1-е занятие (1_cvicenie (1).pdf) 【6†source】

Задача 1

При разработке нового программного обеспечения для обработки данных важно, чтобы скрипты для обработки данных были быстрыми и эффективными. Чтобы проверить производительность нового скрипта, который анализирует большие файлы, случайным образом выбрали набор тестов. Во время тестирования были зафиксированы времена обработки файлов в секундах. Следующая таблица содержит результаты для 16 запусков скрипта:

- Образец i: 1, 2, 3, ..., 16
- Время в секундах: 34, 36, 36, 48, 49, 49, 50, 50, 50, 50, 52, 52, 52, 52, 55, 57

Предположим, что указанные данные дискретно распределены.

a) Постройте столбчатую диаграмму и нарисуйте эмпирическую функцию распределения времени обработки.

b) Рассчитайте следующие эмпирические характеристики: эмпирическое среднее, медиану, 0,2-квантиль и 0,8-квантиль, диапазон значений, дисперсию и стандартное отклонение. Предоставьте краткую интерпретацию вычисленных характеристик.

Задача 2

Чтобы обеспечить достаточно быструю реакцию, измерялись времена отклика n = 100 серверов в экстремальных условиях (высокая нагрузка, большое количество запросов и т. д.). Времена отклика находились в диапазоне от 10 до 40 миллисекунд (мс). Этот диапазон был разделен на интервалы шириной 5 мс. В следующей таблице представлены результаты, где Hi — абсолютная частота интервала, а hi — относительная частота интервала:

- Интервалы: (10, 15], (15, 20], (20, 25], (25, 30], (30, 35], (35, 40]

- Hi: 10, 16, 36, 23, 10, 5

a) Рассчитайте эмпирическое среднее, дисперсию и стандартное отклонение.

b) Постройте столбчатую диаграмму и нарисуйте эмпирическую функцию распределения.

c) В каком интервале находится 0,3-квантиль?

Задача 3

Три выборки объемами 20, 30 и 50 объединены в одну общую выборку объемом 100. Средние значения этих выборок составляют 14, 12 и 16. Каково среднее значение всей выборки?

Задача 4

Пусть Ω — множество всех студентов Университета Коменского. Z — множество всех студенток, M — множество студентов. Все те, кто записан на технические программы, включены в множество I. Кроме того, E — множество студентов, которые не любят еду в столовой, а P — множество тех, кто работает параллельно с учебой. Определите (или переведите на обычный язык):

a) $\Omega \setminus M$

b) $Z \cup P$

c) $M \cap E$

d) $I \cap (E \cap P)$

e) $Z \setminus E$

f) $M \setminus (I \cap P)$

Задача 5 (домашняя работа)

Рассмотрим двойное бросание кубика и события:

A: "Первый бросок — пятерка"

B: "Сумма очков на обоих бросках не превышает пять"

C: "Второй бросок имеет больше очков, чем первый"

a) Определите множество элементарных событий Ω и события A, B, и C.

b) Определите A ∩ B, B \ C и A ∩ C.

c) Опишите словами противоположные события для A, B и C.

d) Опишите событие B \ C в понятной форме.

Задача 6

Игровое поле рулетки состоит из 37 полей, которые разделены на три цвета: красный, черный и зеленый. Каждое поле имеет одно число из множества {0, 1, 2, ..., 36}:

- Числа на красных полях: R = {1, 3, 5, 7, 9, 12, 14, 16, 18, 19, 21, 23, 25, 27, 30, 32, 34, 36}.
- Числа на черных полях: B = {2, 4, 6, 8, 10, 11, 13, 15, 17, 20, 22, 24, 26, 28, 29, 31, 33, 35}.
- Числа на зеленом поле: G = {0}.

Во время игры вы ставите одинаковую сумму на красное и на четные числа. Значит, если шарик попадает на черное нечетное число или на ноль, вы проигрываете (ноль не считается ни четным, ни нечетным числом). Упрощенно, если вы выигрываете, вы получаете свою ставку вдвое больше. Определите комбинацию множеств для следующих событий и выпишите соответствующие числа:

a) Вы проигрываете всю ставку.

b) У вас нет прибыли.

c) У вас нет убытка.

d) У вас нет ни прибыли, ни убытка.

e) Вы выигрываете.

2-е занятие (2_cvicenie (1).pdf)【7†source】

Задача 1

Пусть данный прибор состоит из трех компонентов, которые не влияют друг на друга в своей работе. Это можно считать случайным экспериментом, который описывается следующим образом: каждое элементарное событие задается тройкой (a, b, c). Например, тройка (0, 0, 1) описывает ситуацию, когда первые два компонента не работают, а только третий работает.

- Ak: "k-й компонент работает" (k = 1, 2, 3)
- Dj: "ровно j компонентов работают" (j = 0, 1, 2, 3)
- E: "как минимум два компонента работают".

a) Определите множество элементарных событий Ω.

b) Составляют ли события Dj для j = 0, 1, 2, 3 разбиение пространства результатов Ω? Определите множества D0, D1, D2, D3.

c) Выразите события Dj (j = 0, 1, 2, 3) и E через события Ak (k = 1, 2, 3).

d) Пусть $P(A1) = 0.8$, $P(A2) = 0.9$, $P(A3) = 0.6$. Поскольку компоненты не влияют друг на друга, выполняется:

$P(Ai \cap Aj) = P(Ai) \cdot P(Aj)$ для всех $i, j \in \{1, 2, 3\}$, где $i \neq j$.

Рассчитайте с использованием (c) вероятности $P(Dj)$ ($j = 0, 1, 2, 3$) и $P(E)$.

Задача 2

Рассмотрим шестигранный игральный кубик. Этим кубиком бросают дважды, и полученные значения обозначены как X и Y.

a) Рассчитайте вероятность для событий A и B:

- A: $X = Y$
- B: $\min(X, Y) \leq 2$

b) Проверьте, являются ли события C, D и E стохастически независимыми от события S: $X = 5$:

- C: $Y \geq 5$
- D: $X + Y = 9$
- E: $X = Y$

Задача 3

Рассмотрим урну с 4 зелеными и 3 красными шарами. Из урны достают шар дважды с возвращением. Рассмотрим следующие результаты:

- A: "Первый шар зеленый"
- B: "Первый и второй шары одинакового цвета"

- C: "Второй шар красный"

Являются ли события A и B, а также A и C (стохастически) независимыми? Определите вероятности P(A), P(B) и P(C) и используйте формулу стохастической независимости, чтобы обосновать свои утверждения.

Задача 4

Сотрудник компании получает 80% спам-писем. Его фильтр не всегда может правильно различить спам и не спам. Он помечает спамовое письмо с вероятностью 90% как спам. К сожалению, также помечает и не спам с вероятностью 1% как спам. Ответьте на следующий вопрос: если сотрудник получает письмо, помеченное как спам, какова вероятность того, что это письмо на самом деле не спам? Постройте соответствующую древовидную диаграмму.

Задача 5

Дан набор из 32 карт, в котором точно 4 туза. Карты вытаскивают три раза подряд без возврата. Рассматриваются следующие события:

- Ak: k-е вытаскивание — туз
- Ak: k-е вытаскивание — не туз

Постройте соответствующую древовидную диаграмму со всеми вероятностями.

a) Объясните правило умножения с помощью дерева.

b) Какова вероятность того, что будут вытянуты три туза подряд?

c) Какова вероятность того, что первая и третья вытянутые карты будут тузами?