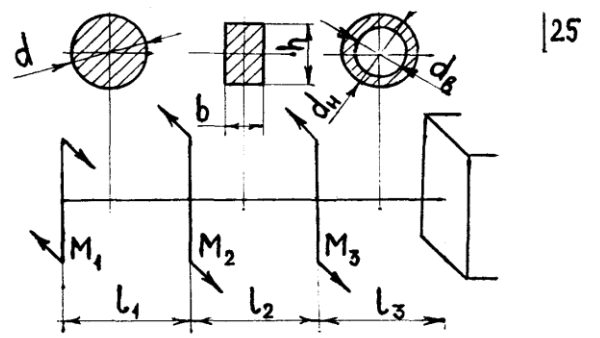
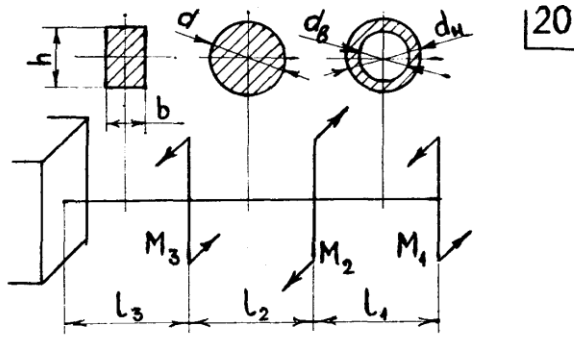
18



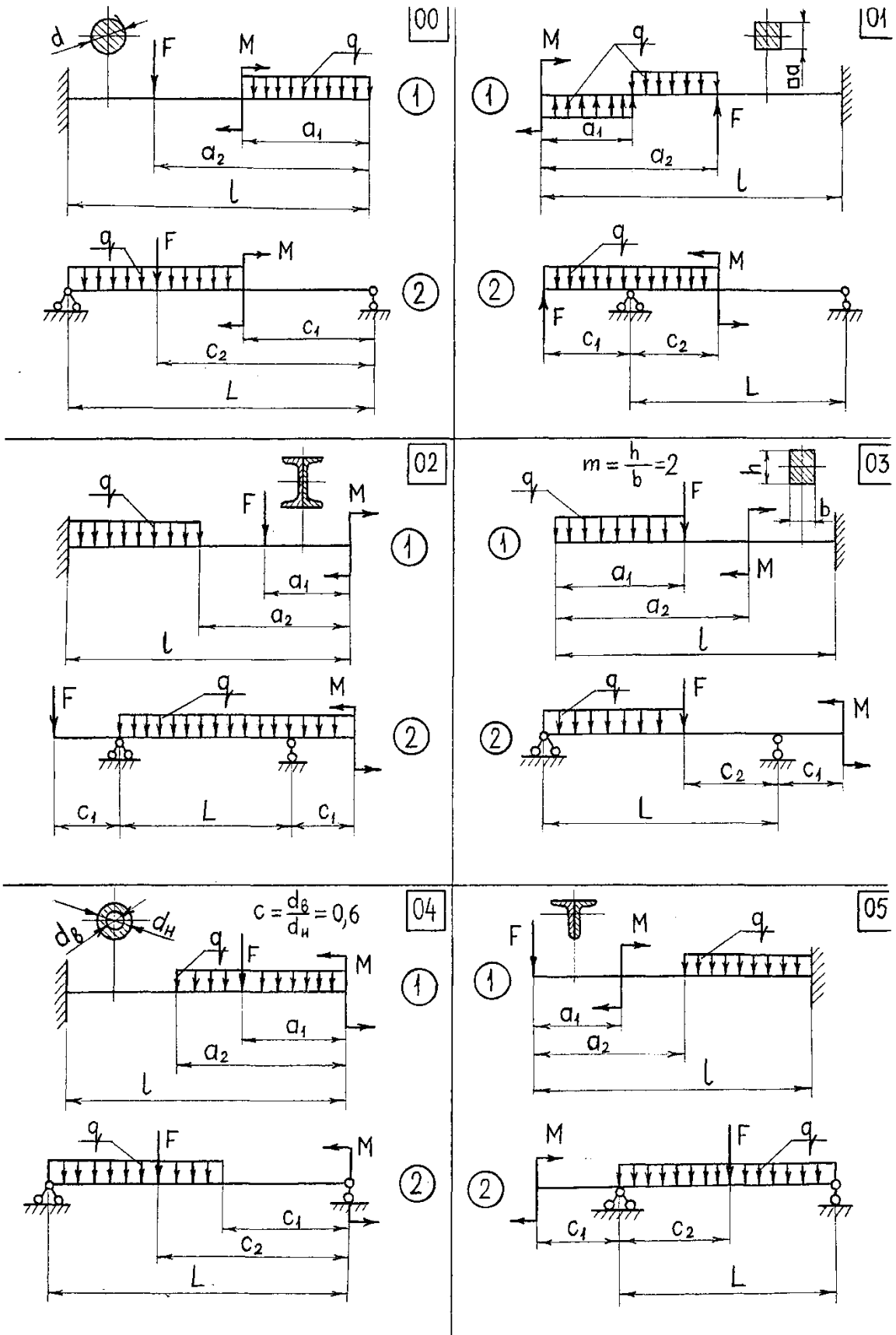
14

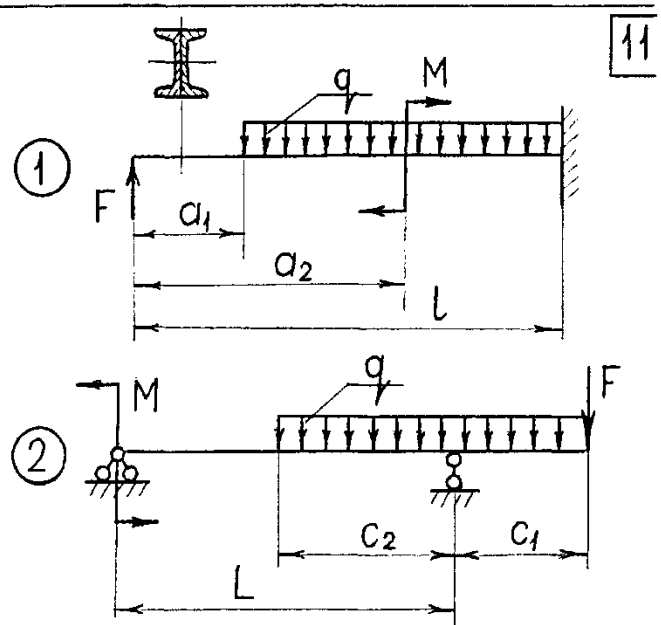
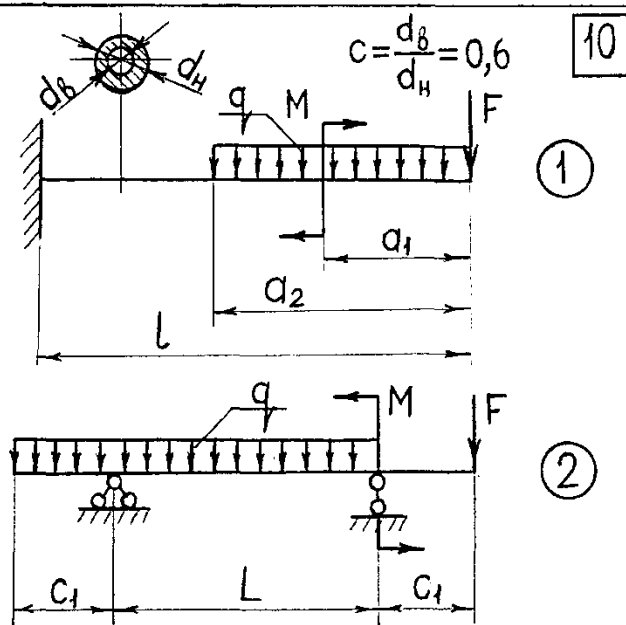
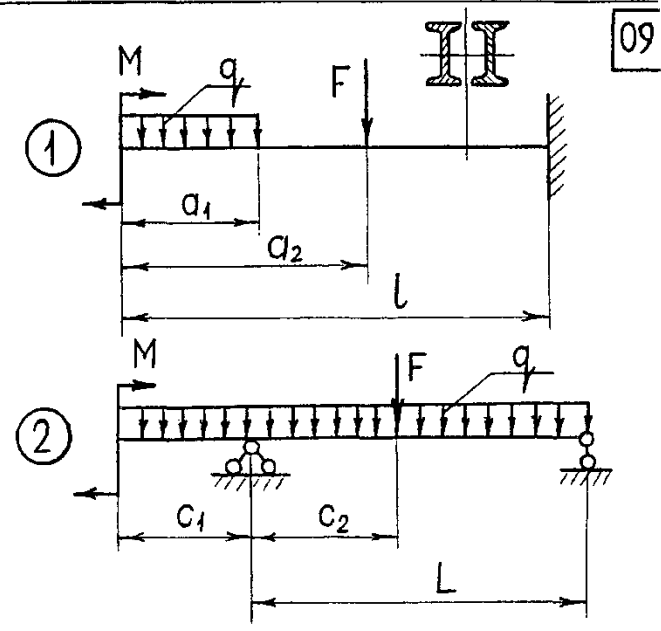
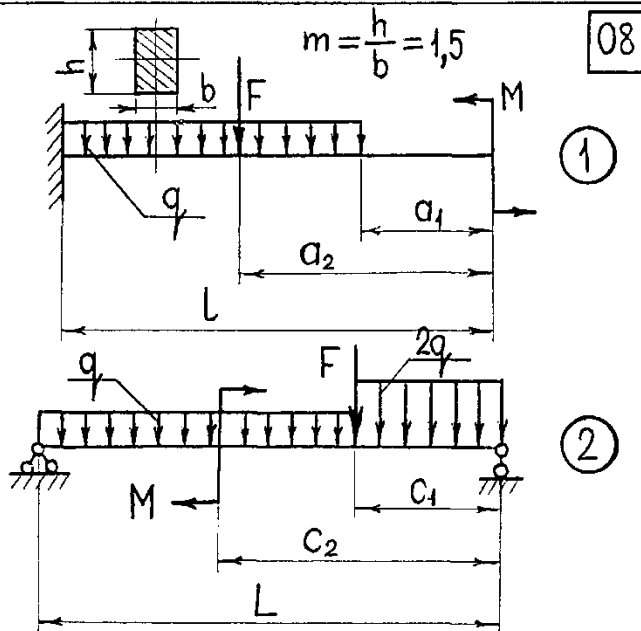
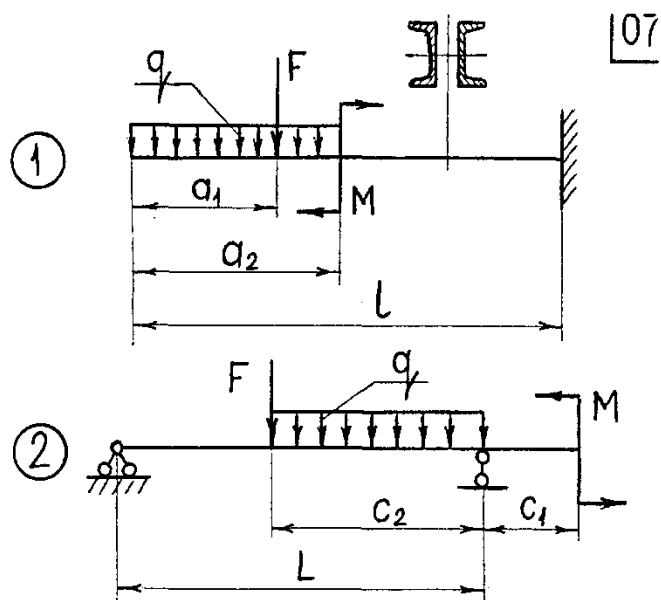
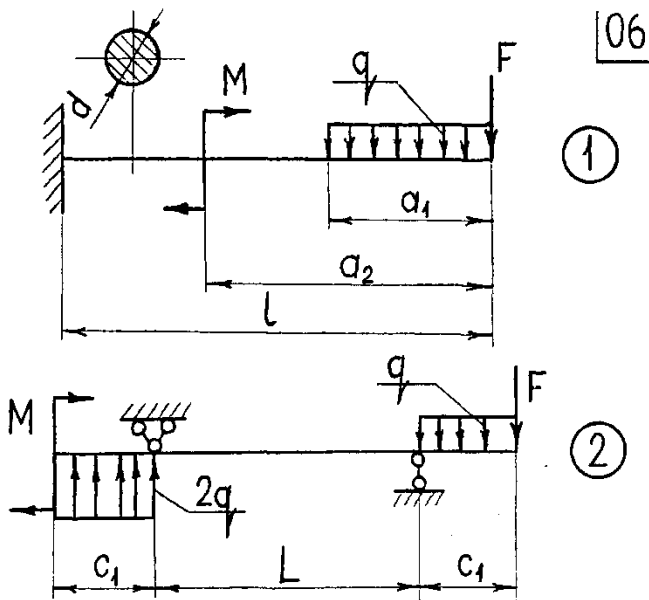


19

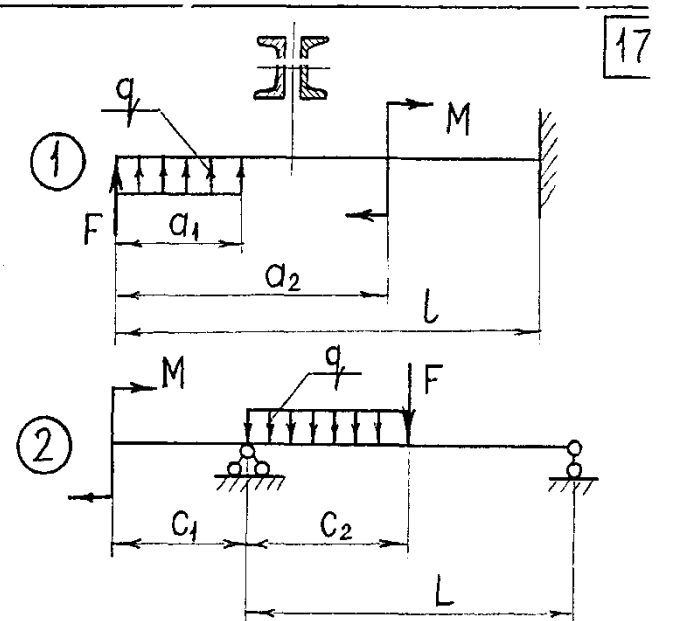
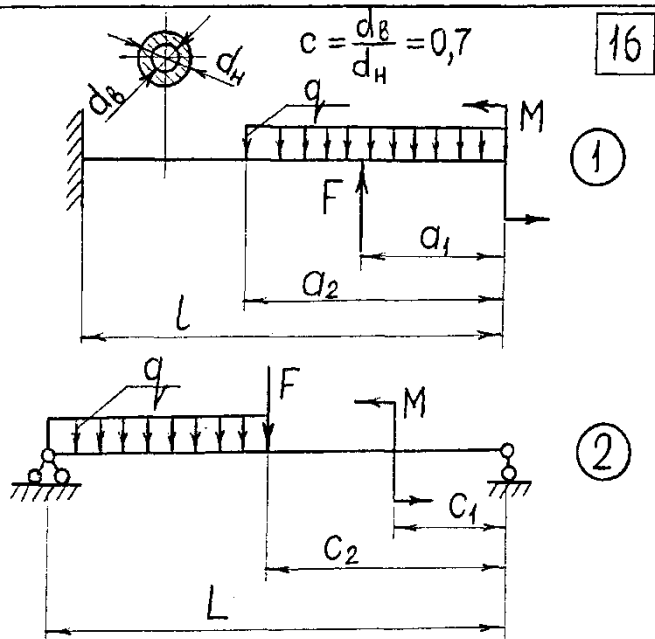
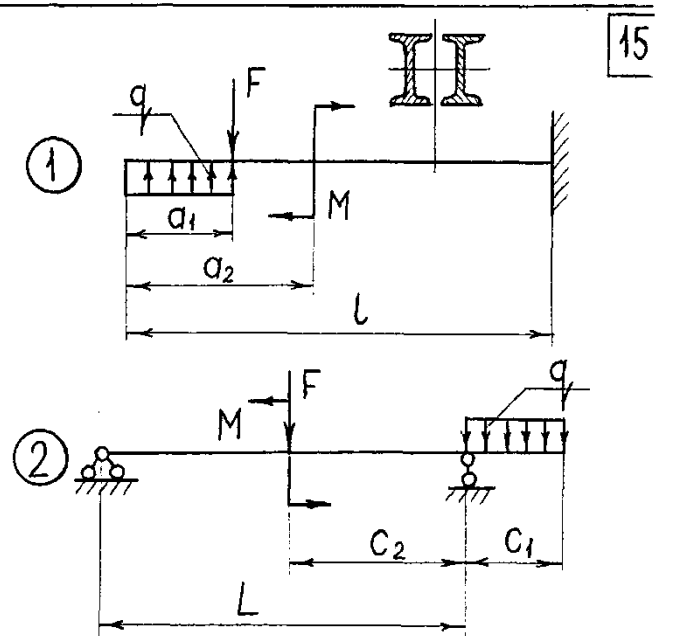
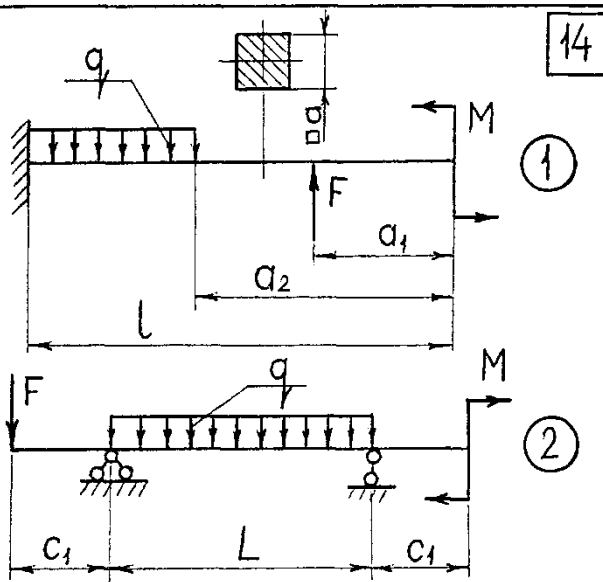
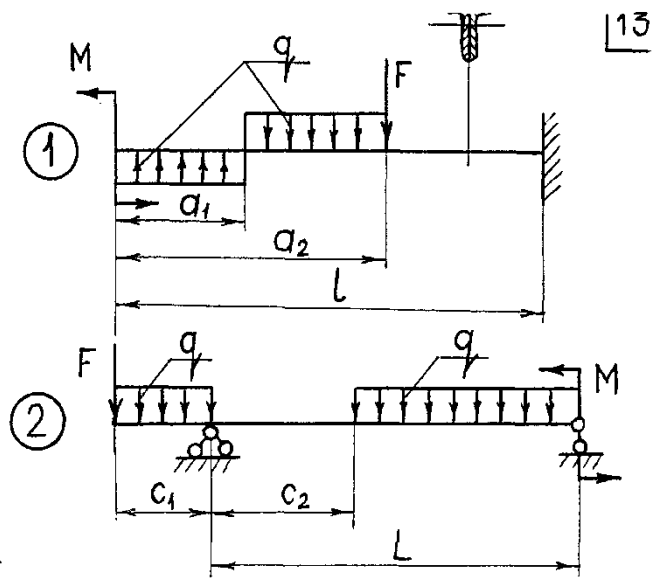
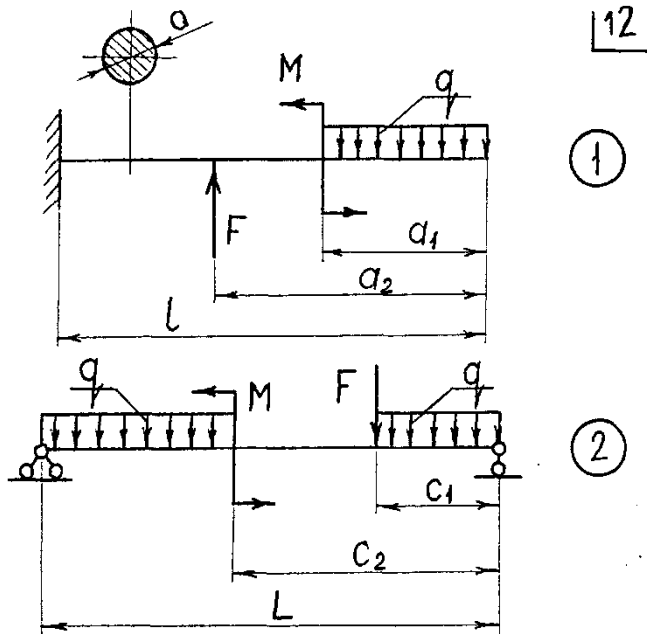


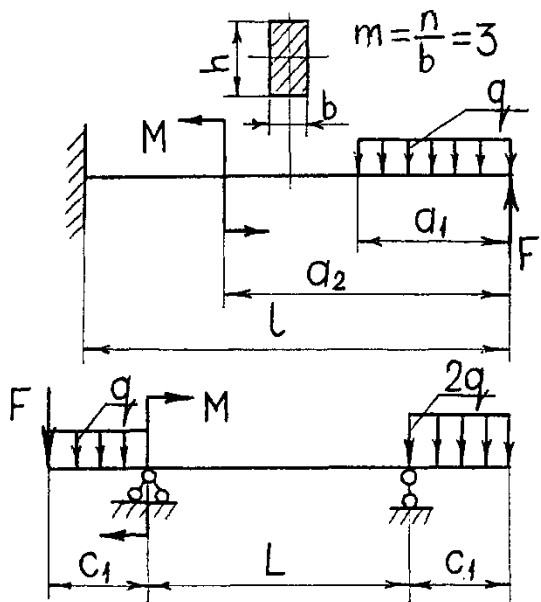
Приложение В. Схемы к РГР №3



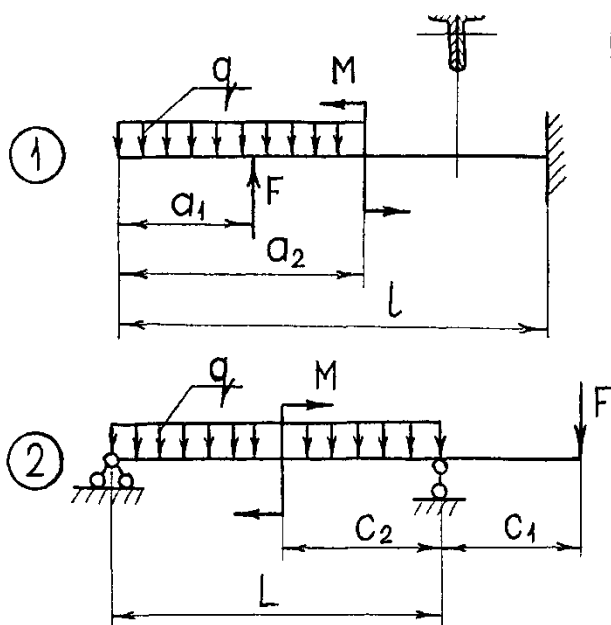




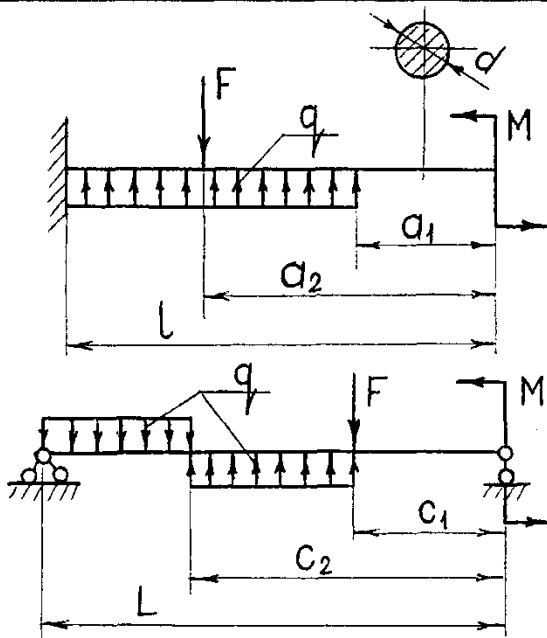




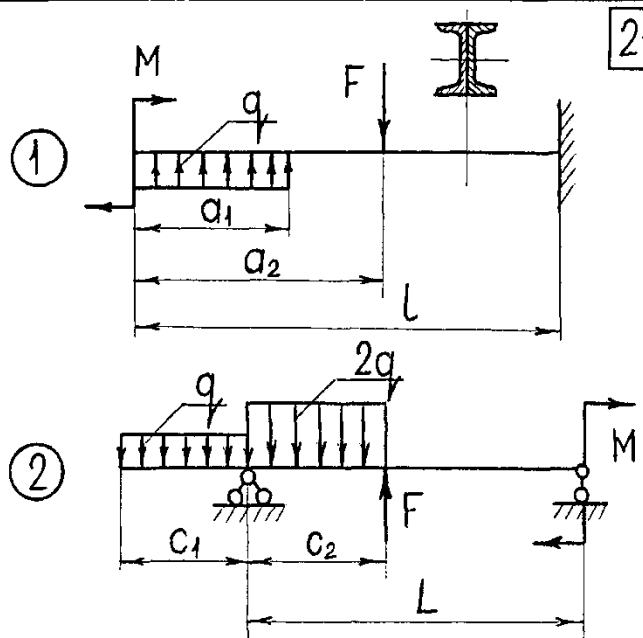
18



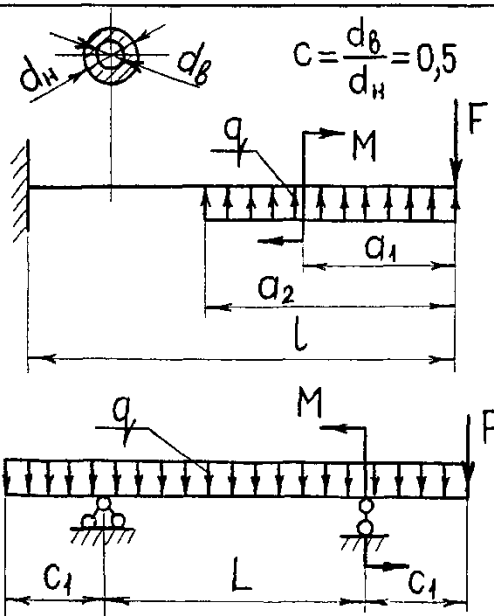
19



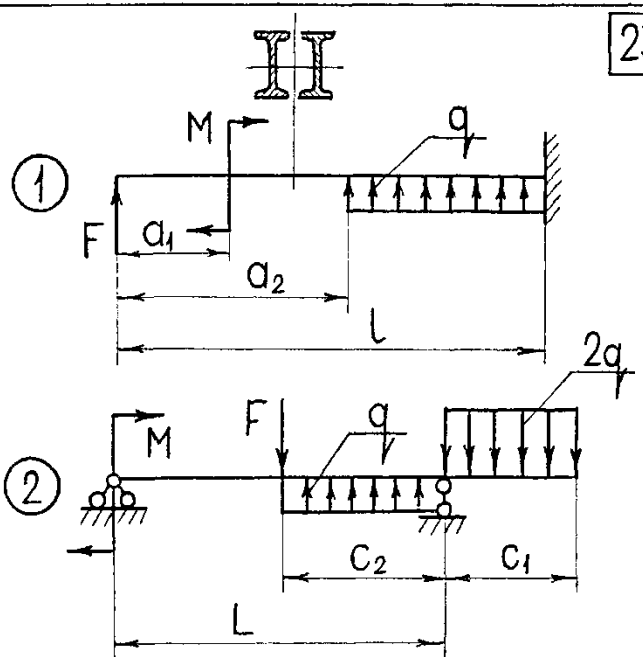
20



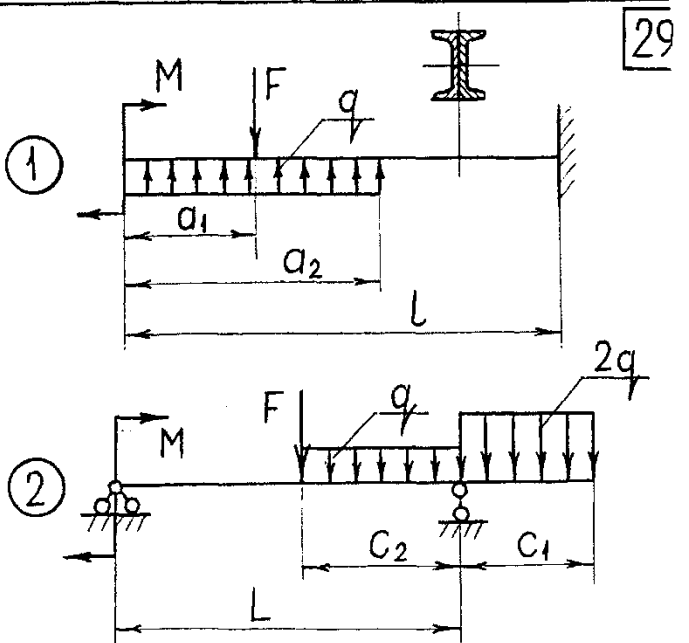
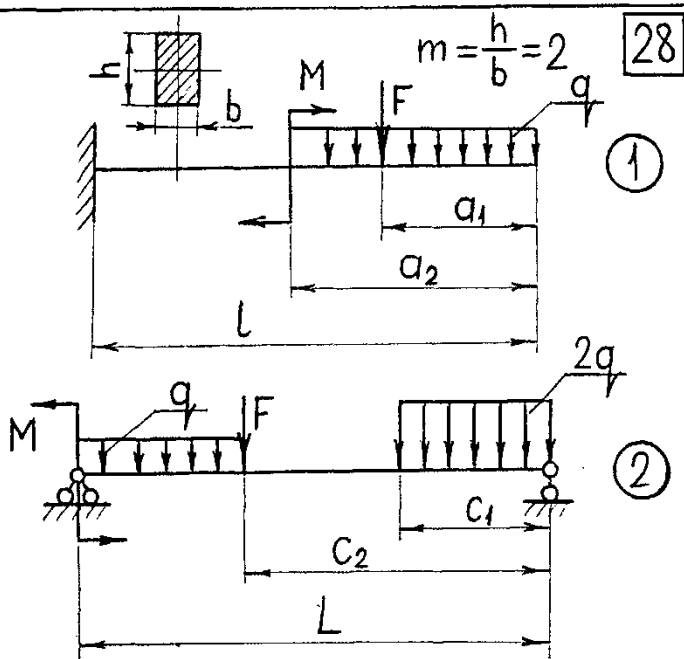
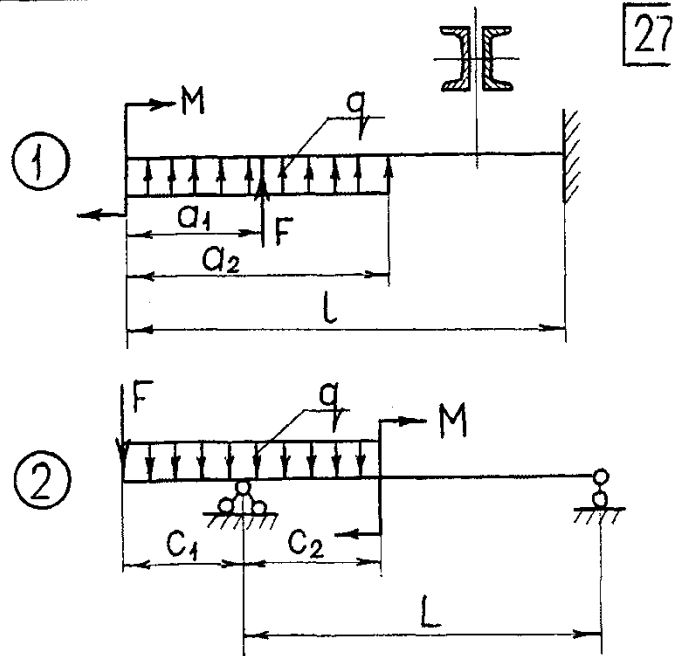
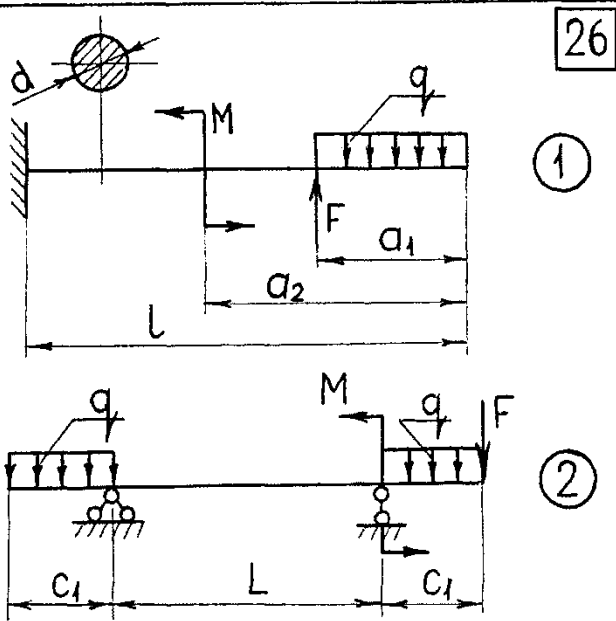
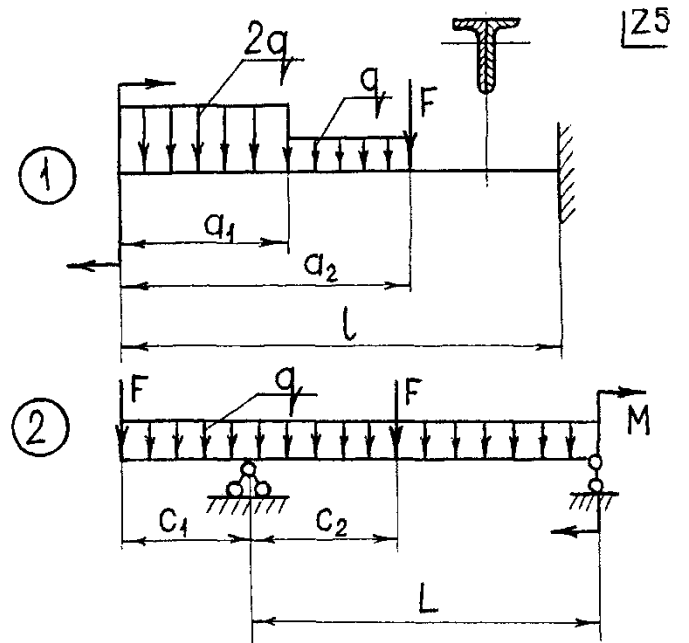
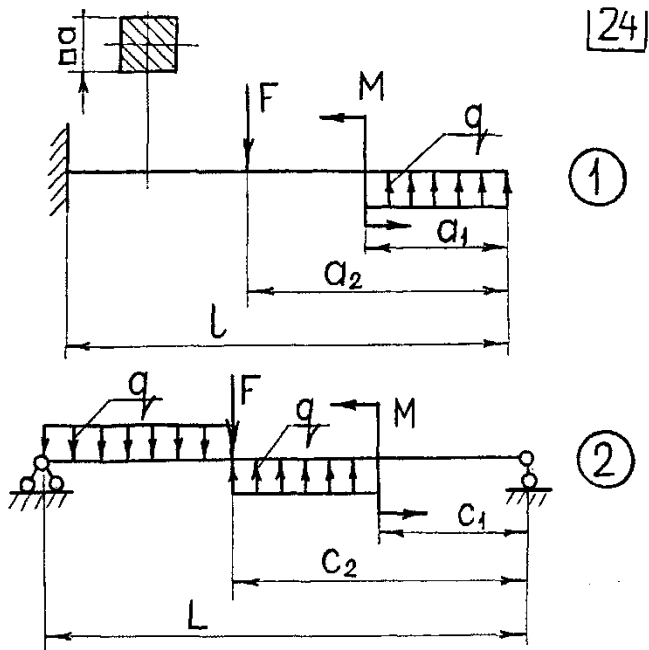
21



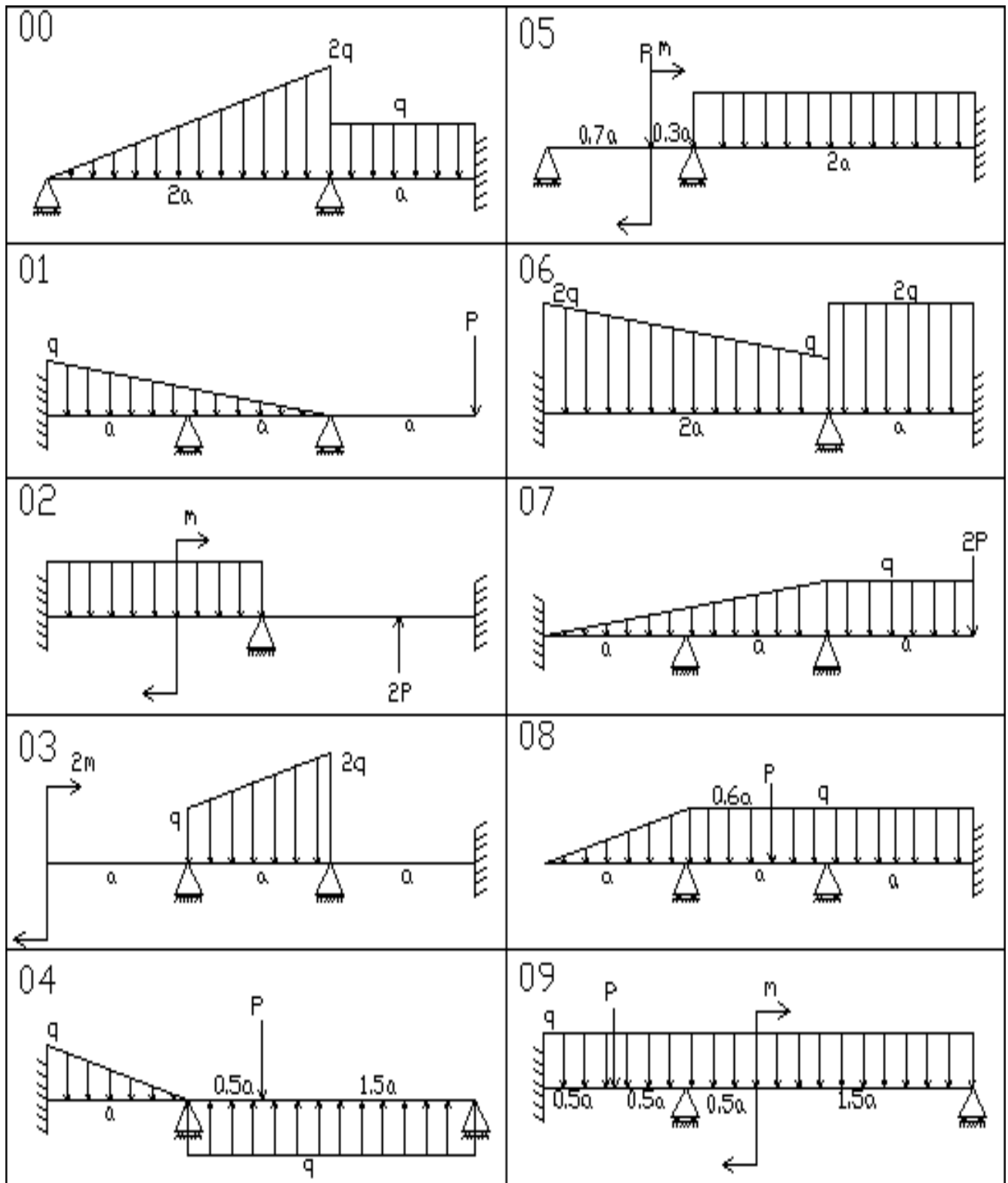
22

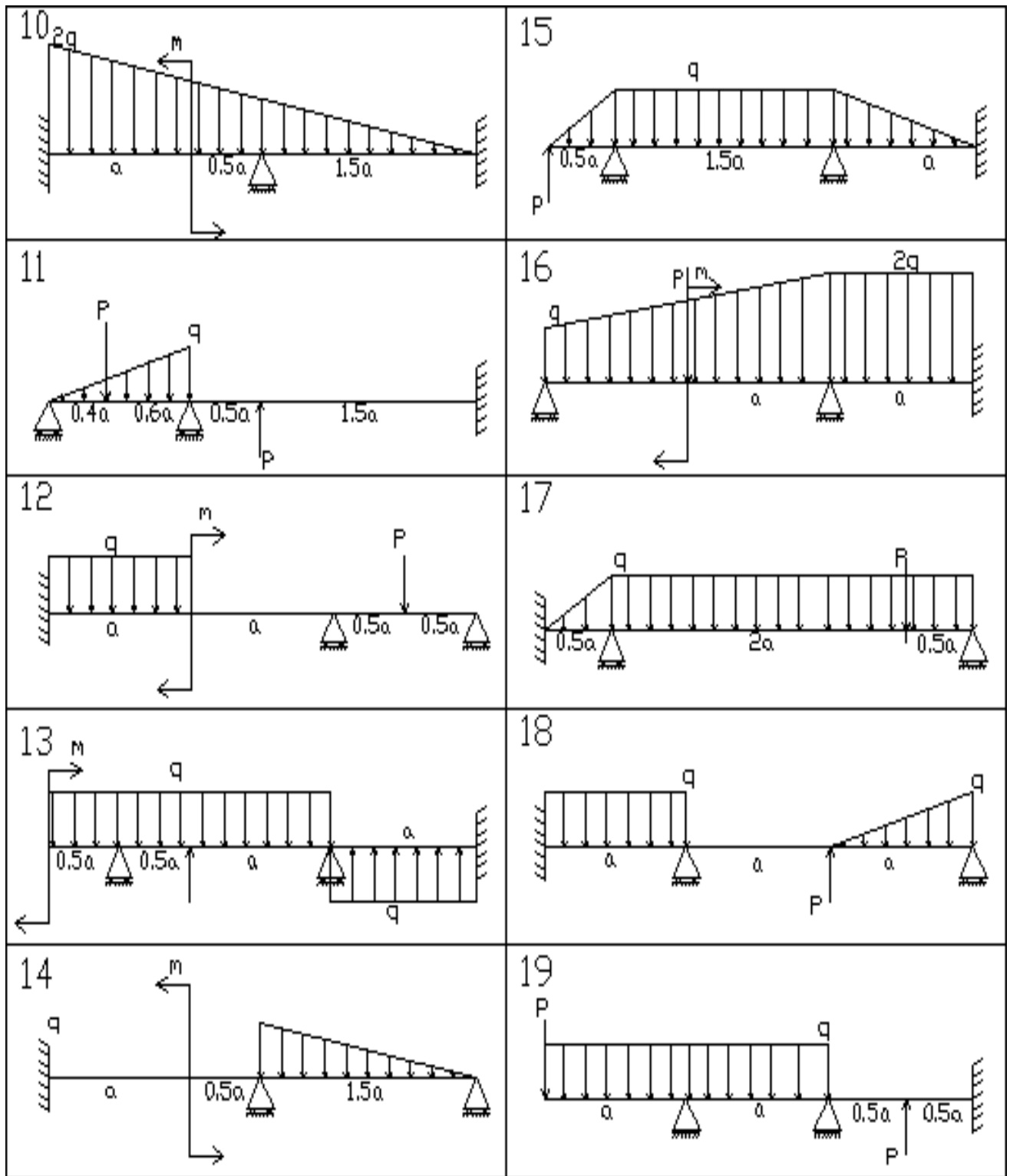


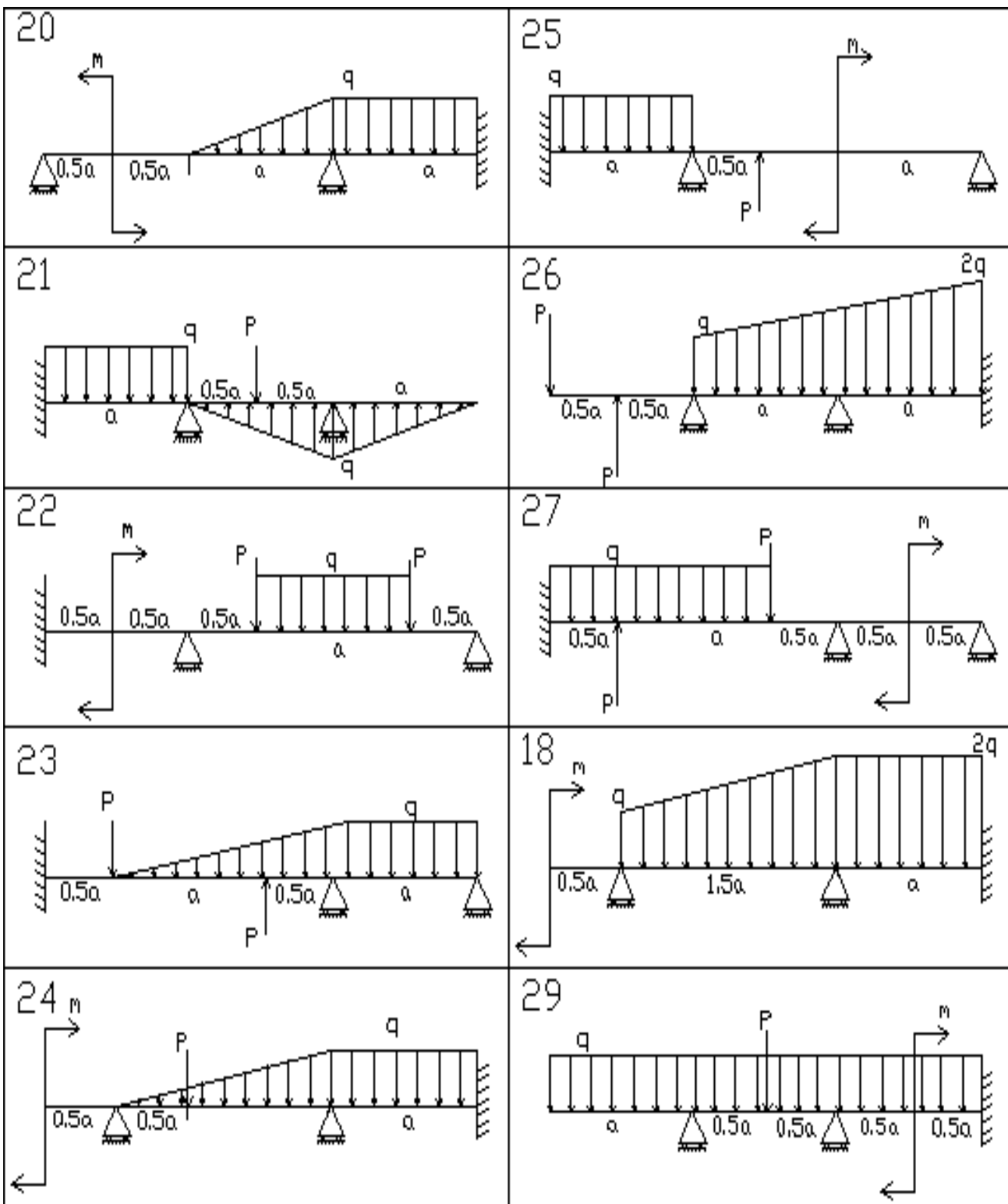
23



Приложение Г. Схемы к РГР №4

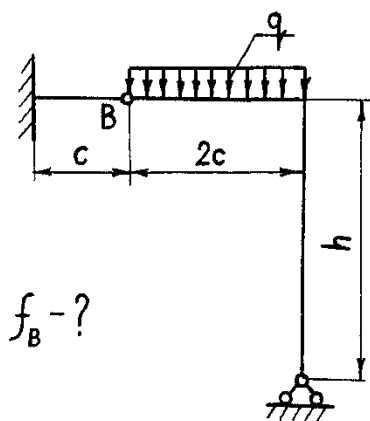




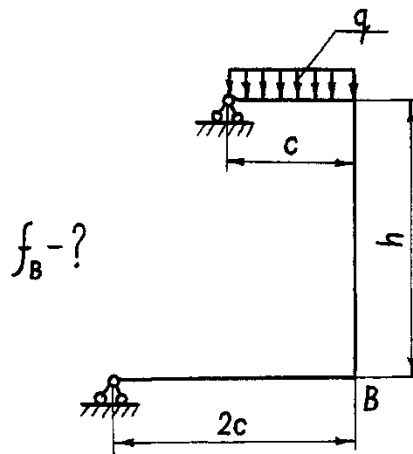


Приложение Д. Схемы к РГР №5

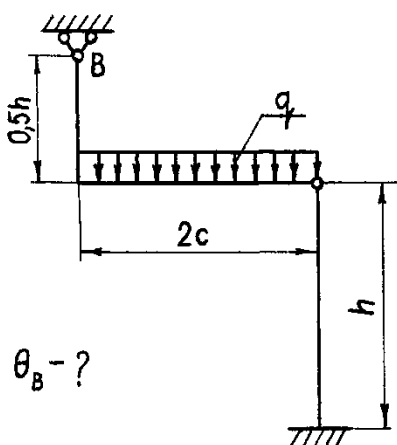
00



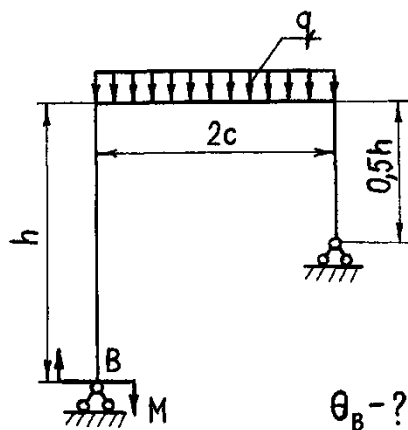
01



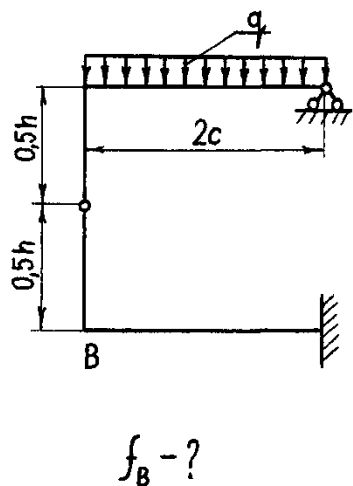
02



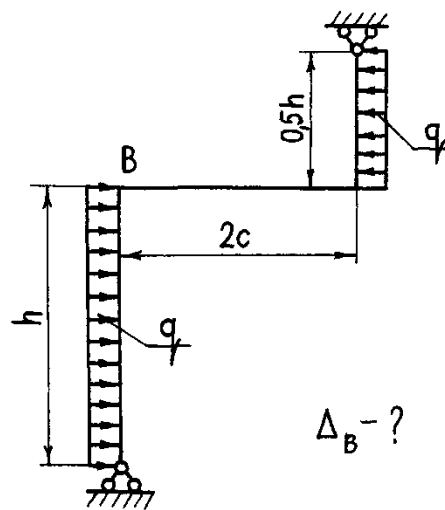
03



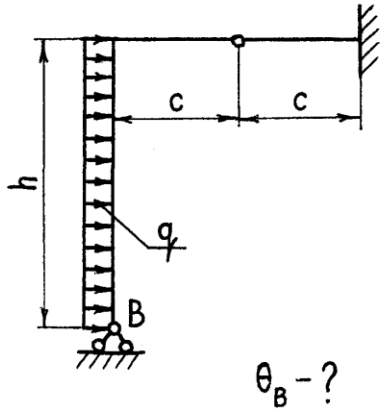
04



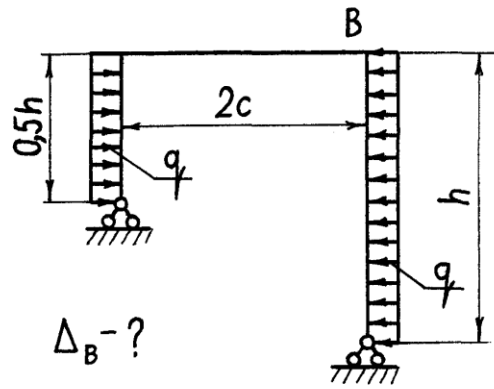
05



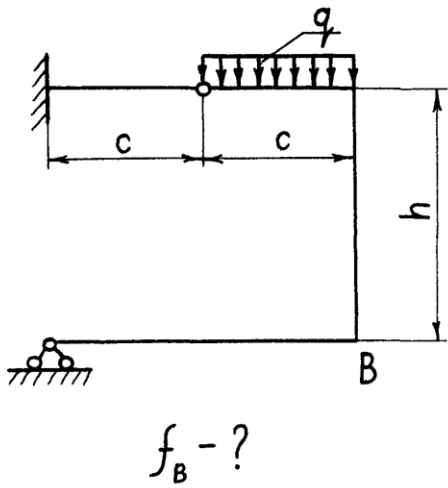
06



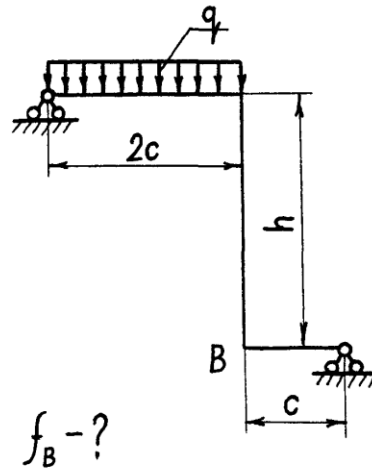
07



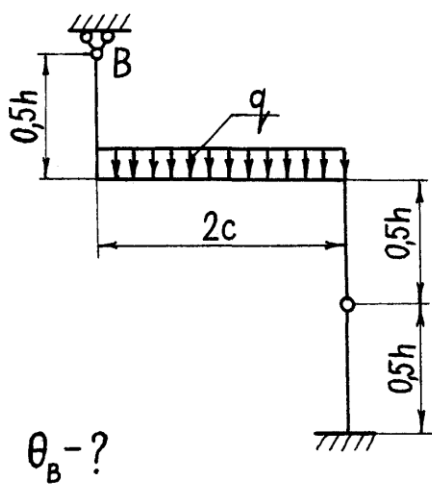
08



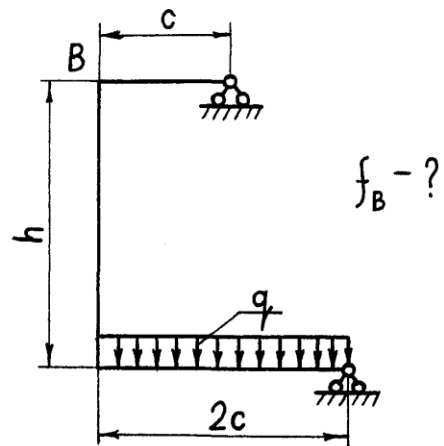
09



10

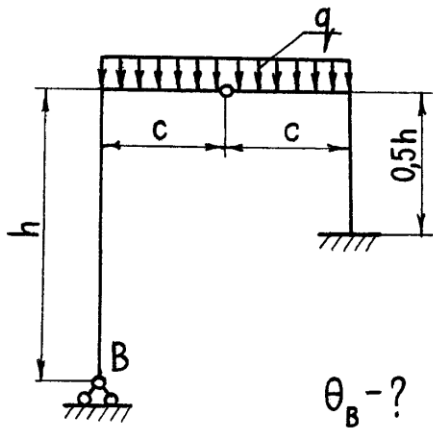


11



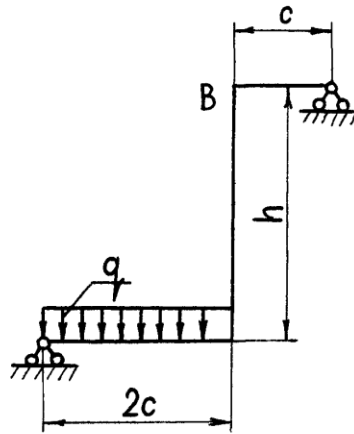


12



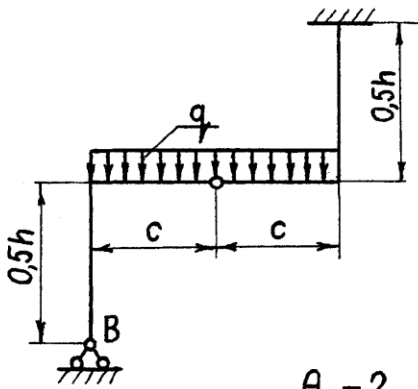
$\theta_B - ?$

13



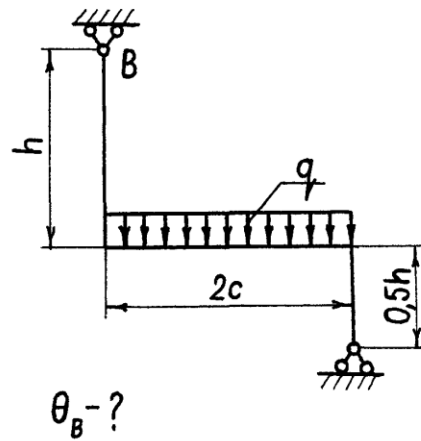
$f_B - ?$

14



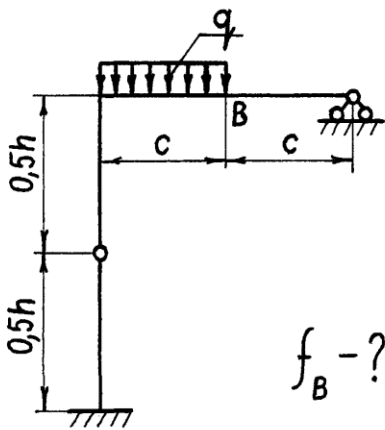
$\theta_B - ?$

15



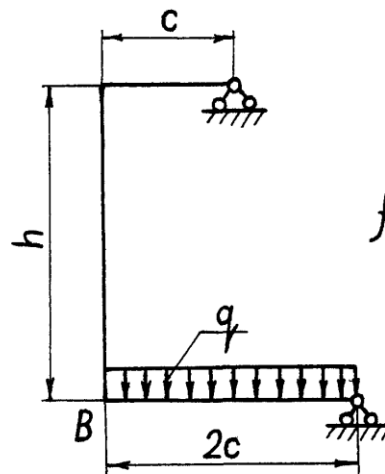
$\theta_B - ?$

16



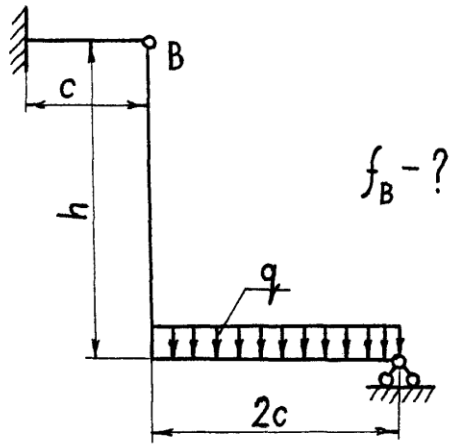
$f_B - ?$

17

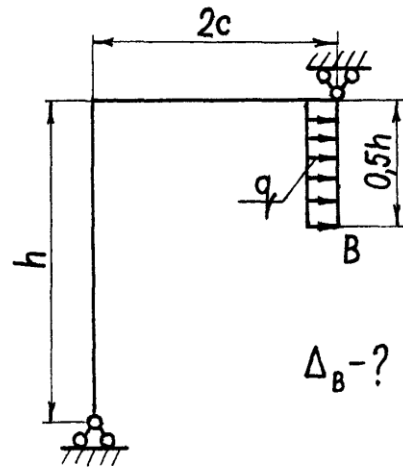


$f_B - ?$

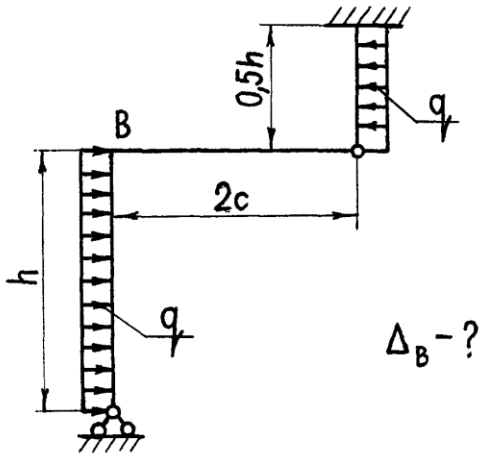
18



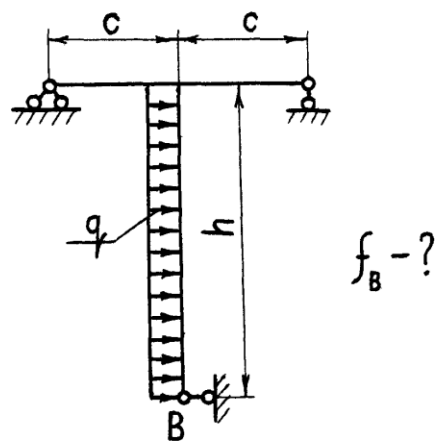
19



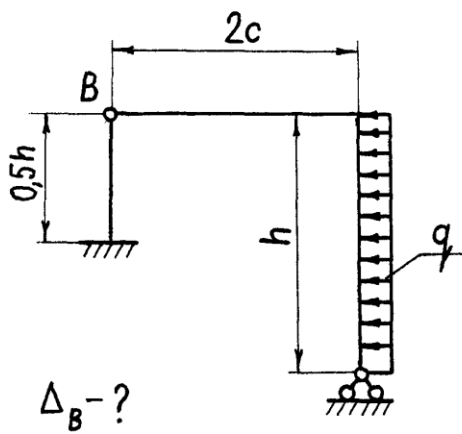
20



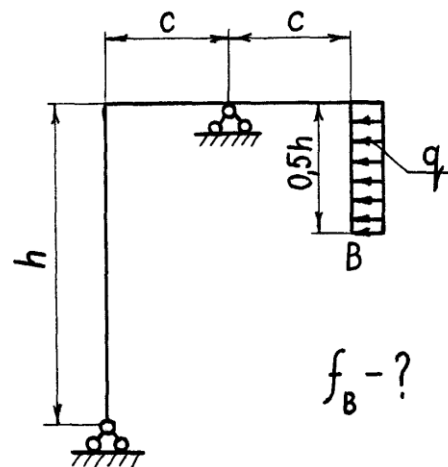
21



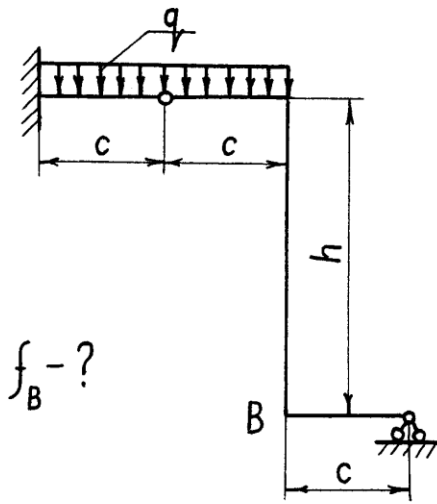
22



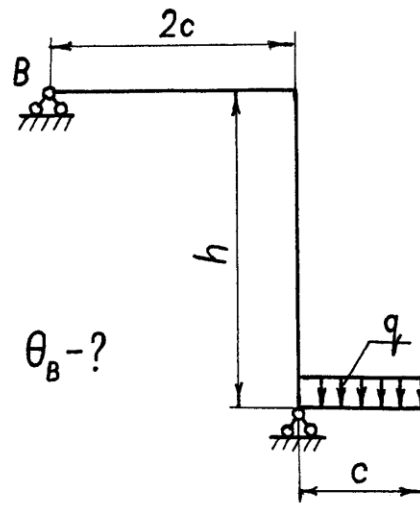
23



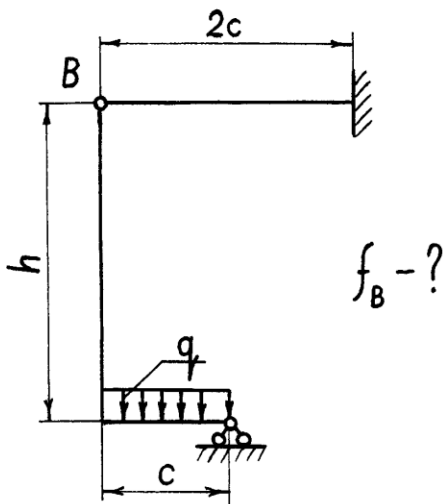
24



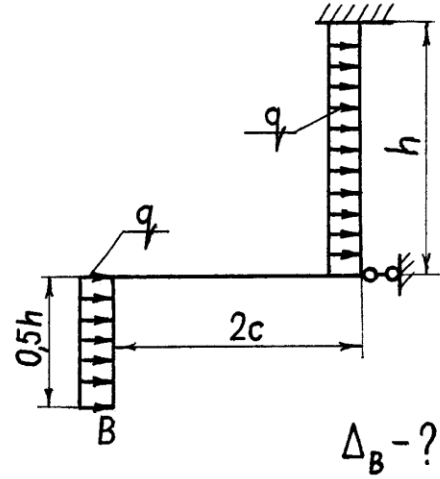
25



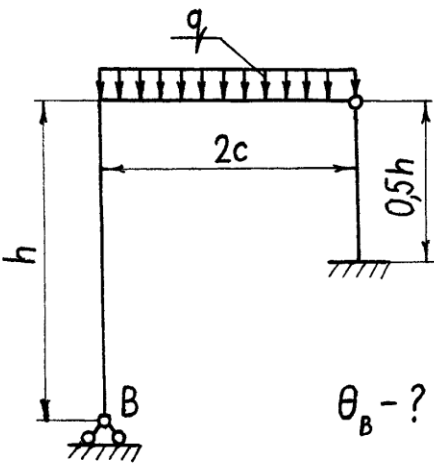
26



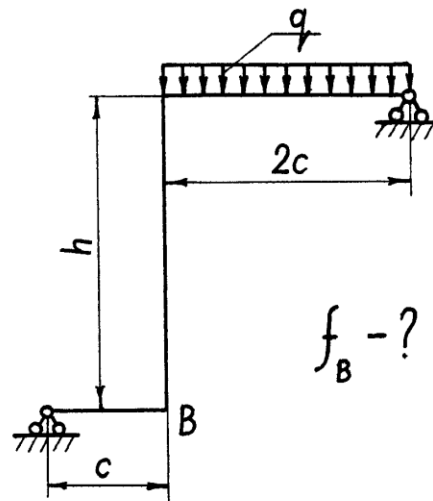
27



28



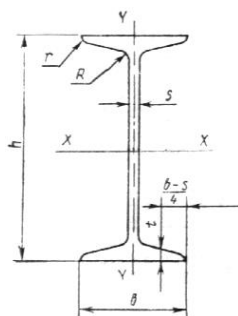
29



<p><b>ДВУТАВРЫ СТАЛЬНЫЕ ГОРЯЧЕКАТАНЫЕ</b></p> <p><b>Сортамент</b></p> <p>Hot-rolled steel flange beams. Rolling products</p>	<p><b>ГОСТ</b></p> <p><b>8239-89</b></p>
--	--

Настоящий стандарт устанавливает сортамент горячекатаных стальных двутавров с уклоном внутренних граней полков.

Поперечное сечение двутавров должно соответствовать указанному на черт.



$h$  — высота двутавра;  $b$  — ширина полки;  $s$  — толщина стенки;  $t$  — средняя толщина полки;  $R$  — радиус внутреннего закругления;  $r$  — радиус закругления полки

Примечание. Уклон внутренних граней полков должен быть 6—12 %.

Таблица

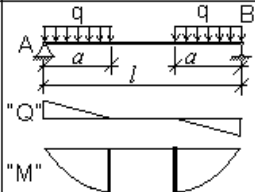
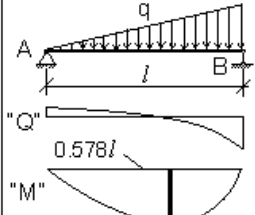
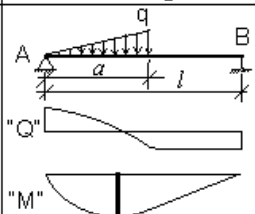
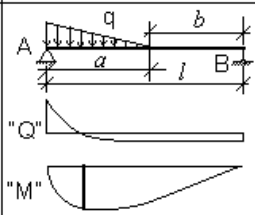
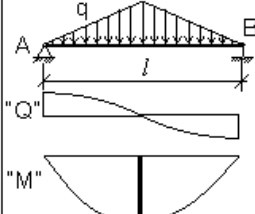
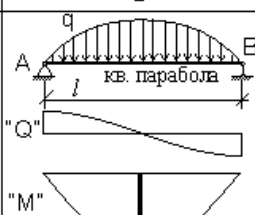
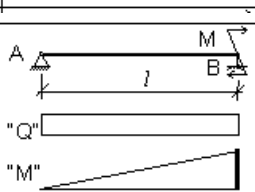
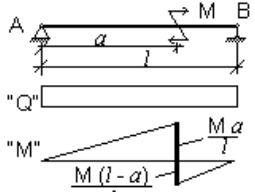
Номер двутавра	Размеры						Площадь поперечного сечения, см <sup>2</sup>	Масса 1 м, кг	Справочные значения для осей								
	$h$	$b$	$s$	$t$	$R$	$r$			X — X			Y — Y					
					не более				$I_x$ , см <sup>4</sup>	$W_x$ , см <sup>3</sup>	$i_x$ , см	$S_x$ , см <sup>3</sup>	$I_y$ , см <sup>4</sup>	$W_y$ , см <sup>3</sup>	$i_y$ , см		
	мм																
10	100	55	4,5	7,2	7,0	2,5	12,0	9,46	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22		
12	120	64	4,8	7,3	7,5	3,0	14,7	11,50	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38		
14	140	73	4,9	7,5	8,0	3,0	17,4	13,70	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,50	1,55		
16	160	81	5,0	7,8	8,5	3,5	20,2	15,90	873	109,0	6,57	62,3	58,6	14,50	1,70		
18	180	90	5,1	8,1	9,0	3,5	23,4	18,40	1290	143,0	7,42	81,4	82,6	18,40	1,88		
20	200	100	5,2	8,4	9,5	4,0	26,8	21,00	1840	184,0	8,28	104,0	115,0	23,10	2,07		
22	220	110	5,4	8,7	10,0	4,0	30,6	24,00	2550	232,0	9,13	131,0	157,0	28,60	2,27		
24	240	115	5,6	9,5	10,5	4,0	34,8	27,30	3460	289,0	9,97	163,0	198,0	34,50	2,37		
27	270	125	6,0	9,8	11,0	4,5	40,2	31,50	5010	371,0	11,20	210,0	260,0	41,50	2,54		
30	300	135	6,5	10,2	12,0	5,0	46,5	36,50	7080	472,0	12,30	268,0	337,0	49,90	2,69		
33	330	140	7,0	11,2	13,0	5,0	53,8	42,20	9840	597,0	13,50	339,0	419,0	59,90	2,79		
36	360	145	7,5	12,3	14,0	6,0	61,9	48,60	13380	743,0	14,70	423,0	516,0	71,10	2,89		
40	400	155	8,3	13,0	15,0	6,0	72,6	57,00	19062	953,0	16,20	545,0	667,0	86,10	3,03		
45	450	160	9,0	14,2	16,0	7,0	84,7	66,50	27696	1231,0	18,10	708,0	808,0	101,00	3,09		
50	500	170	10,0	15,2	17,0	7,0	100,0	78,50	39727	1589,0	19,90	919,0	1043,0	123,00	3,23		
55	550	180	11,0	16,5	18,0	7,0	118,0	92,60	55962	2035,0	21,80	1181,0	1356,0	151,00	3,39		
60	600	190	12,0	17,8	20,0	8,0	138,0	108,00	76806	2560,0	23,60	1491,0	1725,0	182,00	3,54		

В таблицах используют обозначения:

$I$  — момент инерции;  $W$  — момент сопротивления;  $S$  — статический момент полусечения;  $i$  — радиус инерции.

## Приложение Ж. Элементы изгиба балок, свободно опертых на две опоры

№	Расчетная схема, нагрузки и эпюры	Опорные реакции	Изгибающий момент	Прогиб балки	Угол поворота на опорах
1.1		$A = B = \frac{Q}{2}$	$M = \frac{Qx}{2} \quad (0 < x < \frac{l}{2})$ $M = \frac{Q(l-x)}{2} \quad (\frac{l}{2} < x < l)$ $M_{\max} = \frac{Ql}{4}$	$f = \frac{Qx}{48EI}(4x^2 - 3l^2)$ <i>при <math>x &lt; \frac{l}{2}</math></i> $f_{\max} = -\frac{Ql^3}{48EI}$	$\Theta_A = \Theta_B = \frac{Ql^2}{16EI}$
1.2		$A = \frac{Qb}{l}$ $B = \frac{Qa}{l}$	$M = \frac{Qbx}{l} \quad (0 < x < a)$ $M = \frac{Q(la-xa)}{l} \quad (a < x < l)$ $M_{\max} = \frac{Qab}{l}$	$f = -\frac{Qb^2a^2}{3lEI}$ <i>при <math>x = a</math></i>	$\Theta_A = \frac{Ql^2}{6EI}(\frac{b}{l} - \frac{b^3}{l^3})$ $\Theta_B = \frac{Ql^2}{6EI}(\frac{a}{l} - \frac{a^3}{l^3})$
1.3		$A = B = Q$	$M_{\max} = Qa$	$f_{\max} = \frac{Ql^3}{24EI}(4\frac{a^3}{l^3} - 3\frac{a}{l})$	$\Theta_A = \Theta_B = \frac{Qa}{2EI}(l-a)$
1.4		$A = \frac{Q(b+l-a)}{l}$ $B = \frac{Q(a+l-b)}{l}$	$M_{\max} = \frac{Qa(b+l-a)}{l}$	$f_{\max} < \frac{Ql^3}{24EI}(4\frac{a^3}{l^3} - 3\frac{a}{l})$	
2.1		$A = B = \frac{ql}{2}$	$M = \frac{qx(l-x)}{2}$ $M_{\max} = \frac{ql^2}{8}$	$f = \frac{q(2lx^3 - x^4 - l^3x)}{24EI}$ $f_{\max} = -\frac{5ql^4}{384EI}$	$\Theta_A = \Theta_B = \frac{ql^3}{24EI}$
2.2		$A = \frac{qa}{l}(\frac{a}{2} + b)$ $B = \frac{qa^2}{2l}$	$M_{\max} = \frac{qa^2}{8}(2 - \frac{a}{l})^2$	<i>при <math>x = a</math></i> $f = \frac{qa^3b}{24EI}(3\frac{a}{l} - 4)$ <i>при <math>a &gt; 0.547l</math></i> $f_{\max}$ - на левой стороне	$\Theta_A = \frac{qa^2l}{6EI}(1 - \frac{a}{2l})^2$ $\Theta_B = \frac{qa^2l}{12EI}(1 - \frac{a^2}{2l^2})$
2.3		$A = \frac{qb}{l}(\frac{b}{2} + c)$ $B = \frac{qb}{l}(\frac{b}{2} + a)$	$M = Ax$ $(0 < x < a)$ $M = Ax - q\frac{(x-a)^2}{2}$ $(a < x < c)$	$\Theta_A = \frac{qbl^2}{24EI}(4\frac{d}{l} - 4\frac{d^3}{l^3} + \frac{ab^2}{l^3} + \frac{b^3}{2l^3} - \frac{b^2}{l^2})$ $d = c + \frac{b}{2}$	

2.4		$A = B = qa$	$M = qx(a - \frac{x}{2})$ ( $0 < x < a$ ) $M_{\max} = q \frac{a^2}{2}$ ( $a < x < l - a$ )	$npx = 0.5l$ $f_{\max} = \frac{ql^2a^2}{48EI} (2\frac{a^2}{l^2} - 3)$	$\Theta_A = \Theta_B =$ $= \frac{qa^2}{12EI} (3l - 2a)$
2.5		$A = \frac{ql}{6}$ $B = \frac{ql}{3}$	$M = \frac{qlx}{6} - \frac{qx^3}{6l}$ $M_{l/2} = \frac{ql^2}{16}$ $M_{\max} = 0.0642ql^2$	$f_{\max} = -0.00651 \frac{ql^4}{EI}$ $npx = 0.519l$	$\Theta_A = \frac{7ql^3}{360EI}$ $\Theta_B = \frac{8ql^3}{360EI}$
2.6		$A = \frac{qa}{2l} (l - \frac{2a}{3})$ $B = \frac{qa^2}{3l}$	$M = Ax - q \frac{x^2}{3}$ ( $0 < x < a$ )	$npx = a$ $-f = \frac{qa^3l}{45EI} (5 - 9\frac{a}{l} + \frac{a^2}{l^2})$	$\Theta_A = \frac{qa^2l}{360EI} (12\frac{a^2}{l^2} - 45\frac{a}{l} + 40)$ $\Theta_B = \frac{qa^2l}{90EI} (5 - 3\frac{a^2}{l^2})$
2.7		$A = \frac{qa}{2l} (l - \frac{a}{3})$ $B = \frac{qa^2}{6l}$	$npx = a$ $M = Aa - q \frac{a^2}{6}$	$npx = a$ $-f = \frac{qa^2bl}{360EI} (20\frac{a}{l} - 13\frac{a^2}{l^2})$	$\Theta_A = \frac{qa^2l}{360EI} (3\frac{a^2}{l^2} - 15\frac{a}{l} + 20)$ $\Theta_B = \frac{qa^2l}{360EI} (10 - 3\frac{a^2}{l^2})$
2.8		$A = B = \frac{ql}{4}$	$M = \frac{qlx}{4} - \frac{qx^3}{6l}$ ( $0 < x < \frac{l}{2}$ ) $M_{\max} = \frac{ql^2}{12}$	$f_{\max} = -\frac{ql^4}{120EI}$	$\Theta_A = \Theta_B =$ $= \frac{5ql^3}{192EI}$
2.9		$A = B = \frac{ql}{3}$	$q_x = \frac{4qx}{l^2} (l - x)$ ( $0 < x < \frac{l}{2}$ ) $M_{\max} = \frac{10ql^2}{96}$	$f_{\max} = -\frac{61ql^4}{5760EI}$	$\Theta_A = \Theta_B =$ $= \frac{ql^3}{30EI}$
3.1		$-A = B = \frac{M}{l}$	$M_x = -\frac{Mx}{l}$ $npx = \frac{l}{2} \quad M = \frac{M}{2}$ $npx = l \quad M_{\max} = M$	$f = \frac{Mx}{6EI} (l^2 - x^2)$ $f_{\max} = 0.0642 \frac{Ml^2}{EI}$ $f = \frac{Ml^2}{16EI} \quad npx = \frac{l}{2}$	$\Theta_A = -\frac{Ml}{6EI}$ $\Theta_B = -\frac{Ml}{3EI}$
3.2		$-A = B = \frac{M}{l}$	$M_x = -\frac{Mx}{l}$ ( $0 < x < a$ ) $M_x = M (1 - \frac{x}{l})$ ( $a < x < l$ ) $npx = \frac{l}{2} \quad M = \frac{M}{2}$	$f = \frac{Ax^3}{6EI} - \Theta_A x$ $npx < a$	$\Theta_A = -\frac{Ml}{6EI} [1 - 3\frac{(l-a)^2}{l^2}]$ $\Theta_B = \frac{Ml}{6EI} (1 - 3\frac{a^2}{l^2})$

*Учебное издание*

Дмитрий Александрович Романюта  
Алексей Игоревич Притыкин

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

*Редактор Г.Е. Смирнова*

Подписано в печать 11.11.2013 г. Формат 60x84 1/16. Уч.-изд.л. 3,0. Печ.л. 4,2. Тираж 30 экз. Заказ.

Издательство федерального государственного бюджетного  
образовательного учреждения  
высшего профессионального образования  
«Калининградский государственный технический университет».  
236022, Калининград, Советский проспект, 1