ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 3

ЗАДАНИЕ № 1

Даны комплексные числа z_1 и z_2 (таблица 1).

а). Записать их в тригонометрической форме; *б*). Найти числа $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$; *в*). Найти $z_1 z_2$, z_1 / z_2, выполнить действия в тригонометрической и алгебраической формах

г). Найти z_1^3; *д*). Найти $\sqrt[3]{z_2}$, построить.

Таблица 1

№ варианта	z_1	z_2
1.1.	$2\sqrt{3}+2i$	$\dfrac{4}{1+i}$
1.2.	$3 + 3i$	$\dfrac{8}{1+\sqrt{3}i}$
1.3.	$4+4\sqrt{3}i$	$\dfrac{4}{\sqrt{3}+i}$
1.4.	$-\sqrt{3}+3i$	$\dfrac{2}{1-i}$
1.5.	$-2 + 2i$	$\dfrac{4}{1-\sqrt{3}i}$

ЗАДАНИЕ № 2

Найти пределы функций.

2.1. *а*) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$ при $x_0=3$, $x_0=2$, $x_0\to\infty$;

2.2. *а*) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$ при $x_0=5$, $x_0=3$, $x_0\to\infty$;

2.3. *а*) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{3x^2-2x-8}{x^2+3x-10}$ при $x_0=6$, $x_0=2$, $x_0\to\infty$;

2.4. *а*) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{6x^2+13x+7}{3x^2+8x+5}$ при $x_0=4$, $x_0=-1$, $x_0\to\infty$;

2.5. *а*) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{3x^2+11x+10}{2x^2+5x+2}$ при $x_0=-5$, $x_0=-2$, $x_0\to\infty$;

ЗАДАНИЕ № 3

Найти дифференциалы dy функций $y=f(x)$.

3.1. *а*) $y=\frac{5}{x^4}-\frac{2}{x}+3x^4-\sqrt{x^9}$;

б) $y=3^{2x}+\operatorname{ctg}(3x^4)$;

3.2. *а*) $y=\frac{6}{x}+\frac{3}{x^4}+\sqrt[5]{x^2}-3x^7$;

б) $y=e^{3x}+\sin(4x^5)$;

3.3. *а*) $y=5x^4-\frac{4}{x}-3\sqrt{x^3}+\frac{4}{x^3}$;

б) $y=4^{2x+1}+\operatorname{tg}(2x^6)$;

3.4. *а*) $y=3x^4+\frac{5}{x}-\sqrt[3]{x^5}+\frac{3}{x^2}$;

б) $y=e^{-5x}+\sin(20x^3)$;

3.5. *а*) $y=4x+\frac{5}{x^4}-\frac{7}{x}+\sqrt[4]{x^3}$;

б) $y=\cos 2x+3^{2x-x^2}$;

ЗАДАНИЕ № 4

Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

4.1. *а*) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{5x^2-4x-1}{6x^2-5x-1}$; *б*) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2-4x-1}{6x^2-5x-1}$;

4.2. *а*) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-8}{x^2-5x+6}$; *б*) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-8}{x^2-5x+6}$;

4.3. *а*) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-7x+12}{9-x^2}$; *б*) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-7x+12}{9-x^2}$;

4.4. *а*) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{3x^2+2x-33}$; *б*) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-5x+6}{3x^2+2x-33}$;

4.5. *а*) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x^2+x-1}{4x^2+2x-2}$; *б*) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-1}{4x^2+2x-2}$;

Р Е Ш Е Н И Е   Т И П О В О Г О   В А Р И А Н Т А   К Р № 3

З а д а н и е   1 . Даны комплексные числа $z_1 = -3+4i$ и $z_2 = \dfrac{29}{5+2i}$.

а). Записать их в тригонометрической форме и отметить полученные числа на комплексной плоскости; *б*). Найти числа $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, построить; *в*). Найти $z_1 z_2$, z_1 / z_2, записать в тригонометрической и алгебраической формах, сравнить результаты; *г*). Найти z_1^3; *д*). Найти $\sqrt[3]{z_2}$, построить.

Р е ш е н и е . *а*). Преобразуем число z_2 к виду $z = x+iy,\ x, y \in R$, для этого умножим и разделим его на число, сопряженное к знаменателю

$$z_2 = \frac{29}{5+2i} = \frac{29(5-2i)}{(5+2i)(5-2i)} = \frac{29(5-2i)}{25-4i^2} = 5-2i\ .$$

Запишем числа z_1 и z_2 в тригонометрической форме. Воспользуемся формулами

$$|z| = r = \sqrt{x^2+y^2}\ ,\ \operatorname{tg}\varphi = y/x,$$

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, \text{ если } z \text{ находится в I и IV четверти,} \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi, \text{ если } z \text{ находится в II четверти,} \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} - \pi, \text{ если } z \text{ находится в III четверти.} \end{cases}$$

$$r_1 = \sqrt{(-3)^2+4^2} = \sqrt{25} = 5\ ,\ \operatorname{tg}\varphi_1 = -4/3.$$

Точка z_1 попадает во вторую четверть, поэтому $\varphi_1 = \operatorname{arctg}(-4/3) + 180° = -53{,}13° + 180° = 126{,}87° \Rightarrow z_1 = -3+4i = 5\left(\cos 126{,}87° + i\sin 126{,}87°\right)$.

$$r_2 = \sqrt{5^2+(-2)^2} = \sqrt{29} \approx 5{,}39\ ,\ \operatorname{tg}\varphi_2 = -2/5.$$

Точка z_2 попадает в четвертую четверть, поэтому $\varphi_2 = \operatorname{arctg}(-2/5) = -21{,}8°$ и

$$z_2 = 5-2i = 5{,}39\left(\cos(-21{,}8°) + i\sin(-21{,}8°)\right).$$

б). Вычислим $z_3 = z_1 + z_2$, $z_4 = z_1 - z_2$. В алгебраической форме

$$z_3 = z_1 + z_2 = -3+4i + 5-2i = 2+2i\ ;$$

$$z_4 = z_1 - z_2 = -3+4i - (5-2i) = -8+6i\ .$$

в). Вычислим $z_1 z_2$ и z_1 / z_2.

В алгебраической форме

$$z_1 z_2 = (-3+4i)(5-2i) = -15+20i+6i-8i^2 = -7+26i\ ;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-3+4i}{5-2i} = \frac{-3+4i}{5-2i}\cdot\frac{5+2i}{5+2i} = \frac{-15+20i-6i+8i^2}{5^2-2^2 i^2} = \frac{-23+14i}{29} = -0{,}79+0{,}48i\ ;$$

в тригонометрической форме по формулам

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right] \Rightarrow |z_1 z_2| = r_1 r_2, \quad \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right]$$

имеем

$$z_1\ z_2 = 5\left(\cos 126{,}87° + i\sin 126{,}87°\right) 5{,}39\left(\cos(-21{,}8°) + i\sin(-21{,}8°)\right) =$$
$$= 26{,}95\left(\cos 105{,}07°) + i\sin 105{,}07°\right),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5\left(\cos 126{,}87° + i\sin 126{,}87°\right)}{5{,}39\left(\cos(-21{,}8°) + i\sin(-21{,}8°)\right)} = 0{,}93\left(\cos 148{,}67° + i\sin 148{,}67°\right).$$

Для проверки полученных результатов перейдем от тригонометрической формы записи комлексных чисел опять к алгебраической:

$z_1\ z_2 = 26{,}95\left(\cos 105{,}07°) + i\sin 105{,}07°\right) = 26{,}95\ (-0{,}26 + 0{,}966i) = -7{,}01 + 26{,}02i,$

$\frac{z_1}{z_2} = 0{,}93\left(\cos 148{,}67° + i\sin 148{,}67°\right) = 0{,}93\ (-0{,}854 + 0{,}52i) = -0{,}79 + 0{,}48i.$

Таким образом, расчеты выполнены верно.

в) Вычислим z_1^3. По формуле $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ имеем

$$z_1^3 = 5^3\left(\cos(3\cdot 126{,}87°) + i\sin(3\cdot 126{,}87°)\right) = 125\left(\cos 380{,}61° + i\sin 380{,}61°\right) =$$
$$= 125\left(\cos 0{,}61° + i\sin 0{,}61°\right).$$

Для нахождения корней третьей степени воспользуемся формулой Муавра $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), \quad k = \overline{0,\ n-1}$:

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{3} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{3}\right), \quad k = 0,\ 1,\ 2\ \Rightarrow$$

$$\sqrt[3]{z_2} = \sqrt[3]{5{,}39}\left(\cos\frac{-21{,}8° + 360°k}{3} + i\sin\frac{-21{,}8° + 360°k}{3}\right) =$$
$$= 1{,}75\left(\cos(-7{,}27° + 120°k) + i\sin(-7{,}27° + 120°k)\right),\ k = \overline{0,\ 2}$$

$k = 0 \Rightarrow w_0 = 1{,}75\left(\cos(-7{,}27°) + i\sin(-7{,}27°)\right) = 1{,}75\left(0{,}99 - 0{,}13i\right) = 1{,}73 - 0{,}23i$;

$k = 1 \Rightarrow w_1 = 1{,}75\left(\cos 112{,}73° + i\sin 112{,}73°\right) = 1{,}75\left(-0{,}39 + 0{,}92i\right) = -0{,}68 + 1{,}61i$;

$k = 2 \Rightarrow w_2 = 1{,}75\left(\cos 232{,}73° + i\sin 232{,}73°\right) = 1{,}75\left(-0{,}61 - 0{,}8i\right) = -1{,}06 - 1{,}39i$.

Отметим полученные числа на комплексной плоскости (рисунок 4).

З а д а н и е 2 . Вычислить пределы

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{3x^2 - x - 2}{2x^2 + x - 3}$ при $x_0 = 2$; $x_0 = 1$; $x_0 \to \infty$.

Р е ш е н и е . При вычислении пределов допустимы использование уже известных пределов и элементарные преобразования. В некоторых случаях бывает целесообразным использовать для приближенных вычислений при малых значениях x (всюду $x \to 0$) таблицу эквивалентных бесконечно малых:

$\boxed{a)}$ 1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-x-2}{2x^2+x-3}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3\cdot 2^2-2-2}{2\cdot 2^2+2-3}=\dfrac{8}{7}$;

$\boxed{a)}$ 2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-x-2}{2x^2+x-3}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Неопределенности вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ раскрываются путем сокращения на множитель, дающий 0. Разложим числитель и знаменатель на множители по формуле $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$. Для этого решим уравнения $3x^2-x-2=0$ и $2x^2+x-3=0$. Корни первого уравнения – {1, –2 / 3}, второго – {1, –3 / 2}, тогда

$$3x^2-x-2=3(x-1)(x+2/3)\,,\quad 2x^2+x-3=2(x-1)(x+3/2)\,.$$

Подставим полученные разложения под знак предела и получим

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-x-2}{2x^2+x-3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)(x+2/3)}{2(x-1)(x+3/2)}=\lim_{x\to 1}\frac{3(x+2/3)}{2(x+3/2)}=\frac{5}{5}=1\,.$$

$\boxed{a)}$ 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-x-2}{2x^2+x-3}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

Такие неопределенности раскрываются путем вынесения старшей степени неизвестной

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x-2}{2x^2+x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(3-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(2+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{2+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}=\frac{3}{2}\,.$$

З а д а н и е 3. Найти дифференциалы dy функций

а) $y=\dfrac{7}{x^5}-\dfrac{2}{x}+3x^4-\sqrt[3]{x^4}$; *б*) $y=3^x-\operatorname{arctg}(2x^3)$;

Р е ш е н и е. *а*) $y=\dfrac{7}{x^5}-\dfrac{2}{x}+3x^4-\sqrt[3]{x^4}$.

Запишем функцию в виде, удобном для дифференцирования

$$y=7x^{-5}-2x^{-1}+3x^4-x^{4/3}\,.$$

Вычислим производную $y\,'$ и дифференциал dy ($dy=y'(x)dx$)

$$y'=-35x^{-6}+2x^{-2}+12x^3-\frac{4}{3}x^{1/3}=-\frac{35}{x^6}+\frac{2}{x^2}+12x^3-\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}\,,$$

$$dy=\left(-\frac{35}{x^6}+\frac{2}{x^2}+12x^3-\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}\right)dx\,.$$

б) $y = 3^x - \operatorname{arctg}(2x^3)$. $\quad dy = \left(3^x - \operatorname{arctg}(2x^3)\right)' dx$.

$$dy = \left(3^x \ln 3 - \frac{(2x^3)'}{1+(2x^3)^2}\right)dx = \left(3^x \ln 3 - \frac{6x^2}{1+4x^6}\right)dx .$$

Задание 4. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-6x+5}{x^2+x-2} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2-6x+5)'}{(x^2+x-2)'} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-6}{2x+1} = -\dfrac{4}{3}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-6x+5}{x^2+x-2} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^2-6x+5)'}{(x^2+x-2)'} =$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2x-6}{2x+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{(2x-6)'}{(2x+1)'} = \frac{2}{2} = 1;$$