

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

### Исследование временных характеристик линейных непрерывных систем автоматического управления

**1. Цель работы.** Изучить способы построения временных характеристик типовых звеньев линейных систем управления в пакете MathCAD.

#### 2. Краткие теоретические сведения

Временные характеристики, которые описываются переходной и весовой функциями, характеризуют динамический режим работы элемента (звена) объекта или системы управления.

Динамическим называется режим работы элемента системы, при котором входная и выходная величины его изменяются во времени.

Так как динамический режим возникает в результате перехода элемента от одного установившегося состояния к другому, то его часто называют переходным режимом, а процесс перехода от одного установившегося состояния к другому - переходным процессом.

Зависимость выходной величины элемента от изменяющейся во времени входной величины называют его динамической характеристикой.

Частным случаем динамических характеристик являются так называемые временные характеристики - зависимости выходной величины элемента системы автоматики от времени, если входная величина изменяется по некоторому типовому (стандартному) закону, например, импульсом или линейно и т.п.

##### 2.1. Переходная характеристика

Из временных характеристик наиболее часто в ТАУ используется переходная характеристика объекта, которая определяет реакцию объекта на действие простейшего стандартного сигнала – так называемый «единичный скачок» («единичный ступенчатый сигнал»), то есть мгновенное изменение входного сигнала с 0 до 1 в момент  $t = 0$ . Математически этот сигнал определяется выражением

$$l(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < 0; \\ 1, & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Графически такая функция времени показана ниже.

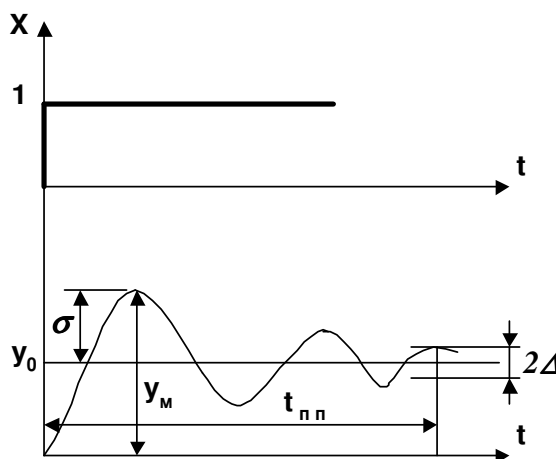
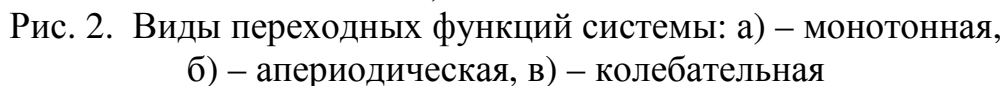


Рис. 1. Переходная функция системы

Если начальные условия ненулевые, то для построения сигнала выхода при любом входе нужно использовать дифференциальные уравнения объекта или его модель в пространстве состояний. Это значит, что переходная характеристика дает меньше информации, чем исходные дифференциальные уравнения объекта.



С использованием переходной функции вводятся так называемые **первичные показатели качества систем** управления.

Время, в течение которого выходная величина после начала изменения входной достигает нового установившегося значения, называют временем переходного процесса. Однако теоретически это время стремиться к бесконечности. Поэтому за время переходного процесса принимают время  $t_{nn}$  после начала изменения входной величины, за которое выходная величина достигает нового установившегося значения с заданной степенью точности  $\Delta$ . Степень точности задается заранее и обычно не превышает 3-5% от нового установившегося значения – см. рис. 1.

Статическая ошибка представляет собой разность между значением выходной величины  $y_i$  в момент времени  $t_i \geq t_{nm}$  (после окончания переходного процесса) и её новым установившемся значением  $y_0 = y_{зад}$ , т.е

$$\Delta = y(t_i) - y_0, \quad t_i \geq t_{nn}.$$

Очевидно, что статическая ошибка является некоторой константой, которая характеризует точность работы САУ.

### 3. Динамическая ошибка, перерегулирование

Динамическая ошибка - это разность между действительным значением выходной величины  $y_i$  в данный момент времени  $t_i$  и её новым установившемся значением  $y_0$ , т.е

$$\Delta y_i = y_i - y_0.$$

Очевидно, что динамическая ошибка представляет собой функцию времени.

Максимальную положительную относительную ошибку за время переходного процесса называют *перерегулированием*  $\sigma$ :

$$\sigma = \frac{y_m - y_0}{y_0} \cdot 100\%,$$

здесь (см. рис. 1)  $y_m$  - максимальное значение,  $y_0$  - новое установившееся значение выходной величины.

### 4. Колебательность.

Колебательность  $\mu$  - количество полных колебаний за время переходного процесса. Колебательность может характеризоваться частотой или периодом колебаний выходной величины.

В соответствии с определением переходная функция  $h(t)$  находится решением дифференциального уравнения системы управления при нулевых начальных условиях и входном сигнале  $x(t)=I(t)$ .

Например, на рис. 3. показано определение в пакете MathCAD переходной функции апериодического звена с передаточной функцией  $W(p) = K/(Tp + 1)$  как решение соответствующего дифференциального уравнения.

Сначала решение определяется аналитически с использованием преобразования Лапласа по формуле

$$h(t) = L^{-1} \left[ W(p) \frac{1}{p} \right]. \quad (1)$$

Отметим, что здесь выражение  $1/p$  описывает изображение Лапласа единичной ступенчатой функции  $L[1(t)] = 1/p$ . Подробное описание применения компьютерной математики MathCAD в области изображения Лапласа смотри в лабораторной работе №3.

Далее приводится нахождение переходной функции непосредственно численным решением дифференциального уравнения.

Определение переходной функции моделированием

Given

$$\begin{aligned} & x(0) = 0 \\ x &:= \text{Odesolve}(t, 10, 1000) \\ T \cdot \left( \frac{d}{dt} x(t) \right) + x(t) &= K \cdot \Phi(t) \end{aligned}$$

## 2.2. Весовая (импульсная) функция

Переходя к рассмотрению другой не менее распространенной временной

характеристикой системы управления – весовой (импульсной) функции, предварительно отметим, что с использованием ранее рассмотренной переходной функции  $h(t)$  решение линейного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами  $a_i, b_i$

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t). \quad (2)$$

и с начальными условиями  $y(0), y^{(1)}(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$  записывается так

$$y(t) = y_{OB}(t) + y_{\chi}(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t} + \int_0^t h(t-\tau) \dot{x}(\tau) d\tau, \quad (3)$$

где  $y_{OB}(t), y_{\chi}(t)$  – общая (свободная) и частная (вынужденная) составляющие решения,  $C_i$  – так называемые постоянные интегрирования, выражаемые через начальные условия,  $p_i$  – корни характеристического уравнения, составленного для диффуравнения (1).

Формула (3) выводится с использованием принципа суперпозиции, в соответствии с которым выходной сигнал линейной системы можно получить наложением друг на друга реакций системы на отдельные ступенчатые воздействия  $1(t_i) \cdot \dot{x}(t_i) \Delta t, \Delta t = t_i - t_{i-1} = const$ , аппроксимирующие входной сигнал.

Выражение (3) определяет связь между производной входного сигнала  $\dot{x}(t)$  и выходной переменной  $y(t)$  системы. Так в практике управления входные сигналы систем могут быть и недифференцируемыми функциями, то в ТАУ решение уравнения (2), как правило, представляют в форме

$$y(t) = y_{OB}(t) + y_{\chi}(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t} + \int_0^t w(t-\tau) x(\tau) d\tau, \quad (4)$$

где

$$w(t) = dh(t)/dt \quad (5)$$

– весовая (импульсная) функция звена (системы), а интеграл в выражении (4) называется интегралом свертки (в теоретической электротехнике – интегралом Дюамеля).

Уравнение (4) определяет связь между уже входной  $x(t)$  и выходной  $y(t)$  функциями системы и позволяет решить **основную задачу анализа САУ** – рассчитать переходной процесс системы при действии конкретного входного сигнала.

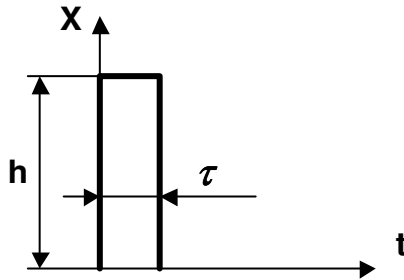
Так как переходная функция  $h(t)$  является реакцией объекта (1) на единичную ступенчатую функцию  $1(t)$ , то из уравнений (3) и (4) следует, что функция  $w(t)$  в свою очередь представляет реакцию объекта на сигнал, который формально является производной ступенчатой функции

$$\delta(t) = d1(t)/dt \quad (5)$$

(производные в формулах (3) и (4) меняются местами). Данный сигнал в ТАУ называется *единичным идеальным импульсом*  $\delta(t)$  или функцией Дирака.

Из выражения (5) вытекает, что функцию Дирака технически точно нельзя реализовать (значение производной стремится к бесконечно большой величине). Поэтому для приближенного получения импульсной характеристики используют

импульсы прямоугольной формы



Такой импульс аналитически описывается так

$$X(t) = \begin{cases} 0, & 0 > t > \tau, \\ h, & 0 \leq t \leq \tau, \end{cases}$$

при этом «площадь» сигнала

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(t) dt = h\tau,$$

где  $h$  - высота или амплитуда импульса,  $\tau$  - продолжительность импульса.

Произведение  $h\tau$  часто называют величиной импульса. Если величина импульса равна единице, то импульс называют единичным. Если  $\tau \rightarrow 0$ , то импульс называют идеальным.

Таким образом, единичный идеальный импульс аналитически можно описать выражением

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t \neq 0, \\ \infty, & \text{при } t = 0, \end{cases} \quad (6)$$

при этом

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (7)$$

Соответственно единичный идеальный импульс  $\delta(t)$  имеет следующие свойства.

1. Фильтрующее (детекторное) свойство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \delta(t) dt = x(0). \quad (8)$$

2. Преобразование Лапласа с учетом (8) принимает значение

$$L[\delta(t)] = \int_0^{+\infty} \delta(t) e^{-pt} dt = e^{-0} = 1. \quad (9)$$

С использованием свойства (9) и понятия передаточной функции находим

$$W(s) = \frac{L[y(t)]}{L[u(t)]} = \frac{L[w(t)]}{L[\delta(t)]} = \frac{L[w(t)]}{1}.$$

Отсюда следует важный факт: передаточная функция равна изображению Лапласа от весовой функции

$$W(s) = L[w(t)], \quad (10)$$

или

$$w(t) = L^{-1}[W(s)].$$

Соотношения (10) широко используются в ТАУ и, в частности, в данной лабораторной

работе – см. рис. 4.

### **3. Задания и порядок проведения исследований**

**Задание.** Используя (модифицируя) программный модуль лабораторной работы в MathCAD (см. рис. 4) для заданного объекта, передаточная функция и параметры которого определяются согласно таблице 1 в зависимости от номера варианта, рассчитать временные характеристики следующих элементов:

1. апериодического звена;
2. звена второго порядка с интегратором;
3. звена второго порядка с двумя апериодическими звеньями;
4. колебательного звена.

### **Порядок исследований и представления результатов**

**0. Создать текстовый блок**, содержащий название работы, ФИО студента, номер варианта, отформатировать текст в соответствии с образцом, приведенном на рис. 3.

#### **Лабораторная работа № 6. Исследование временных характеристик линейных непрерывных систем автоматического управления**

Выполнил: студент гр. 111111 Иванов И.И.  
Вариант: N  
Дата: 01.03.2016 г.

Рис. 3. Образец форматирования текста

### **1. Определение характеристик апериодического звена**

1.1. Используя (модифицируя) программу Mathcad, определить передаточную функцию звена и задать значения ее параметров согласно таблице 1 в зависимости от номера варианта:

$$W(s) = \frac{k}{T_0 s + 1}, \quad k = \quad, \quad T = \quad.$$

1.2. Используя средства среды Mathcad по реализации обратного преобразования Лапласа, определите переходную и весовую функции звена.

1.3. Постройте графики этих функций.

1.4. Численное определение переходной характеристики звена

1.4.1. С помощью блока Given задайте дифференциальное уравнение, соответствующее передаточной функции, с нулевыми начальными значениями и входной функцией  $\Phi(t)$  – единичной ступенчатой функцией.

1.4.2. Решите это дифференциальное уравнение с использованием оператора Odesolve(t, a, b) и постройте график решения.

1.5. Численное определение весовой характеристики звена

1.5.1. С помощью блока Given задайте дифференциальное уравнение, соответствующее передаточной функции, с нулевыми начальными значениями и входной функцией  $\text{Impuls1}(t, t_i)$  – импульс единичной величины с длительностью  $t_i$

(эта функция отсутствует в Mathcad и определяется самостоятельно через  $\Phi(t)$ ).

1.5.2. Решите это дифференциальное уравнение с использованием оператора Odesolve(t, a, b) и постройте графики решения для трех значений  $t_i$ , последовательно уменьшающихся в два раза.

## 2. Определение характеристик звена второго порядка с интегратором

Пункты 1.1 – 1.5 повторите для звена с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{k}{s(T_{01}s + 1)} \text{ с параметрами, указанными в таблице 1 в соответствии с номером варианта.}$$

## 3. Определение характеристик звена второго порядка с двумя аperiodическими звеньями

Пункты 1.1 – 1.5 повторите для звена с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{k}{(T_{01}s + 1)(T_{02}s + 1)} \text{ с параметрами, указанными в таблице 1.}$$

## 4. Определение характеристик колебательного звена второго порядка

Пункты 1.1 – 1.5 повторите для звена с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{k}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1} \text{ с параметрами, указанными в таблице 1. Заметим, что}$$

взаимосвязь параметров  $T, \xi$  и постоянными времени  $T_{01}, T_{02}$  таблицы в методических указаниях для проведения численного эксперимента принята согласно

$$\text{формулам: } T = 0,316\sqrt{T_{01}T_{02}}; \quad \xi = 0,158\sqrt{\frac{T_{02}}{T_{01}}}.$$

## 5. Выводы по работе (о соответствии результатов п.1.2 и п.1.4, п.1.5)

Ниже приводится пример программного модуля выполнения работы.

1. Описание звена

$$T := 1 \quad K := 2$$

$$W(p) := \frac{K}{T \cdot p + 1}$$

$$W1(p) := \frac{1}{(p + 1)^2}$$

$$W2(p) := \frac{1}{p^2 + 1.4142p + 1}$$

2. Аналитическое определение переходной и весовой характеристик звена

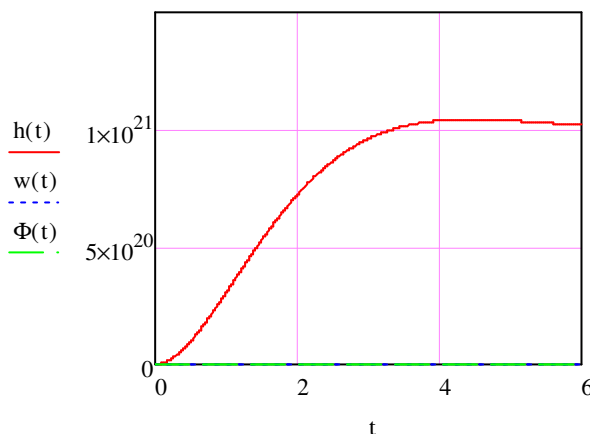
Нахождение переходной функции

$$h(t) := \frac{W2(p)}{p} \Bigg|_p^{\text{invlaplace}} \rightarrow 1.0e21 + (-5.0e20 + 4.9999041009196633608e20)e^{(-0.7071+0.70711356230806378163i) \cdot t} - [(-4.9999041009196633608e20)e^{(-0.7071+0.70711356230806378163i) \cdot t}]$$

Нахождение весовой функции

$$w(t) := W(p) \Bigg|_p^{\text{invlaplace}} \rightarrow 2 \cdot e^{-t}$$

Построение графиков переходной и весовой функций



### 3. Определение переходной и весовой характеристик звена моделированием

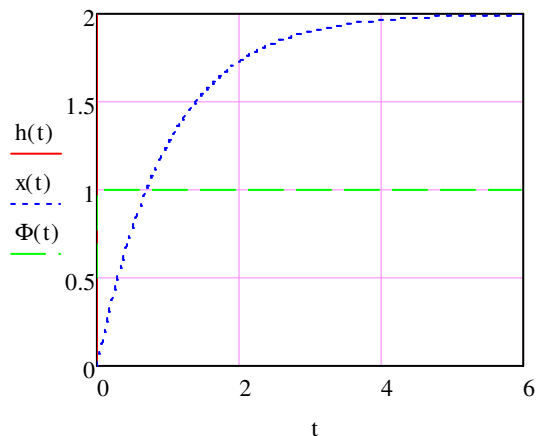
#### 3.1. Определение переходной функции

Given

$$x(0) = 0$$

$$T \cdot \left( \frac{d}{dt} x(t) \right) + x(t) = K \cdot \Phi(t)$$

$x := \text{Odesolve}(t, 10, 1000)$



#### 3.2. Нахождение весовой функции

Определение единичного импульса с длительностью  $t_i$ :

$$\text{Impuls1}(t, t_i) := \frac{1}{t_i} \cdot (\Phi(t) - \Phi(t - t_i))$$

Расчет весовой функции

Given

$$x(0) = 0$$

$$T \cdot \left( \frac{d}{dt} x(t) \right) + x(t) = K \cdot \text{Impuls1}(t, 0.25)$$

$\underline{x} := \text{Odesolve}(t, 10, 1000)$

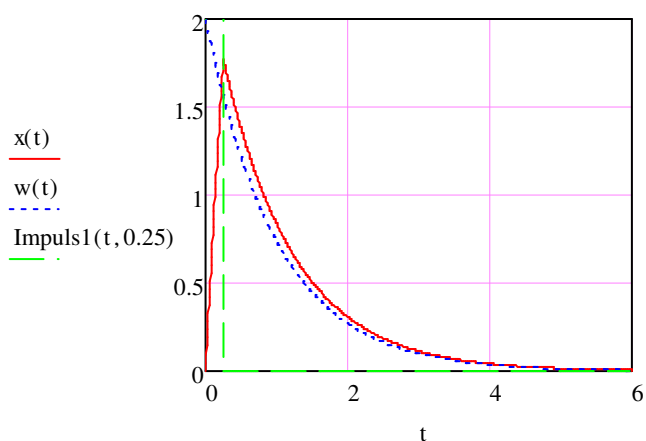


Рис. 4. Определение временных характеристик звеньев в MathCAD



Таблица 1

Вариант	$k$	$T_{01}$	$T_{02}$
1	1	0,5	0,01
2	2	0,25	0,5
3	3	0,1	0,25
4	1	0,25	0,2
5	1	0,25	1
6	2	0,05	0,25
7	4	0,05	0,25
8	4	0,5	0,1
9	2	0,5	0,25
10	3	1	0,5
11	3	0,5	0,05
12	1.5	0,25	0,2
13	2	0,75	0,01
14	5	0,45	0,1
15	3	0,9	0,05
16	2.5	0,36	0,67
17	1.5	0,34	0,52
18	4	0,8	0,2
19	4.5	0,7	0,12
20	3.5	0,3	0,95
21	5	0,1	0,6
22	4	0,8	0,3
23	1	0,65	0,5
24	2	0,45	0,55
25	4	0,72	0,35

#### 4. Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе формируется как листинг из MathCAD выполнения указанных пунктов в порядке исследования с добавлением от руки выводов по работе, формулируемых на основе графиков и числовых данных полученных в ходе исследований.

#### 5. Контрольные вопросы

1. Математически опишите и поясните типовые входные воздействия систем управления, а именно, 1) единичная ступенчатая функция, 2) единичный импульс, 3) идеальный единичный импульс.

2. Как называются реакции системы на типовые воздействия ?

3. Дать определения переходной, весовой (импульсной) и передаточной функциям объекта, указать их взаимосвязь.

4. Пояснить на примере объекта первого порядка способы расчета переходной и весовой (импульсной) функций по заданной передаточной функции объекта (классический и операторный способы расчета переходных процессов).

5. Изобразите графики переходных функций типовых звеньев. Как параметры звеньев влияют на вид графика ?

6. Поясните физический смысл первичных показателей качества системы управления и процедуру графического определения их значений.

### **Библиографический список**

1. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория автоматического регулирования.- М.: Наука, 1975.- 757 с.

2. Поляков К.Ю. Теория автоматического управления для чайников. – С.-Петербург, 2008. – 80 с. (<http://kpolyakov.narod.ru>).

3. Капалин В.И. Шаповалова Н.Е. Линейные системы управления в системе компьютерной математики Mathcad. Уч. пособие. – М. Изд-во Перо, 2013. – 132 с.

4. Макаров Н.Н., Феофилов С.В. Применение пакета Mathcad в анализе и синтезе систем автоматического управления. Уч. пособие. – Тула, Изд-во ТулГУ, 2006. – 170 с.