Практическое занятие 10

Тема: Нормальный закон распределения и его характеристики. Правило трех сигм. Закон больших чисел. Неравенство Чебышева.

Цель: изучить нормальный закон распределения случайной величины, его числовые характеристики, закон больших чисел, неравенство Чебышева; познакомить с методами решения задач.

Общие теоретические положения и решение типовых задач

Нормальным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, плотность которого имеет вид:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

где m – математическое ожидание, σ – среднее квадратическое отклонение X.

Вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (α,β):

$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right)$, где $\Phi(x)$ – функция Лапласа:

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

Вероятность того, что абсолютная величина отклонения меньше положительного числа δ:

$$P(|X-m|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

В частности, при m=0 справедливо равенство:

$$P(|X|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

Асимметрия, эксцесс, мода и медиана нормального распределения соответственно равны:

$A_s=0, E_k=0, M_0=m, M_e=m$, где $m=M(X)$

Правило трех сигм

Преобразуем формулу:

$$P(|X-m|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

Положив $\delta=\sigma t$. В итоге получим

$$P(|X-m|<\sigma t)=2\Phi(t)$$

если $t=3$, и, следовательно, $\sigma t=3\sigma$, то

$P(|X-m|<3\sigma)=2\Phi(3)=2\cdot 0.49865=0.9973$, то есть вероятность того, что отклонение по абсолютной величине будет меньше утроенного среднего квадратического отклонение, равна 0,9973.

Другими словами, вероятность того, что абсолютная величина отклонения превысит утроенное среднее квадратическое отклонение, очень мала, а именно равна 0,0027. Это означает, что лишь в 0,27% случаев так может произойти. Такие события исходя из принципа невозможности маловероятных событий можно считать практически невозможными. В этом и состоит сущность правила трех сигм: если случайная величина распределена нормально, то абсолютная величина ее отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения.

На практике правило трех сигм применяют так: если распределение изучаемой случайной величины неизвестно, но условие, указанное в приведенном правиле, выполняется, то есть основание предполагать, что изучаемая величина распределена нормально; в противном случае она не распределена нормально.

Пример 1. На станке изготавливается деталь. Ее длина X - случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами a=23,0 см, σ=1,6 см. Найти вероятность того, что длина детали будет заключена между 22 и 24,2 см. Какое отклонение длины детали от a можно гарантировать с вероятностью 0,92; 0,98? В каких пределах, симметричных относительно a будут лежать практически все размеры деталей?

Решение

Вероятность того, что случайная величина, распределенная по нормальному закону, будет находиться в интервале (α;β):

$$p(\alpha < x < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right)$$

Получаем:

$$p(22 < x < 24.2) = \Phi\left(\frac{24.2 - 23}{1.6}\right) - \Phi\left(\frac{22 - 23}{1.6}\right) = \Phi(0{,}75) - \Phi(-0{,}625) = 0{,}2734 + 0{,}234 = 0{,}5074$$

Вероятность того, что случайная величина, распределенная по нормальному закону, отклонится от среднего не более чем на величину δ:

$$P(|x - m| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

По условию

$$P(|x - 23| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{1{,}6}\right) = 0{,}92$$

$$\Phi\left(\frac{\delta}{1{,}6}\right) = \frac{0{,}92}{2} = 0{,}46$$

По таблице значений функции Лапласа:

$$\delta/1{,}6 = 1{,}75 \Rightarrow \delta = 1.75 \cdot 1.6 = 2{,}8 \text{ см}$$

$$P(|x - 23| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{1{,}6}\right) = 0{,}98$$

$$\Phi\left(\frac{\delta}{1{,}6}\right) = \frac{0{,}98}{2} = 0{,}49$$

По таблице значений функции Лапласа:

$$\delta/1{,}6 = 2{,}33 \Rightarrow \delta = 2.33 \cdot 1.6 = 3{,}73 \text{ см}$$

По правилу трех сигм можно считать, что практически все длины деталей с вероятностью 0,9973 будут заключены в интервале $(m - 3\sigma; m + 3\sigma)$

$P(|x - 23| < 3 \cdot 1.6) = 0.9973$, откуда

$$-3 \cdot 1.6 + 23 < X < 3 \cdot 1.6 + 23$$

$$18{,}2 < X < 27{,}8$$

Пример 2. Ошибка высотометра распределена нормально с математическим ожиданием 20 мм и средним квадратичным отклонением 10 мм. а) Найти вероятность того, что отклонение ошибки от среднего ее значения не превзойдет 5 мм по абсолютной величине. б) Какова вероятность, что из 4 измерений два попадут в указанный интервал, а 2 – не превысят 15 мм? в) Сформулируйте правило трех сигм для данной случайной величины и изобразите схематично функции плотности вероятностей и распределения.

Решение

а) Вероятность того, что случайная величина, распределенная по нормальному закону, отклонится от среднего не более чем на величину δ:

$$P(|x-m|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

В нашем случае получаем:

$$P(|x-m|<5)=2\Phi\left(\frac{5}{10}\right)=2\Phi(0.5)=2\cdot 0{,}1915=0{,}383$$

б) Найдем вероятность того, что отклонение ошибки от среднего значения не превзойдет 15 мм:

$$P(|x-m|<15)=2\Phi\left(\frac{15}{10}\right)=2\Phi(1{,}5)=2\cdot 0{,}4332=0{,}8664$$

Пусть событие A – ошибки 2 измерений не превзойдут 5 мм и ошибки 2 измерений не превзойдут 0,8664 мм

B_1 – ошибка не превзошла 5 мм; $P(B_1)=0.383$

B_2 – ошибка не превзошла 15 мм $P(B_2)=0.8664$

$$P(A)=P(B_1)\cdot P(B_1)\cdot P(B_2)\cdot P(B_2)+P(B_1)\cdot P(B_2)\cdot P(B_1)\cdot P(B_2)+$$
$$+P(B_1)\cdot P(B_2)\cdot P(B_2)\cdot P(B_1)+P(B_2)\cdot P(B_1)\cdot P(B_1)\cdot P(B_2)+P(B_2)\cdot P(B_2)\cdot P(B_1)\cdot$$
$$\cdot P(B_1)+$$
$$+P(B_2)\cdot P(B_1)\cdot P(B_2)\cdot P(B_1)=6\cdot 0.383^2\cdot 0.8664^2=0{,}6607$$

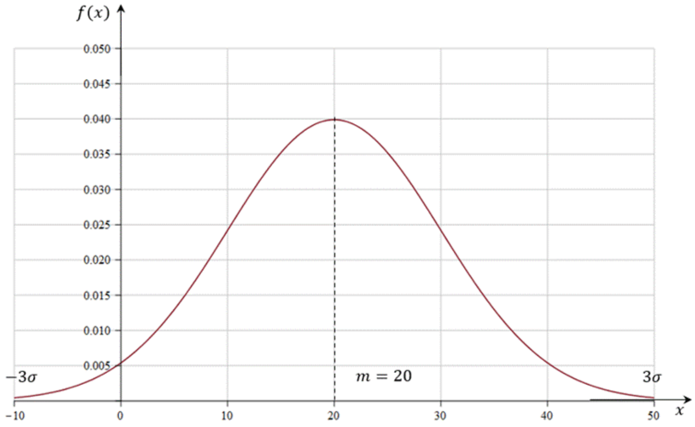
в) Для заданной нормальной величины получаем следующее правило трех сигм: $\overline{x}=20;\ \ 3\sigma=3\cdot 10=30$

Ошибка высотометра будет лежать в интервале:

$(\overline{x}-3\sigma;\ \overline{x}+3\sigma)=(20-30;\ 20+30)=(-10;\ 50)$ мм

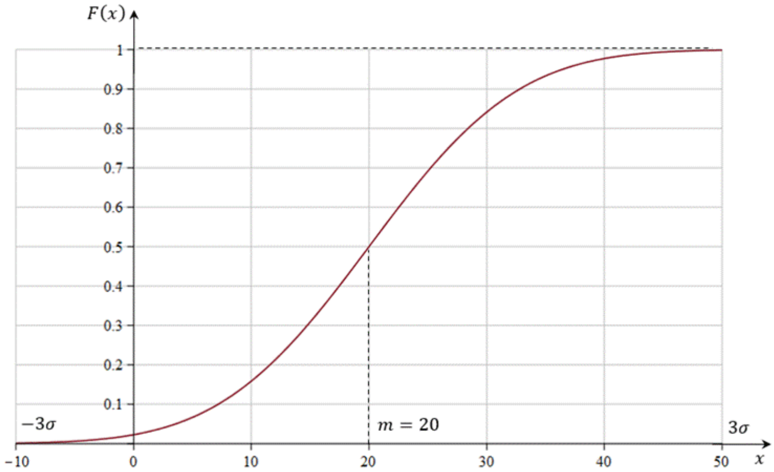
Функция плотности вероятностей:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{10\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-20)^2}{2\cdot 10^2}}$$



Функция распределения:

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{\frac{-(t-m)^2}{2\sigma^2}}dt=\frac{1}{10\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{\frac{-(t-20)^2}{2\cdot 10^2}}dt$$



Пример 3. Случайная величина распределена по нормальному закону. X~N(a,σ), a=25; σ=4; α=13; β=30; δ=0.1. Требуется: составить функцию плотности распределения и построить ее график; найти вероятность того, что случайная величина в результате испытания примет значение, принадлежащее интервалу (α; β); найти вероятность того, что абсолютная величина отклонения значений случайной величины от ее математического ожидания не превысит δ.

Решение

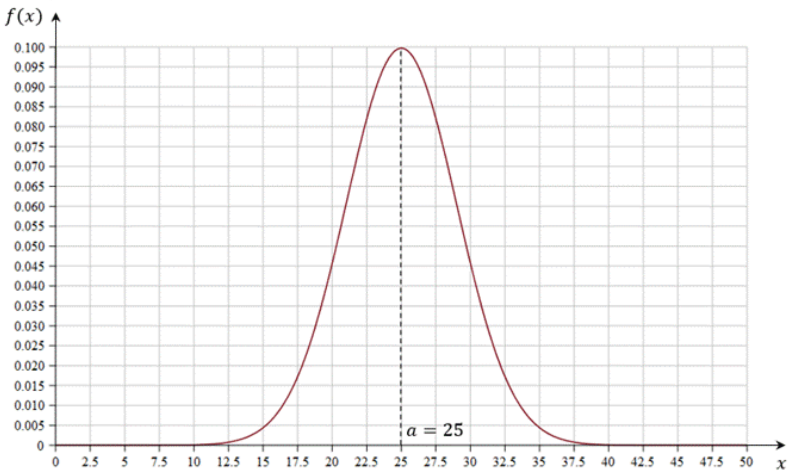
Плотность вероятности случайной величины X, распределенной по нормальному закону, имеет вид:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

по условию $a=25$, $\sigma=4$. Следовательно:

$$f(x)=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-25)^2}{2\cdot 4^2}}$$

Построим график плотности распределения:



Функция распределения для СВ X, распределенной по нормальному закону, записывается следующим образом:

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{\frac{-(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{\frac{-(x-25)^2}{2\cdot 4^2}}dt=1+\Phi\left(\frac{x-25}{4}\right)$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа.

Найдем вероятность попадания СВ X в интервал $(13;\ 30)$:

$$P(\alpha\le x\le\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{30-25}{4}\right)-\Phi\left(\frac{13-25}{4}\right)=$$

$$=\Phi(1.25)-\Phi(-3)=$$

$$=0.3944-(-0.4987)=0.8931$$

Найдем вероятность того, что абсолютное отклонения меньше числа $\delta=0.1$:

$$P(|x-a|<0.1)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{0.1}{4}\right)=2\Phi(0.025)=2\cdot 0.012=0.024$$

Пример 4. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием a=43 и средним квадратическим отклонением σ=5. Найти интервал симметричный относительно математического ожидания, вероятность попадания в который P=0.94.

Решение

Вероятность того, что величина ξ будет отклоняться на величину δ:

$$P(|x|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

в нашем случае:

$$2\Phi\left(\frac{\delta}{5}\right)=0.94,\qquad \Phi\left(\frac{\delta}{5}\right)=\frac{0.94}{2}=0.47$$

По таблице функции Лапласа:

$$\frac{\delta}{5}=1{,}88\quad\Rightarrow\delta=1.88\cdot 5=9.4$$

Искомый интервал: $(43-9.4;\ 43+9.4)=(33.6;\ 52.4)$

Неравенство Маркова. Если все значения СВ X положительны и A – некоторое положительное число, то

$$P(X\ge A)\le\frac{M(X)}{A}.$$

Неравенство Чебышева. Если СВ X имеет конечную дисперсию $D(X)$ и $M(X)$, то при $\forall\varepsilon>0$ справедливо неравенство

$$P(|X-M(X)|<\varepsilon)\ge 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

или $$P(|X-M(X)|\ge\varepsilon)\le\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Пример 5. В 1200 испытаниях Бернулли вероятность успеха в каждом испытании равна 0,8. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что разница между числом успехов в этих испытаниях и средним числом успехов будет меньше 60.

Решение

Число успехов распределено по закону Бернулли. Математическое ожидание (среднее число успехов): $M(X)=np=1200\cdot 0.8=960$

Дисперсия: $D(X)=np(1-p)=1200\cdot 0.8\cdot 0.2=192$

Неравенство Чебышева:

$$P(|m-np|<\varepsilon)\geq 1-\frac{npq}{\varepsilon^2}$$

Подставляя числовые значения, получаем:

$$P(|m-960|<60)\geq 1-\frac{192}{60^2}=0{,}9467$$

Пример 6. Дневная выручка магазина шаговой доступности является случайной величиной, распределенной по нормальному закону со средним значением 25000 руб. и средним квадратическим отклонением 3000 руб.
1) С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что дневная выручка магазина шаговой доступности будет находиться в пределах от 21000 до 29000 руб. 2) Ту же вероятность найти, используя связь нормального закона распределения с функцией Лапласа.

Решение

1) Пусть случайная величина X– дневная выручка.
Математическое ожидание: $M(X)=25000$ руб.
Дисперсия: $D(X)=3000^2\ (\text{руб.})^2$
Отклонение:

$$\varepsilon=25000-21000=29000-25000=4000 \text{ руб.}$$

То есть выручка отклонится от математического ожидания по абсолютной величине не более чем на 4000 руб.
Неравенство Чебышева:

$$P(|X-M(X)|\leq\varepsilon)\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

В нашем случае:

$$P(|X-25000|\leq 4000)\geq 1-\frac{3000^2}{4000^2}=0{,}4375$$

2) Предполагая, что случайная величина X распределена по нормальному закону:

$$P(|\xi-25000|\leq 4000)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{3000}{4000}\right)=2\Phi(0{,}75)=2\cdot 0{,}2734=0{,}5468$$

Из полученных результатов видно, что полученное точное значение вероятности события не противоречит ее оценке, полученной по неравенству Чебышева, так как $0{,}5468>0{,}4375$.

Задачи для аудиторной работы

1. Математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение нормально распределенной случайной величины X соответственно равны 12 и 2. Найти вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале (14; 16).

2. Имеется случайная величина, распределенная по нормальному закону, математическое ожидание которой равно 20, среднее квадратичное отклонение равно 3. Найти симметричный относительно математического ожидания интервал, в который с вероятностью 0,9972 попадет случайная величина.

3. Известно, что средний расход удобрений на один гектар пашен составляет 80 кг, а среднее квадратичное отклонение расхода равно 5 кг. Считая расход удобрений нормально распределенной случайной

величиной, определить диапазон, в который вносимая доза удобрений попадает с вероятностью 0,98.

4. Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины – количество сыра, используемого для изготовления 100 бутербродов, - равно 1 кг. Известно, что с вероятностью 0,96 расход сыра на изготовление 100 бутербродов составляет от 900 до 1100 г. Определить среднее квадратичное отклонение расхода сыра на 100 бутербродов.

5. При измерении нормально распределенной случайной величины оказалось, что ее среднее квадратичное отклонение равно 10, а вероятность попадания этой величины в интервал от 100 до 140, симметричный относительно математического ожидания, равна 0,86. Найти математическое ожидание этой величины и вероятность попадания ее в интервал от 90 до 150.

6. Математическое ожидание количества выпадающих в течение года осадков в данной местности составляет 60 см. Определить вероятность того, что в этой местности осадков выпадает не менее 180 см.

7. Суточный расход воды в населенном пункте является СВ X, для которой $\sigma(X)=10000л$. Оценить вероятность того, что расход воды в этом пункте в течение дня отклоняется от математического ожидания по абсолютной величине более чем на 25000 л.

8. Устройство состоит из 10 независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента за время Т равна 0,05. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом отказавших элементов и средним числом (математическим ожиданием) отказов за время Т окажется: а) меньше двух; б) не меньше двух.

Задачи для самостоятельного решения

1. Случайные отклонения размера детали от номинала распределены нормально: математическое ожидание размера детали равно a (мм), среднее квадратичное отклонение равно σ (мм). Годными считаются те детали, размер которых заключен в рамках между α и β (мм). Определить: а) вероятность изготовления годной детали; б) процент бракованных изделий, если точность изготовления ухудшится и будет характеризоваться средним квадратичным отклонением σ_1(мм).

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	275	290	300	250	230	245	260	270	280	300
σ_1	0,4	0,9	0,7	0,8	0,9	0,95	0,8	0,7	0,85	0,8
σ	0,9	0,8	0,5	0,6	0,7	0,9	0,75	0,6	0,8	0,5
α	273	288	292	249	227	242	258	267	279	296
β	277	292	301	253	233	248	261	273	281	303

2. *СВ X* распределена по нормальному закону, с математическим ожиданием, равным а, и средним квадратичным отклонением, равным

σ. Найти симметричный относительно математического ожидания интервал, в который с вероятностью p попадет СВ X.

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	12	29	30	25	13	24	20	27	28	18
σ	1,6	1,5	2	2,2	2,4	1,9	2,8	1,7	1,5	2,4
p	0,945	0,93	0,95	0,986	0,96	0,922	0,925	0,966	0,92	0,948

3. Вероятность появления события А в каждом испытании равна p. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что число X появлений события А будет заключено в пределах от α до β, если будет произведено n независимых испытаний.

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	0,6	0,4	0,7	0,6	0,3	0,4	0,8	0,4	0,5	0,7
n	120	150	90	110	130	180	160	170	180	200
α	48	90	27	44	91	108	32	102	90	60
β	192	210	153	176	169	252	288	238	270	340

Контрольные вопросы

1. Какое распределение вероятностей случайной величины называют нормальным?
2. Каков вероятностный смысл параметров a и σ?
3. Чему равно математическое ожидание и дисперсия нормальной случайной величины.
4. Как вычислить вероятность попадания значений нормальной случайной величины в заданный интервал?
5. Сформулируйте правило трех сигм.