

ТЕМА 3. ОДНОФАЗНЫЕ ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

Основные понятия, определения и законы

Переменным называется ток $i(t)$ (напряжение $u(t)$), изменяющийся во времени по синусоидальному закону:

$$i(t) = I_m \cdot \sin(\omega t + \psi_i), \quad u(t) = U_m \cdot \sin(\omega t + \psi_u)$$

Время, за которое происходит одно полное колебание, называется **периодом** и обозначается буквой T . Число полных колебаний (периодов) в единицу времени называется **частотой** f :

$$f = \frac{1}{T} \quad [\text{Гц}]$$

Синусоидальная функция времени может быть описана вращающимся вектором со скоростью вращения ω . В технике эта величина получила название **угловой частоты** ω :

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad [\text{с}^{-1}] \text{ или } [\text{рад/с}].$$

Из закона Ома для резистора R следует:

$$u_R = R \cdot i = R \cdot I_m \cdot \sin \omega t = U_m \cdot \sin \omega t.$$

Из закона электромагнитной индукции для катушки L следует:

$$u_L = -e = L \frac{di}{dt} = \omega L \cdot I_m \cdot \cos \omega t = U_m \cdot \sin(\omega t + 90^\circ).$$

Из закона сохранения заряда для конденсатора C следует:

$$u_C = \frac{1}{C} \int i \cdot dt = -\frac{I_m}{\omega C} \cos \omega t = U_m \cdot \sin(\omega t - 90^\circ).$$

$$U_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} U_m \cdot \sin \omega t \, dt = \frac{2U_m}{\omega T} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \omega t \cdot d(\omega t) = \frac{2U_m}{\frac{2\pi}{T}} \left| -\cos \omega t \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2U_m}{\pi} \approx 0,637 U_m$$

$$I_{\text{cp}} = \frac{2I_m}{\pi} \approx 0,637 I_m$$

Действующее значение переменного напряжения определяется как среднеквадратичное значение функции за период:

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u(t)^2 \, dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T U_m^2 \sin^2 \omega t \cdot dt} = \sqrt{\frac{U_m^2}{T} \int_0^T \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\omega t \right) dt} = \sqrt{\frac{U_m^2}{T} \cdot \frac{1}{2} T} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \approx 0,707 U_m$$

Полная мощность:

$$P = UI \cos \varphi, S = \sqrt{P^2 + Q^2}; P = S \cos \varphi; \cos \varphi = P/S; Q = S \sin \varphi; \sin \varphi = Q/S;$$

$$\operatorname{tg} \varphi = Q/P.$$

Добротность контура:

$$Q = \frac{U_L}{U_{ex}} = \frac{U_C}{U_{ex}} = \frac{X_L I}{RI} = \frac{X_L}{R}.$$

Математические выражения			
Мгновенное значение синусоидальной функции времени	Формы записи комплексных величин		
	показательная	тригонометрическая	алгебраическая
1. $e = E_m \sin \omega t = 84,6 \sin \omega t$ В	$\underline{E} = Ee^{j\psi} = 60e^{j0} = 60$ В, здесь $\psi = 0$	$\underline{E} = E(\cos \psi + j \sin \psi) = 60(\cos 0 + j \sin 0) = 60$ В	$\underline{E} = E' + jE'' = 60$ В, $E' = E \cos \psi = 60$ В, $E'' = E \sin \psi = 0$
2. $e = E_m \cos \omega t =$ $= E_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) =$ $= 84,6 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$ В	$\underline{E} = Ee^{j\frac{\pi}{2}} = 60e^{j\frac{\pi}{2}}$ В	$\underline{E} = E \left(\cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2} \right) = 60(0 + j1) = j60$ В	$\underline{E} = E' + jE'' = j60$ В, $E' = E \cos \frac{\pi}{2} = 0,$ $E'' = E \sin \frac{\pi}{2} = 60$ В
3. $e = E_m \sin \left(\omega t \pm \frac{\pi}{6} \right) =$ $= 84,6 \sin \left(\omega t \pm \frac{\pi}{6} \right)$ В	$\underline{E} = Ee^{\pm j\frac{\pi}{6}} = 60e^{\pm j\frac{\pi}{6}}$ В	$\underline{E} = E \left(\cos \frac{\pi}{6} \pm j \sin \frac{\pi}{6} \right) = 60 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \pm j \frac{1}{2} \right) = 30(\sqrt{3} \pm j)$ В	$\underline{E} = E' \pm jE'' = 30(\sqrt{3} \pm j)$ В, $E' = E \cos \frac{\pi}{6} = 30\sqrt{3}$ В, $E'' = E \sin \frac{\pi}{6} = 30$ В
4. $e = E_m \sin \left(\omega t \pm \frac{2\pi}{3} \right) =$ $= 84,6 \sin \left(\omega t \pm \frac{2\pi}{3} \right)$ В	$\underline{E} = Ee^{\pm j\frac{2\pi}{3}} = 60e^{\pm j\frac{2\pi}{3}}$ В	$\underline{E} = E \left(\cos \frac{2\pi}{3} \pm j \sin \frac{2\pi}{3} \right) = 60 \left(-\frac{1}{2} \pm j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -30 \pm j30\sqrt{3} = (-30 \pm j51,9)$ В	$\underline{E} = E' \pm jE'' = (-30 \pm j51,9)$ В, $E' = E \cos \frac{2\pi}{3} = 30$ В, $E'' = E \sin \frac{2\pi}{3} = 51,9$ В

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «ОДНОФАЗНЫЕ ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА»

Задача 3.1. Индуктивность 100 мГн включена последовательно с активным сопротивлением 10 Ом. Мгновенное значение напряжения на активном сопротивлении $u_R = 50 \sin(314t + 30^\circ)$. Определить мгновенные значения тока и напряжения на катушке, действующие значения тока и напряжения на активном сопротивлении и катушке, а также активную, реактивную и полную мощности. Построить векторную диаграмму тока и напряжения.

Дано:

$$L = 100 \text{ мГн} = 100 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}$$

$$R = 10 \text{ Ом}$$

$$u_R = 50 \sin(314t + 30^\circ)$$

$$I - ? \quad U - ?$$

$$U_L - ? \quad U_R - ?$$

$$S - ? \quad P - ? \quad Q - ?$$

Решение:

Из уравнения $U_m = 50 \text{ В}$, $\omega = 314 \text{ рад/с}$,
 $\psi_{uR} = 30^\circ$.

Так как соединение последовательное, то:

$$i = i_R = u_R/R$$

$$i = 5 \sin(314t + 30^\circ), \text{ А}$$

$$u_L = U_{mL} \sin(\omega t + \psi_{uL}), \quad \psi_{uL} = \psi_{iL} + 90^\circ = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ.$$

$$U_{mL} = I_m \cdot X_L = I_m \cdot L\omega = 5 \cdot 0,1 \cdot 314 = 157 \text{ В.}$$

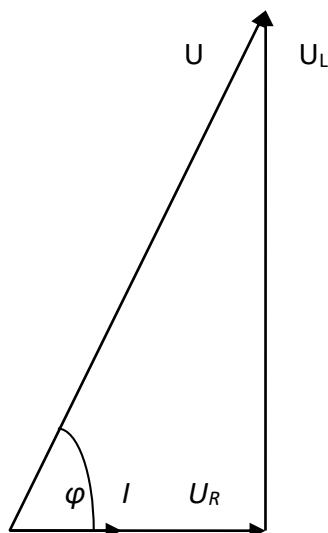
$$u_L = 157 \sin(314t + 120^\circ), \quad U_R = \frac{U_{mR}}{\sqrt{2}} = \frac{50}{\sqrt{2}} = 35,4 \text{ В,}$$

$$U_L = \frac{U_{mL}}{\sqrt{2}} = \frac{157}{\sqrt{2}} = 111,3 \text{ В, } I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = 3,54 \text{ А, } U = \sqrt{U_R^2 + U_L^2} = 116,7 \text{ В}$$

$$P = I^2 \cdot R = 125,3 \text{ Вт, } Q = I^2 \cdot X_L = 393,4 \text{ вар}$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 412,8 \text{ ВА, } \varphi = \arccos \frac{P}{S} = \arccos 0,3 = 72,3^\circ$$

Построим векторную диаграмму:



Задача 3.2. В цепь включено активное сопротивление 120 Ом и конденсатор емкостью 30 мкФ. Мгновенное напряжение изменяется по закону: $u = 311 \sin(314t)$, В. Определить полное сопротивление цепи, действующие и мгновенные значения напряжения и тока на конденсаторе и активной нагрузке. Активную, реактивную и полную мощность.

Дано:

$$R = 120 \text{ Ом}$$

$$C = 30 \text{ мкФ} = 30 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$$

$$u = 311 \sin(314t) \text{ В}$$

$$Z - ? X_C - ? U - ? I - ?$$

$$U_C - ? U_R - ?$$

$$P - ? Q - ? S - ?$$

Решение:

Емкостное сопротивление

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{30 \cdot 10^{-6} \cdot 314} = 106 \text{ Ом},$$

где C – емкость конденсатора, ω – циклическая частота.

Полное сопротивление цепи переменного тока

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{120^2 + 106^2} = 160 \text{ Ом}$$

Действующее значение напряжение

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{311}{\sqrt{2}} = 220 \text{ В},$$

где U_m – амплитудное значение напряжения.

По закону Ома для цепи переменного тока

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{220}{160} = 1,37 \text{ А}$$

Напряжение на активной нагрузке и конденсаторе

$$U_R = I \cdot R = 165 \text{ В}, \quad U_C = I \cdot X_C = 145 \text{ В}.$$

Определим мгновенные и амплитудные значения силы тока:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i), \quad \varphi = \arctg(-X_C/R) = -41,5^\circ$$

$$\varphi = \psi_u - \psi_i; \quad \psi_i = \psi_u - \varphi = 0 - (-41,5) = 41,5^\circ$$

$$I_m = I \cdot \sqrt{2} = 1,93 \text{ А}$$

$$i = 1,93 \sin(314t + 41,5), \text{ А}$$

$$u_R = iR = 231,6 \sin(314t + 41,5), \text{ В}$$

$$u_C = U_{mC} \sin(\omega t + \psi_{uC}), \quad \psi_{uC} = \psi_i - 90^\circ = 41,5 - 90 = -48,5^\circ$$

$$U_{mC} = U_C \cdot \sqrt{2} = 204,5 \text{ В}.$$

$$u_C = 204,5 \sin(314t - 48,5).$$

$$P = I^2 \cdot R = 226 \text{ Вт}, \quad Q = I^2 \cdot X_C = 210 \text{ вар}, \quad S = IU = 301,4 \text{ ВА}.$$

Задача 3.3. В электрической цепи однофазного синусоидального тока определить: 1) полное сопротивление электрической цепи и его характер; 2) действующие значения токов в ветвях; 3) показания вольтметра и ваттметра; 4) построить векторную диаграмму токов и напряжений для всей цепи.

Дано:

$$E = 130 \text{ В}$$

$$f = 50 \text{ Гц}$$

$$R_1 = 9 \text{ Ом}$$

$$L_1 = 15,9 \text{ мГн} = 15,9 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}$$

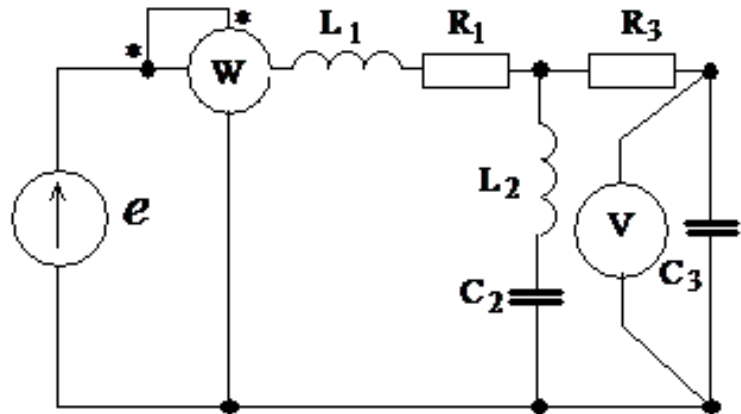
$$C_2 = 318 \text{ мкФ} = 318 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$$

$$L_2 = 9,4 \text{ мГн} = 9,4 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}$$

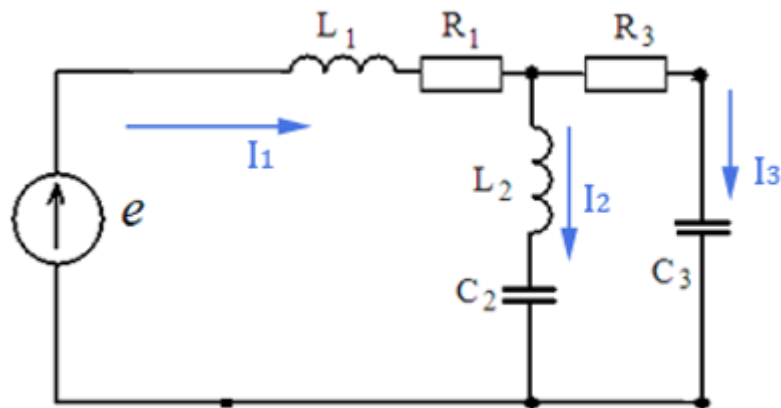
$$R_3 = 8 \text{ Ом}$$

$$C_3 = 500 \text{ мкФ} = 500 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$$

Решение:



Выбираем произвольные направления токов в ветвях. Изобразим схему замещения:



Циклическая частота цепи:

$$\omega = 2\pi f = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 = 314 \text{ рад/с};$$

Сопротивления реактивных элементов:

$$X_{L1} = \omega L_1 = 314 \cdot 15,9 \cdot 10^{-3} = 4,99 \text{ Ом};$$

$$X_{C2} = 1/(\omega C_2) = 1/(314 \cdot 318 \cdot 10^{-6}) = 10,01 \text{ Ом};$$

$$X_{L2} = \omega L_2 = 314 \cdot 9,4 \cdot 10^{-3} = 2,95 \text{ Ом};$$

$$X_{C3} = 1/(\omega C_3) = 1/(314 \cdot 500 \cdot 10^{-6}) = 6,37 \text{ Ом};$$

Общее сопротивление цепи:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{\text{вх}} &= R_1 + jX_{L1} + \frac{j(X_{L2} - X_{C2}) \cdot (R_3 - jX_{C3})}{R_3 + j(X_{L2} - X_{C2} - X_{C3})} = \\ &= 9 + 4,99j + \frac{j \cdot (2,95 - 10,01) \cdot (8 - 6,37j)}{8 + j \cdot (2,95 - 10,01 - 6,37)} = 10,632 + 0,669j \text{ Ом}; \end{aligned}$$

Характер входного сопротивления активно-индуктивный, на это указывает наличие действительной части и положительная мнимая часть сопротивления.

Комплекс действующего значения входного напряжения:

$$E = E \cdot (\cos\varphi + j\sin\varphi) = 130 \cdot (\cos 0^\circ + j\sin 0^\circ) = 130 \text{ В};$$

Действующие комплексные токи в цепи:

$$I_1 = E / Z_{\text{вх}} = 130 / (10,632 + 0,669j) = 12,179 - 0,767j = 12,203 \cdot e^{(-4j)} \text{ А};$$

$$I_2 = I_1 \cdot ((R_3 - jX_{C3}) / (R_3 + j(X_{L2} - X_{C2} - X_{C3}))) = (12,179 - 0,767j) \cdot (8 - 6,37j) / (8 + j(2,95 - 10,01 - 6,37)) = 7,631 + 2,346j = 7,983 \cdot e^{(17j)} \text{ А};$$

$$I_3 = I_1 - I_2 = 12,179 - 0,767j - 7,631 - 2,346j = 4,548 - 3,113j = 5,511 \cdot e^{(-35j)} \text{ А};$$

Падения напряжения на элементах:

$$U_{L1} = I_1 \cdot jX_{L1} = (12,179 - 0,767j) \cdot 4,99j = 3,83 + 60,77j \text{ В};$$

$$U_{R1} = I_1 \cdot R_1 = (12,179 - 0,767j) \cdot 9 = 109,61 - 6,90j \text{ В};$$

$$U_{L2} = I_2 \cdot jX_{L2} = (7,631 + 2,346j) \cdot 2,95j = -6,92 + 22,51j \text{ В};$$

$$U_{C2} = I_2 \cdot (-jX_{C2}) = (7,631 + 2,346j) \cdot (-10,01j) = 23,48 - 76,39j \text{ В};$$

$$U_{R3} = I_3 \cdot R_3 = (4,548 - 3,113j) \cdot 8 = 36,38 - 24,90j \text{ В};$$

$$U_{C3} = I_3 \cdot (-jX_{C3}) = (4,548 - 3,113j) \cdot (-6,37j) = -19,83 - 28,97j = 35,11 \cdot e^{(-124j)} \text{ В};$$

Показания вольтметра (измеряющего действующее значение напряжения):

$$U_V = U_{C3} = 35,11 \text{ В};$$

Показания ваттметра (измеряющего активную мощность):

$$P_w = \text{Re}(E \cdot I_1^*) = \text{Re}(130 \cdot (12,179 + 0,767j)) = 1583,3 \text{ Вт};$$

I^* - сопряженный ток. Например, если $I = a + jb$, то $I^* = a - jb$;

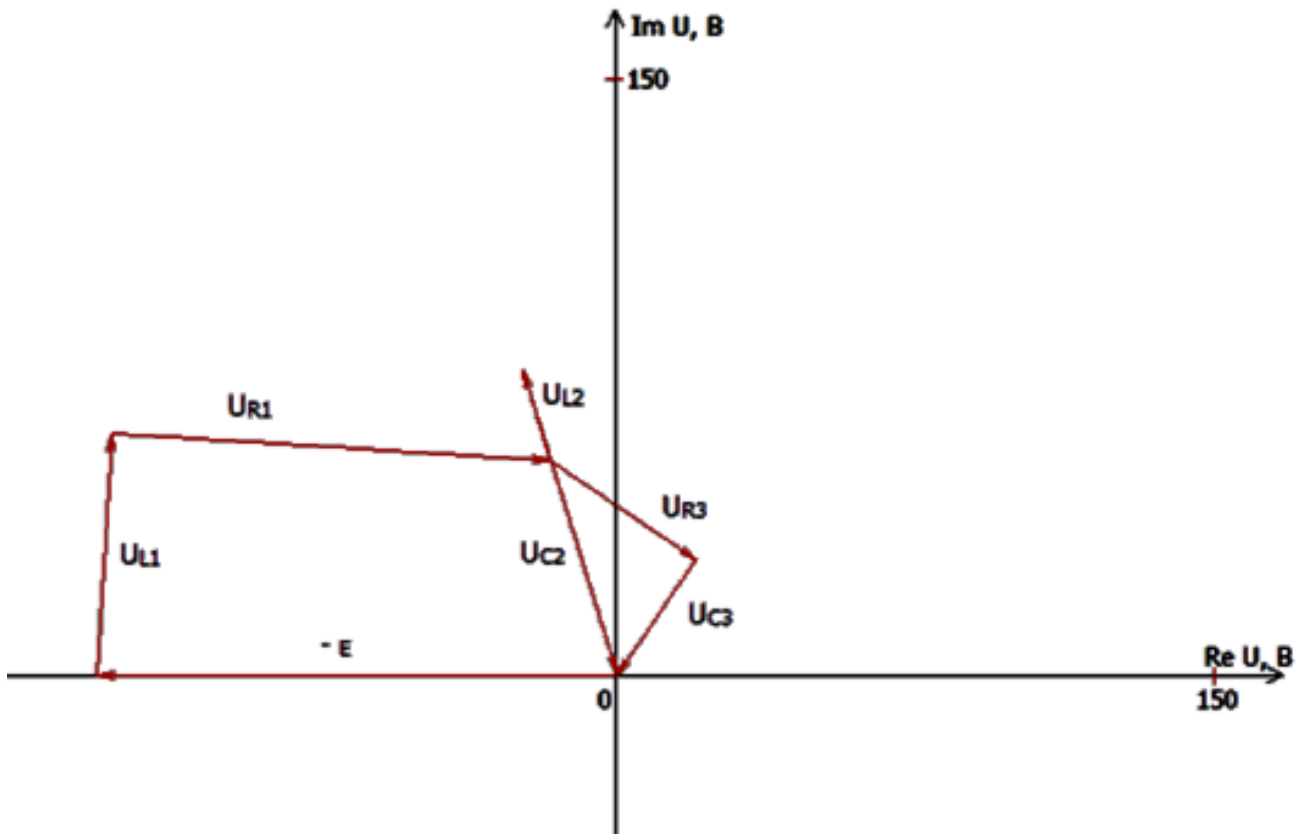
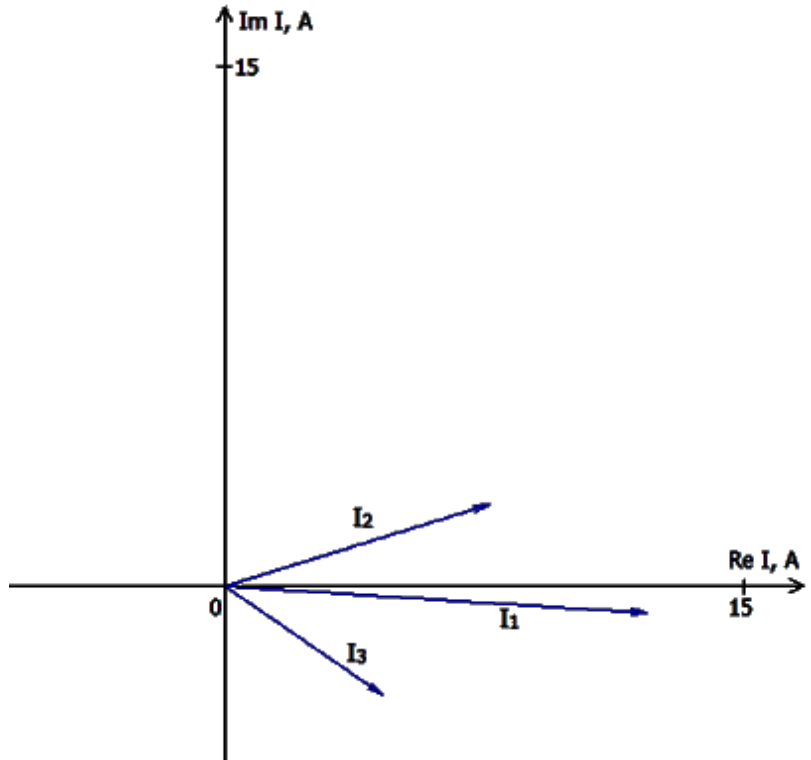


Рис. Векторная диаграмма напряжений



Векторная диаграмма токов

Задачи для самостоятельного решения

3.1. Определить угловую частоту вращения Ω_p ротора генератора переменного тока при частоте питающего напряжения $f = 50$ Гц и угловую частоту ω ЭДС, если ротор вращается с частотой $n_1 = 1000$ об/мин.

3.2. Для синусоидального напряжения и тока (рис. 3.1) записать выражения для мгновенных их значений. Определить период T и время t_0 , соответствующее начальной фазе тока ψ_i , а также мгновенные значения напряжений u_1 и u_2 для моментов времени $t_1 = 0,00167$ с и $t_2 = 0,005$ с, если частота тока $f=50$ Гц.

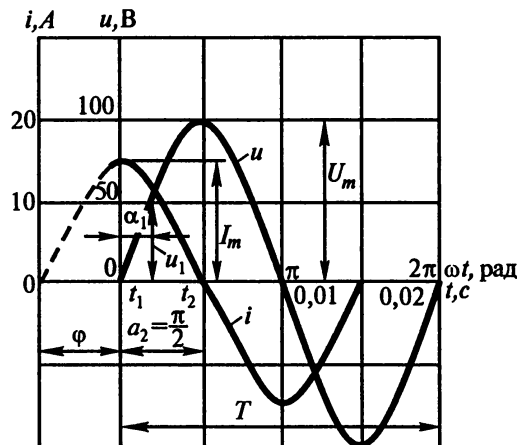


Рис.3.1. К задаче 3.2.

3.3. Напряжение и ток пассивного двухполюсника равны $\dot{U} = (20 + j40)\text{В}$, $\dot{I} = (5 + j3)\text{А}$. Построить векторную диаграмму на комплексной плоскости. Найти мгновенные напряжение и ток.

3.4. Заданы комплексные действующие значения напряжений и токов цепи:

а) $\dot{U} = (-20 + j40)\text{В}$ и $\dot{I} = (-5 + j3)\text{А}$,

б) $\dot{U} = (-20 - j40)\text{В}$ и $\dot{I} = (-5 - j3)\text{А}$,

в) $\dot{U} = (20 - j40)\text{В}$ и $\dot{I} = (5 - j3)\text{А}$,

г) $\dot{U} = (20 - j40)\text{В}$ и $\dot{I} = (-5 - j3)\text{А}$.

Записать выражения для мгновенных токов и напряжений.

3.5. В сеть напряжением $U=120\text{ В}$ и частотой $f = 50\text{ Гц}$ включена индуктивная катушка сопротивлением $R = 12\text{ Ом}$ и индуктивностью $L = 66,2\text{ мГн}$. Ее последовательная схема замещения изображена на рис.3.2. Определить комплексный ток, значения полной, активной и реактивной мощностей. Построить топографическую диаграмму напряжений, треугольники сопротивлений и мощностей.

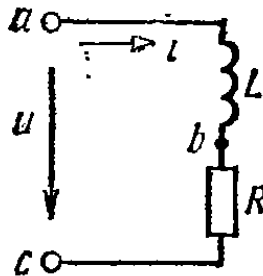


Рис.3.2. К задаче 3.5

3.6. При замкнутом и разомкнутом выключателе В в цепи (рис.3.3) амперметр показывает одно и тоже значение тока $I=5,55\text{ А}$. Определить сопротивление R и X_L цепи, если напряжение источника питания $U=100\text{ В}$, частота $f=50\text{ Гц}$, а емкость конденсатора $C=159\text{ мкФ}$.

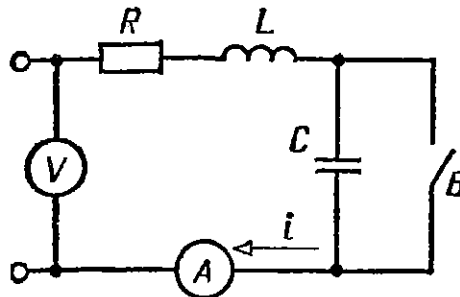


Рис.3.3. К задаче 3.6.

3.7. При дуговой электросварке на переменном токе дуга развивает мощность $P_d = 600\text{Вт}$ при потребляемом токе $I=20\text{ А}$ (рис. 3.4). Напряжение источника питания $U= 120\text{ В}$, частота тока $f= 50\text{ Гц}$. Для уменьшения напряжения дуги включена катушка индуктивности, активное сопротивление которой $R_k=1\text{ Ом}$. Найти индуктивность L катушки, величину активного R сопротивления, которое могло бы эту катушку заменить, коэффициент мощности $\cos\varphi$, а также КПД η установки при наличии активного сопротивления, заменяющего катушку. Построить векторную диаграмму тока и напряжений.

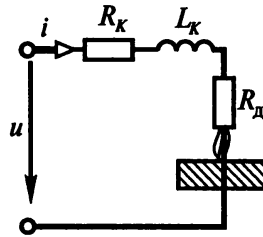


Рис. 3.4. К задаче 2.7.

3.8. В сеть переменного тока параллельно катушке индуктивности включены конденсатор и резистор, соединенные между собой последовательно (рис. 3.5). Определить ток I_1 , в ветви конденсатора, ток I_2 в ветви катушки и общий ток в цепи I , построить векторную диаграмму напряжений и токов, если напряжение источника питания $\underline{U}=U= 200\text{В}$, а активные и реактивные сопротивления: $R_1 = 3\text{ Ом}$; $R_2 = 8\text{ Ом}$; $X_1=4\text{ Ом}$; $X_2 = 6\text{ Ом}$.

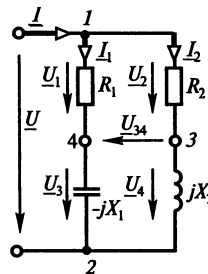


Рис.3.5. К задаче 3.8

3.9. Приемник электрической энергии (рис.3.6) имеет следующие паспортные данные: номинальное напряжение $U_{\text{ном}}=220\text{ В}$, номинальную мощность $P_{\text{ном}}=1,2\text{ кВт}$, номинальный коэффициент мощности $\cos\varphi_{\text{ном}}=0,455$. Определить емкость и мощность батареи конденсаторов, которую нужно включить параллельно приемнику, чтобы повысить коэффициент мощности установки до 0,91.

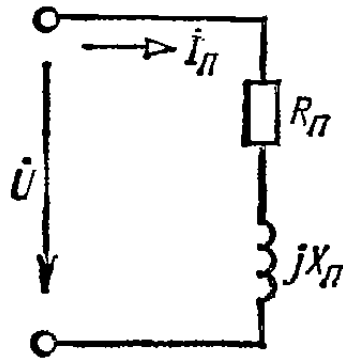


Рис.3.6.

3.10. Потребитель, состоящий из последовательно включенных катушки и резистора 25 Ом, подключен к источнику постоянного тока напряжением 27 В. При этом ток в цепи $I=0,7$ А. Затем тот же потребитель подключают к источнику переменного тока с действующим значением напряжения $U=127$ В, в этом случае ток $I=2$ А. Определить полное, активное и реактивное сопротивления катушки, полное сопротивление цепи, фазовый сдвиг между напряжением и током в катушке. Построить треугольник сопротивлений и треугольник мощностей.

3.11. Мгновенное значение напряжения на катушке $u=12\sin(2512t-5^\circ)$ В. Отношение $X_L/R_k=2,3$, полная потребляемая мощность $S=100$ В·А. Определить полное, активное, реактивное сопротивление катушки, ее индуктивность, активную и реактивную мощности. Записать выражение для мгновенных значений тока и наведенной ЭДС. Построить векторную диаграмму для момента времени $t=0$.

3.12. Разветвленная электрическая цепь однофазного тока, питающаяся напряжением $U=124$ В (рис. 3.7), состоит из трех ветвей, соединенных параллельно, измерительных приборов и выключателей $B_x — B_y$. Для определения параметров цепи вначале: а) включили резистор R и произвели замер тока I и мощности P при отключенных катушке индуктивности L и конденсаторе C .

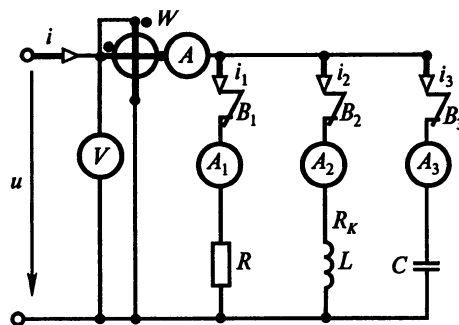


Рис.3.7. К задаче 3.9

Затем произвели аналогичные замеры при включении только: б) катушки; в) конденсатора; г) резистора и катушки; д) резистора и конденсатора. После этих замеров: е) включили катушку и конденсатор и, изменяя величину емкости C конденсаторов, записали показания приборов с таким расчетом, чтобы получить токи до и после резонанса, а также при резонансе, который определялся по наименьшему общему току I цепи (табл.3). Определить параметры катушки индуктивности и конденсатора цепи, построить векторную диаграмму токов и напряжения и кривые изменения тока I , общего коэффициента мощности $\cos\phi$, полного сопротивления Z цепи в зависимости от емкости C конденсатора.

Таблица 3

Пункты задания	Измерения				P, Вт	
	I , А	I_1 , А	I_2 , А	I_3 , А		
а)	1,21	1,21	0	0	150	
б)	2,25	0	2,25	0	56,2	
		0	0	0,98		
в)	0,98	1,21	2,25	0	0	
г)	2,75	1,21	—	1	209	
д)	1,61	0	2,28	0,39	150	
	е)	2,48	0	2,28	1,7	65
		0,68	0	2,28	215	65
		0,55	0	2,28	2,25	65
		0,52	0	2,28	4,12	65
		2,13	0	2,28		65