Практическое занятие 11

Тема: Закон больших чисел. Неравенство Чебышева.

Цель: изучить закон больших чисел, неравенство Чебышева; познакомить с методами решения задач.

Общие теоретические положения и решение типовых задач

Если случайная величина X принимает только неотрицательные значения и имеет математическое ожидание M(X), то для любого положительного числа ε верно неравенство:

$$P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{M(X)}{\varepsilon}$$

Альтернативная форма записи неравенства Маркова:

$$P(X < \varepsilon) > 1 - \frac{M(X)}{\varepsilon}$$

Следствие

Для любой случайной величины X при любом ε >0 имеет место неравенство:

$$P(|X| > \varepsilon) \leq \frac{M(X^2)}{\varepsilon^2}$$

Пример 1. Оценить вероятность того, что при 3600 независимых подбрасываниях игрального кубика число появлений шести очков будет не меньше 900.

Решение

Пусть X – число появлений шести очков при n=3600 подбрасываниях.

Тогда математическое ожидание случайной величины, распределенной по биномиальному закону с $p = \frac{1}{6}$:

$$M(X) = np = 3600 \cdot \frac{1}{6} = 600$$

Согласно неравенству Маркова:

$$P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{M(X)}{\varepsilon}$$

Подставляя числовые значения, получаем:

$$P(X \geq 900) \leq \frac{600}{900} = \frac{2}{3} = 0{,}6667$$

Ответ: $p \leq 0.6667$.

Пример 2. Сумма всех вкладов в некотором банке составляет 40 млн. р., а вероятность того, что выбранный вклад не превышает 300 тыс. руб., равна 0,8. Каково число вкладчиков данного банка?

Решение

Пусть X – размер случайно взятого вклада, а n – число всех вкладов. Тогда из условия задачи следует, что средний размер вклада:

$$M(X) = \frac{40000}{n} \text{ тыс. руб.}$$

Используем неравенство Маркова:

$$P(X < \varepsilon) > 1 - \frac{M(X)}{\varepsilon}$$

При $\varepsilon = 300 \text{ тыс. руб.}$ руб. получаем:

$$P(X < 300) > 1 - \frac{40000}{300n}$$

Учитывая, то $P(X < 300) = 0{,}8$, получаем:

$$1 - \frac{40000}{300n} < 0.8$$

Отсюда число вкладчиков:

$$n < 667$$

Ответ: не более $n = 667$ вкладчиков.

Решение 3. Математическое ожидание отклонения от центра мишени при стрельбе по ней составляет 6 см. Оценить вероятность того, что при стрельбе по круговой мишени радиусом 15 см произойдет попадание в мишень.

Решение

Если случайная величина X может принимать только неотрицательные значения и у нее есть математическое ожидание, то какова бы ни была положительная величина x той же размерности, что и X, всегда выполняется неравенство Маркова:

$$P(X < \varepsilon) = 1 - \frac{M(X)}{\varepsilon}$$

Попадание в мишень произойдет, если отклонение от центра мишени $\varepsilon < 15$. получаем:

$$P(X < 15) = 1 - \frac{6}{15} = 0{,}6$$

Ответ: $P(X < 15) = 0.6$

Нельзя заранее уверенно предвидеть, какое из возможных значений примет случайная величина в итоге испытания; это зависит от многих случайных причин, учесть которые невозможно. При некоторых сравнительно широких условиях суммарное поведение достаточно большого числа случайных величин почти утрачивает случайный характер и становится закономерным.

Для практики очень важно знание условий, при выполнении которых совокупное действие очень многих случайных причин приводит к результату, почти не зависящему от случая, так как позволяет предвидеть ход явлений. Эти условия и указываются в теоремах, носящих общее название закона больших чисел. К закону больших чисел прежде всего относится так называемое неравенство Чебышева, которое оценивает в отдельном испытании вероятность принятия случайной величиной значения, уклоняющееся от среднего значения не более, чем на заданное значение.

Неравенство Чебышева

Вероятность того, что отклонение случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше положительного числа ε, не меньше, чем $1 - D(X)/\varepsilon^2$:

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

Также неравенство Чебышева можно записать в другой форме:

$$P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) < \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

Замечание. Неравенство Чебышева применяется для теоретических исследований.

Для случайной величины X=m (число появления события в n испытаниях), имеющей биномиальный закон распределения с математическим ожиданием $M(X) = np$ и дисперсией $D(X) = npq$ неравенство будет выглядеть следующим образом:

$$P(|m - np| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{npq}{\varepsilon^2}$$

Для частоты m/n наступления события в n независимых испытаниях, в каждом из которых оно может произойти с одной и той же вероятностью $M(m/n) = p$, и имеющей дисперсию $D(m/n) = pq/n$ получаем:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}$$

Последнее неравенство также известно как неравенство из теоремы Бернулли.

Теорема Чебышева

Если $X_1, X_2, \dots X_n, \dots$ - попарно независимые случайные величины, причем дисперсии их равномерно ограничены (не превышают постоянного числа C), то, как бы мало ни было положительное число ε, вероятность неравенства:

$$\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon$$

будет, как угодно, близка к единице, если число случайных величин достаточно велико. Другими словами, в условиях теоремы

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Таким образом, теорема Чебышева утверждает, что если рассматривается достаточно большое число независимых случайных величин, имеющих ограниченные дисперсии, то почти достоверным можно считать событие, состоящее в том, что отклонение среднего арифметического случайных величин от среднего арифметического их математических ожиданий будет по абсолютной величине сколь угодно малым.

Формулируя теорему Чебышева, мы предполагали, что случайные величины имеют различные математические ожидания. На практике часто бывает, что случайные величины имеют одно и то же математическое ожидание. Очевидно, что если допустить, что дисперсии этих величин ограничены, то к ним будет применима теорема Чебышева.

Обозначим математическое ожидание каждой из случайных величин через a; в рассматриваемом случае среднее арифметическое математических ожиданий, как легко видеть, также равно a. Мы можем сформулировать теорему Чебышева для рассматриваемого частного случая.

Если $X_1, X_2, \dots, X_n \dots$ - попарно независимые случайные величины, имеющие одно и то же математическое ожидание a, и если дисперсии этих величин равномерно ограничены, то, как бы мало ни было число $\varepsilon > 0$, вероятность неравенства:

$$\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - a\right| < \varepsilon$$

будет, как угодно, близка к единице, если число случайных величин достаточно велико. Другими словами, в условиях теоремы будет иметь место равенство
$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - a\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Пример 4. В 1200 испытаниях Бернулли вероятность успеха в каждом испытании равна 0,8. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что разница между числом успехов в этих испытаниях и средним числом успехов будет меньше 60.

Решение

Число успехов распределено по закону Бернулли. Математическое ожидание (среднее число успехов): $M(X) = np = 1200 \cdot 0.8 = 960$

Дисперсия: $D(X) = np(1-p) = 1200 \cdot 0.8 \cdot 0.2 = 192$

Неравенство Чебышева:
$$P(|m - np| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{npq}{\varepsilon^2}$$
Подставляя числовые значения, получаем:
$$P(|m - 960| < 60) \geq 1 - \frac{192}{60^2} = 0{,}9467$$

Пример 5. Дневная выручка магазина шаговой доступности является случайной величиной, распределенной по нормальному закону со средним значением 25000 руб. и средним квадратическим отклонением 3000 руб.

1) С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что дневная выручка магазина шаговой доступности будет находиться в пределах от 21000 до 29000 руб. 2) Ту же вероятность найти, используя связь нормального закона распределения с функцией Лапласа.

Решение

1) Пусть случайная величина X– дневная выручка.

Математическое ожидание: $M(X) = 25000$ руб.

Дисперсия: $D(X) = 3000^2\ (\text{руб.})^2$

Отклонение:
$$\varepsilon = 25000 - 21000 = 29000 - 25000 = 4000 \text{ руб.}$$
То есть выручка отклонится от математического ожидания по абсолютной величине не более чем на 4000 руб.

Неравенство Чебышева:
$$P(|X - M(X)| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$
В нашем случае:
$$P(|X - 25000| \leq 4000) \geq 1 - \frac{3000^2}{4000^2} = 0{,}4375$$
2) Предполагая, что случайная величина X распределена по нормальному закону:
$$P(|\xi - 25000| \leq 4000) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{3000}{4000}\right) = 2\Phi(0{,}75) = 2 \cdot 0{,}2734 = 0{,}5468$$
Из полученных результатов видно, что полученное точное значение вероятности события не противоречит ее оценке, полученной по неравенству Чебышева, так как $0{,}5468 > 0{,}4375$.

Пример 6. В результате 200 независимых опытов найдены значения СВ $X_1, X_2, ..., X_{200}$, причем M(X)=D(X)=2. Оценить сверху вероятности того, что абсолютная величина разности между средним арифметическим значением случайной величины

$$\frac{1}{200}\sum_{n=1}^{200} X_i$$

и математическим ожиданием меньше 0,2.

Решение

Неравенство Чебышева в нашем случае будет выглядеть следующим образом:

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{n=1}^{n} X_i - M(X)\right| < \varepsilon\right) > 1 - \frac{D(X)}{n\varepsilon^2}$$

В нашем случае:

$n = 200$

$D(X) = 2$

$M(X) = 2$

$\varepsilon = 0.2$

Получаем:

$$P\left(\left|\frac{1}{200}\sum_{n=1}^{200} X_i - 2\right| < \varepsilon\right) > 1 - \frac{2}{200 \cdot 0.2^2} = 0{,}75$$

Ответ: $p > 0.75$

Задачи для аудиторной работы

1. Устройство состоит из 10 независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента за время T равна 0,05. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом отказавших элементов и средним числом (математическим ожиданием) отказов за время T окажется: а) меньше двух; б) не меньше двух.

2. В осветительную сеть параллельно включено 20 ламп. Вероятность того, что за время T лампа будет включена, равна 0,8. Пользуясь неравенством Чебышева, оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом включенных ламп и средним числом (математическим ожиданием) включенных ламп за время T окажется: а) меньше трех; б) не меньше трех.

Задачи для самостоятельного решения

1. Вероятность появления события A в каждом испытании равна p. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что число X появлений события A будет заключено в пределах от α до β, если будет произведено n независимых испытаний.

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	0,6	0,4	0,7	0,6	0,3	0,4	0,8	0,4	0,5	0,7
n	120	150	90	110	130	180	160	170	180	200
α	48	90	27	44	91	108	32	102	90	60
β	192	210	153	176	169	252	288	238	270	340

2. Среднее за час количество заказов в сервис доставки еды в обеденный перерыв равно a. Оценить при помощи неравенства Маркова вероятность того, что в течение следующего часа число заказов будет больше, либо равно ε.

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	300	450	250	340	400	360	280	340	420
ε	1000	1200	700	1100	1300	1400	950	1050	1300

Контрольные вопросы

1. Назовите теоремы, которые входят в Закон больших чисел.

2. Верно ли утверждение: Теорема Чебышева позволяет с достаточной точностью по средней арифметической судить о математическом ожидании или, наоборот, по математическому ожиданию предсказывать ожидаемую величину средней. Так, на основании этой теоремы можно утверждать, что если проведено достаточно большое количество измерений определённого параметра прибором, свободным от систематической погрешности, то средняя арифметическая результатов этих измерений сколь угодно мало отличается от истинного значения измеряемого параметра?