ГЛАВА 1
ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

1.1. ОСНОВЫ КИНЕМАТИКИ

Основные законы и формулы

• Средняя и мгновенная скорости материальной точки

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}, \quad \vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}.$$

• Модули средней и мгновенной скоростей

$$\langle v \rangle = \left| \langle \vec{v} \rangle \right| = \left| \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right| = \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}, \ \ \langle v \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

$$v = |\vec{v}| = \left| \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}, \ \ v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

[$\Delta \vec{r}$ — элементарное перемещение точки за промежуток времени Δt; $\vec{r}$ — радиус-вектор точки; Δs — путь, пройденный точкой за промежуток времени Δt].

• Среднее и мгновенное ускорения материальной точки

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}, \quad \vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}.$$

• Тангенциальная и нормальная составляющие ускорения

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}, \quad a_n = \frac{v^2}{r}$$

[r — радиус кривизны траектории в данной точке].

• Полное ускорение при криволинейном движении

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n, \quad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

• Путь и скорость для равнопеременного движения

$$s = v_0 t \pm \frac{at^2}{2}, \quad v = v_0 \pm at$$

[v_0 — начальная скорость].

• Длина пути, пройденного материальной точкой за промежуток времени от t_1 до t_2,

$$s = \int\limits_{t_1}^{t_2} v(t)\mathrm{d}t.$$

• Угловая скорость

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$

[$d\vec{\varphi}$ — элементарный угол поворота].

• Угловая скорость равномерного вращательного движения

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n$$

[φ — угол поворота произвольного радиуса от начального положения; t — промежуток времени, за который произошел данный поворот; T — период вращения; n — частота вращения].

• Угловое ускорение

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

• Угол поворота и угловая скорость для равнопеременного вращательного движения

$$\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}, \quad \omega = \omega_0 \pm \varepsilon t$$

[ω_0 — начальная угловая скорость].

• Связь между линейными (длина пути s, пройденного точкой по дуге окружности радиусом R, линейная скорость v, тангенциальная составляющая ускорения a_τ, нормальная составляющая ускорения a_n) и угловыми (φ — угол поворота, ω — угловая скорость, ε — угловое ускорение) величинами:

$$s = R\varphi,\ v = R\omega,\ a_\tau = R\varepsilon,\ a_n = \omega^2 R.$$

Примеры решения задач

1.1. Зависимость пройденного материальной точкой пути от времени задается уравнением $s = A - Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $C = 0{,}2$ м/с^2, $D = 0{,}1$ м/с^3. Определите: 1) через какой промежуток времени t после начала движения ускорение тела $a = 1$ м/с^2; 2) среднее ускорение $\langle a \rangle$ за этот промежуток времени.

Дано: $s = A - Bt + Ct^2 + Dt^3$; $C = 0{,}2$ м/с^2; $D = 0{,}1$ м/с^3; $a = 1$ м/с^2.

Найти: t; $\langle a \rangle$.

Решение. Мгновенное ускорение материальной точки

$$a = \frac{dv}{dt}. \tag{1}$$

Мгновенная скорость $v = \dfrac{ds}{dt}$ или, учитывая условие задачи $s = A - Bt + Ct^2 + Dt^3$, найдем

$$v = -B + 2Ct + 3Dt^2. \tag{2}$$

Тогда ускорение, согласно (1),

$$a = 2C + 6Dt,$$

откуда искомый промежуток времени

$$t = \frac{a - 2C}{6D}.$$

Среднее ускорение материальной точки

$$\langle a \rangle = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_t - v_0}{t - t_0},$$

где начальный момент времени $t_0 = 0$. Тогда искомое среднее ускорение с учетом формулы (2)

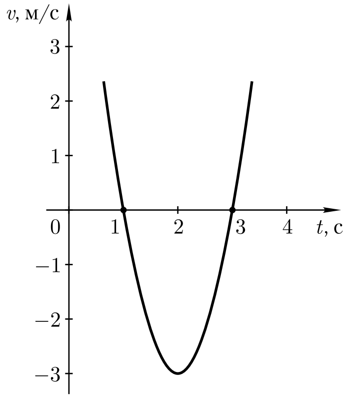
$$\langle a \rangle = \frac{-B + 2Ct + 3Dt^2 + B}{t} = 2C + 3Dt.$$

Ответ: $t = 1$ с; $\langle a \rangle = 0{,}7$ м/с^2.

1.2. Кинематическое уравнение движения материальной точки вдоль прямой (ось x) задается уравнением $x = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $B = 9$ м/с; $C = -6$ м/с^2; $D = 1$ м/с^3. Определите среднюю скорость $\langle v \rangle$ и среднее ускорение $\langle a \rangle$ материальной точки за промежуток времени, в течение которого точка движется в направлении, противоположном первоначальному.

Дано: $x = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$; $B = 9$ м/с; $C = -6$ м/с^2; $D = 1$ м/с^3.

Найти: $\langle v \rangle$; $\langle a \rangle$.



Решение. Мгновенная скорость материальной точки

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = B + 2Ct + 3Dt^2. \qquad (1)$$

График зависимости скорости (1) точки от времени — парабола с ветвями, направленными вверх, вершиной с координатами $t = -\dfrac{C}{3D} = 2$ с; $v = B - \dfrac{C^2}{3D} = -3$ м/с (см. рисунок) и точками пересечения с осью: $t_1 = 1$ с; $t_2 = 3$ с (получается из условия $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$). В начальный момент времени $t = 0$ скорость точки согласно (1) равна 9 м/с, далее она убывает и при $t_1 = 1$ с меняет знак, т. е. точка начинает двигаться в противоположном направлении. В момент времени $t_2 = 3$ с снова происходит смена знака скорости и, соответственно, направления движения на первоначальное.

Искомые средняя скорость и среднее ускорение за промежуток времени от $t_1 = 1$ с до $t_2 = 3$ с

$$\langle v \rangle = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1};$$

$$\langle a \rangle = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Определив из заданного уравнения для x, уравнения (1) и из графика соответствующие значения координат и скоростей, находим $\langle v\rangle = 2$ м/с; $\langle a\rangle = 0$.

Ответ: $\langle v\rangle = 2$ м/с; $\langle a\rangle = 0$.

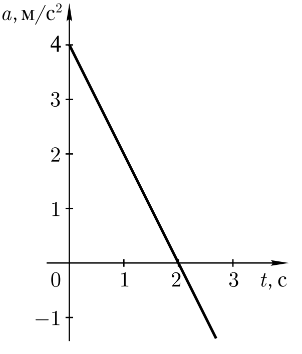
1.3. На рисунке представлена зависимость ускорения a от времени t для материальной точки, движущейся прямолинейно. Определите скорость v и координату x точки через $t = 3$ с после начала движения. В какой момент времени t_1 точка изменит направление движения?

Дано: $t = 3$ с.

Найти: v; x; t_1.

Решение. Из графика следует, что зависимость ускорения от времени можно представить в виде

$$a(t) = A - Bt, \quad (1)$$



где $A = 4$ м/с^2; $B = 2$ м/с^3.

В случае прямолинейного движения скорость материальной точки при $v_0 = 0$ (условие задачи):

$$v = \int_0^t a\mathrm{d}t. \quad (2)$$

Подставив в формулу (2) выражение (1) и проинтегрировав, получим искомую скорость

$$v = At - \frac{Bt^2}{2}.$$

Искомая координата

$$x = \int_0^t v\mathrm{d}t = \int_0^t \left(At - \frac{Bt^2}{2}\right)\mathrm{d}t = \frac{At^2}{2} - \frac{Bt^3}{6}.$$

Точка изменяет направление движения в момент, когда скорость $v = 0$, т. е.

$$At - \frac{Bt^2}{2} = 0,$$

откуда

$$t = \frac{2A}{B}.$$

Ответ: $v = 3$ м/с; $x = 9$ м; $t_1 = 4$ с.

1.4. Ускорение движущейся прямолинейно материальной точки изменяется по закону $a = A + Bt$, где $A = 9$ м/с^2; $B = -6$ м/с^3. Определите скорость v точки через $t_1 = 4$ с после начала движения, а также координату x и путь s, пройденный точкой за этот промежуток времени.

Дано: $a = A + Bt$; $A = 9$ м/с^2; $B = -6$ м/с^3; $t_1 = 4$ с.

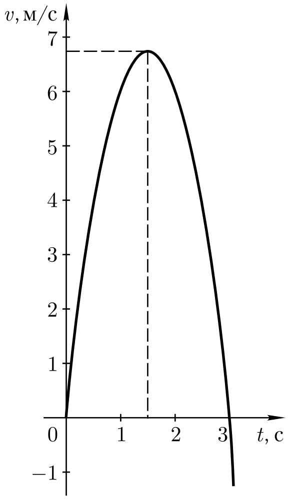
Найти: $v(t_1)$; $x(t_1)$; $s(t_1)$.

Решение. Учитывая, что мгновенное ускорение

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt},$$

можем записать

$$d\vec{v} = \vec{a}\,dt.$$



Проинтегрировав это выражение, получаем

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}dt = \int_0^t \vec{a}dt \qquad (1)$$

(учли, что начальная скорость точки $v_0 = 0$).

Подставив в выражение (1) заданное условием уравнение $a = A + Bt$ и проинтегрировав, получаем

$$v = \int_0^t (A + Bt)dt = At + \frac{Bt^2}{2}. \qquad (2)$$

График зависимости скорости (2) точки от времени — парабола с ветвями, направленными вниз, и с вершиной в точке с координатами $t = -\frac{A}{B} = 1{,}5$ с; $v = -\frac{A^2}{2B} =$ $= 6{,}75$ м/с. Точка пересечения графика с осью абсцисс $t = 3$ с, в этой точке скорость меняет знак, а материальная точка — направление движения. Для момента времени $t = 4$ с скорость $v = -12$ м/с, т. е. точка движется в направлении, противоположном первоначальному (см. рисунок).

Координата материальной точки

$$x = \int_0^t v(t)dt = \int_0^t \left(At + \frac{Bt^2}{2}\right)dt = \frac{At^2}{2} + \frac{Bt^3}{6} \qquad (3)$$

(учли, что в начальный момент времени $x_0 = 0$), откуда при $t_1 = 4$ с координата $x(t_1) = 8$ м.

В момент времени $t = 3$ с точка начинает двигаться в обратную сторону, т. е. ее координата убывает, а длина пути продолжает возрастать по тому же закону, по которому убывает координата. До поворота путь s_1 равен координате x_1 в момент времени $t = 3$ с: согласно (3), $s_1 = 13{,}5$ м. За промежуток времени от $t = 3$ с (координата $x_1(t) = 13{,}5$ м) до $t_1 = 4$ с (координата $x(t_1) = 8$ м) точка прошла в обратном направлении расстояние

$$s_2 = x_1(t) - x(t_1).$$

Весь путь за время $t_1 = 4$ с равен сумме расстояний s_1 (первые три секунды) и s_2 (последняя секунда)

$$s = x_1(t) + x_1(t) - x(t_1).$$

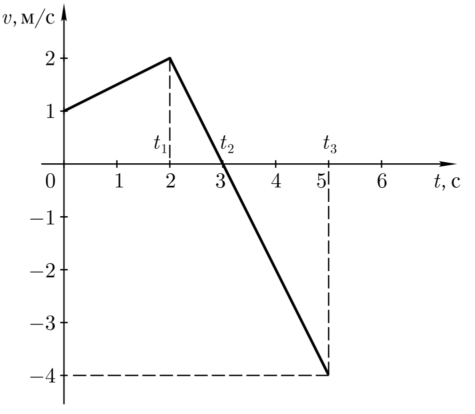
Ответ: $v = -12$ м/с; $x = 8$ м; $s = 19$ м.

1.5. На рисунке представлен график зависимости скорости от времени $v(t)$ для прямолинейно движущейся материальной точки в течение пяти секунд. Нарисуйте графики зависимостей координаты x и ускорения a точки от времени. Определите среднюю скорость точки; $\langle v_1 \rangle$ за первые три секунды движения; $\langle v_2 \rangle$ за первые пять секунд движения.

Дано: $v(t)$; $t = 5$ с.

Найти: $\langle v_1 \rangle$; $\langle v_2 \rangle$.

Решение. Согласно заданному рисунку, движение можно разбить на два этапа: первый — в течение первых двух секунд и второй — начиная с момента времени $t_1 = 2$ с.



а

Первый этап (координата x_1, скорость v_1, ускорение a_1). Скорость растет линейно, движение происходит с постоянным положительным ускорением.

Скорость

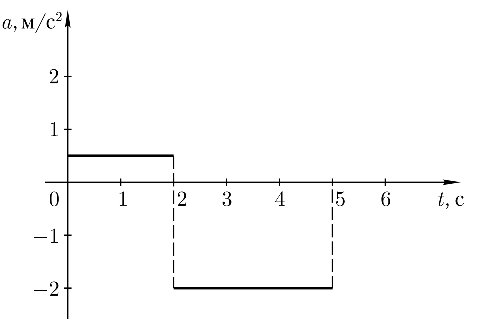
$$v_1 = v_{01} + a_1 t \qquad (1)$$

(начальная скорость $v_{01} = 1$ м/с, рис. *а*).

Ускорение

$$a_1 = \frac{v(t_1) - v(t_0)}{t_1 - t_0} = 0,5 \text{ м/с}^2 \qquad (2)$$

(учли, что $t_1 = 2$ с; $t_0 = 0$).



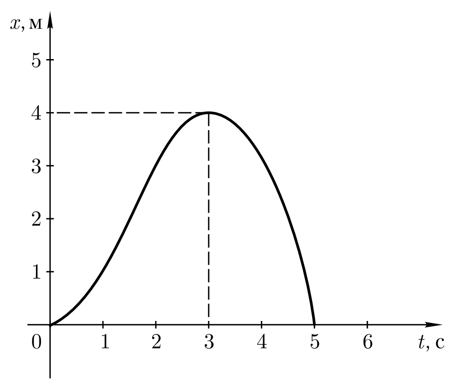
б

Координата

$$x_1 = v_{01} t + \frac{a_1 t^2}{2} \qquad (3)$$

(учли, что $x_{01} = 0$), т. е. график зависимости $x_1(t)$ — парабола, ветви которой направлены вверх ($a_1 > 0$) (координаты вершины $t = -2$ с; $x = -1$ м). По соотношениям (2) и (3) строим участки графиков $a(t)$ и $x(t)$ от $t = 0$ с до $t = 2$ с (рис. *б* и *в*).

Второй этап (координата x_2, скорость v_2, ускорение a_2). Скорость убывает линейно, движение происходит с постоянным отрицательным ускорением, противоположным начальной скорости.



в

Ускорение

$$a_2 = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} = -2 \text{ м/с}^2 \qquad (4)$$

(учли, что $t_2 = 3$ с; $t_1 = 2$ с).

Скорость

$$v_2 = v_{02} + a_2(t - t_1)$$

[в данном случае момент времени t_1 можно принять за начальный; при $t_1 = 2$ с $v_{02} = 2$ м/с, см. рис. *а*, формулу (1)].

Координата

$$x_2 = x_{02} + v_{02}(t - t_1) - \frac{a_2(t - t_1)^2}{2} \qquad (5)$$

[t_1 — начальный момент времени; $v_{02} = 2$ м/с; $x_{02} = 3$ м, см. рис. *а*, а также формулу (3)]. График зависимости $x_2(t)$ — парабола, ветви которой направлены вниз ($a_2 < 0$) (координаты вершины $t = 3$ с; $x = 4$ м). Точка пересечения графика с осью абсцисс $t_3 = 5$ с. По соотношениям (4) и (5) строим участки графиков $a(t)$ и $x(t)$ для $t > t_1$ ($t_1 = 2$ с) (см. рис. *б* и *в*).

Искомая средняя скорость для первых трех секунд движения

$$\langle v_1 \rangle = \frac{x(t_2) - x(t_0)}{t_2 - t_0} = 1{,}33 \text{ м/с}$$

($t_0 = 0$ с; $t_2 = 3$ с; $x(t_0) = 0$; $x(t_2) = 4$ м).

Искомая средняя скорость для первых пяти секунд движения

$$\langle v_2 \rangle = \frac{x(t_3) - x(t_0)}{t_3 - t_0} = 0$$

($t_0 = 0$ с; $t_3 = 5$ с; $x(t_0) = 0$; $x(t_3) = 0$).

Ответ: $\langle v_1 \rangle = 1{,}33$ м/с; $\langle v_2 \rangle = 0$.

1.6. Ускорение прямолинейно движущейся материальной точки возрастает по закону $a = kt$ (k — постоянная) и через промежуток времени $t_1 = 8$ с достигает значения $a_1 = 6$ м/с^2. Определите для момента времени $t_2 = 5$ с: 1) скорость v_2 точки; 2) пройденный точкой путь s_2.

Дано: $a = kt$; $t_1 = 8$ с; $a_1 = 6$ м/с^2; $t_2 = 5$ с.

Найти: 1) v_2; 2) s_2.

Решение. Скорость материальной точки

$$v = \int_0^t a(t)\mathrm{d}t = \int_0^t kt\mathrm{d}t = \frac{kt^2}{2} \qquad (1)$$

(учли, что $a = kt$).

Согласно условию задачи

$$k = \frac{a}{t} = \frac{a_1}{t_1}. \qquad (2)$$

Подставив формулу (2) в выражение (1), искомая скорость для момента времени t_2:

$$v_2 = \frac{a_1 t_2^2}{2t_1}.$$

Путь, пройденный материальной точкой,

$$s = \int_0^t v(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^t \frac{kt^2}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{kt^3}{6}$$

[учли формулу (1)]. Для момента времени t_2 с учетом соотношения (2) получаем

$$s_2 = \frac{a_1 t_2^3}{6t_1}.$$

Ответ: 1) $v_2 = 9{,}38$ м/с^2; 2) $s_2 = 15{,}6$ м.

1.7. Нормальное ускорение точки, движущейся по окружности радиусом $r = 4$ м, задается уравнением $a_n = A + Bt + Ct^2$ ($A = 1$ м/с^2, $B = 6$ м/с^3, $C = 9$ м/с^4). Определите: 1) тангенциальное ускорение точки; 2) путь, пройденный точкой за время $t_1 = 5$ с после начала движения; 3) полное ускорение в момент времени $t_2 = 1$ с.

Дано: $r = 4$ м; $a_n = A + Bt + Ct^2$; $A = 1$ м/с^2; $B = 6$ м/с^3; $C = 9$ м/с^4; $t_1 = 5$ с; $t_2 = 1$ с.

Найти: 1) a_τ; 2) s_1; 3) a_2.

Решение. Тангенциальное ускорение

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}. \tag{1}$$

Нормальное ускорение $a_n = \dfrac{v^2}{r}$. Согласно условию задачи $a_n = A + Bt + Ct^2$, получим

$$v = \sqrt{r(A + Bt + Ct^2)} = \sqrt{4(1 + 6t + 9t^2)} = 2(1 + 3t) = 2 + 6t \tag{2}$$

(учли числовые значения коэффициентов).

Из выражений (1) и (2) искомое тангенциальное ускорение

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2 + 6t) = 6 \text{ м/с}^2. \tag{3}$$

Искомый путь за время t_1:

$$s_1 = \int_0^{t_1} v\,\mathrm{d}t = \int_0^{t_1} (2 + 6t)\,\mathrm{d}t = 2t_1 + 3t_1^2.$$

Полное ускорение точки в момент времени t_2:

$$a_2 = \sqrt{a_{\tau_2}^2 + a_{n_2}^2} = \sqrt{a_\tau^2 + \left(\frac{v^2}{r}\right)^2} = \sqrt{a_\tau^2 + \frac{(2 + 6t_2)^4}{r^2}}$$

[учли, что $a_\tau = \mathrm{const}$ (см. формулу (3))].

Ответ: 1) $a_\tau = 6$ м/с^2; 2) $s_1 = 85$ м; 3) $a_2 = 17{,}1$ м/с^2.