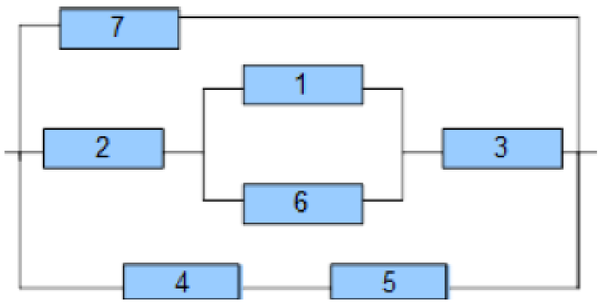
4. Система надежности состоит из 7 элементов и имеет схему, изображенную на рисунке. События A_i, $i=\overline{1,7}$,— отказы элементов за заданный промежуток времени.

1) Выразите через события A_i события A и $\overline{A}$, где A—отказ всей системы за заданный промежуток времени.

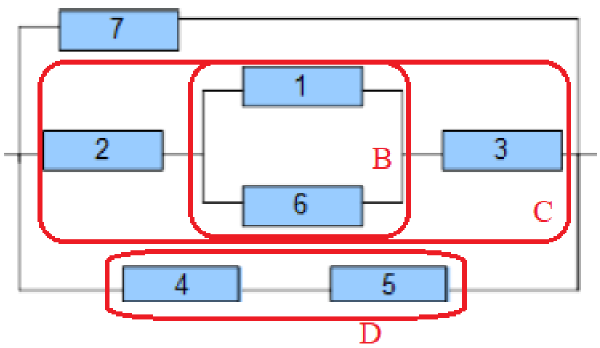
2) Считая, что события A_i независимы в совокупности и имеют вероятности $P(A_i)=p_i$, $i=\overline{1,7}$, вычислите вероятность события A.

$p_2= p_3=0,1, p_4=p_7=0,3, p_1=p_5= p_6=0,2.$



Решение:

Выделим в системе подсистемы как показано на рисунке:



1) События B, C, D – отказ соответствующих подсистем

$$B = A_1A_6$$
$$C = A_2 + B + A_3 = A_2 + A_1A_6 + A_3$$
$$D = A_4 + A_5$$

A — отказ всей системы за заданный промежуток времени.

$$A = A_7CD = A_7(A_2 + A_1A_6 + A_3)(A_4 + A_5)$$

Противоположное событие:

$$\overline{A} = \overline{A_7(A_2 + A_1A_6 + A_3)(A_4 + A_5)} = \overline{A_7} + \overline{A_2 + A_1A_6 + A_3} + \overline{A_4 + A_5} =$$

$$= \overline{A_7} + \overline{A_2} \cdot \overline{A_1A_6} \cdot \overline{A_3} + \overline{A_4} \cdot \overline{A_5} = \overline{A_7} + \overline{A_2}\left(\overline{A_1} + \overline{A_6}\right)\overline{A_3} + \overline{A_4}\,\overline{A_5}$$

2)

$$P(B) = P(A_1A_6) = P(A_1)P(A_6) = 0.2 \cdot 0.2 = 0.04$$

$$P(C) = P(A_2 + B + A_3) = 1 - \big(1 - P(A_2)\big)\big(1 - P(B)\big)\big(1 - P(A_3)\big) =$$

$$= 1 - 0.9 \cdot 0.96 \cdot 0.9 = 0.2224.$$

$$P(D) = 1 - \big(1 - P(A_4)\big)\big(1 - P(A_5)\big) = 1 - 0.7 \cdot 0.8 = 0.44$$

$$P(A) = P(A_7CD) = P(A_7) \cdot P(C) \cdot P(D) = 0.3 \cdot 0.2224 \cdot 0.44 = 0.0293568$$

Ответ: $P(A) = 0.0293568$.

5. В первой урне находятся 5 белых и 4 черных шаров, во второй урне — 6 белых и 3 черных шаров. Сначала из первой урны во вторую перекладывается наугад 5 шаров, затем также наугад перекладывается из второй урны в первую 4 шара.

а) Определите вероятность того, что после вскрытия первой урны в ней будет столько же черных шаров, сколько было до проведения опыта.

б) После вскрытия первой урны оказалось, что в ней столько же чёрных шаров, сколько было до проведения опыта. Вычислите вероятность того, что при этом условии из первой урны во вторую переложили 2 белых шара.

Решение:

Введём следующие гипотезы:

H_i – из первой урны во вторую переложили i белых шаров;

$$\text{C}_9^5 = \frac{9!}{5!\,4!} = \frac{9 * 8 * 7 * 6}{2 * 3 * 4} = 126$$

$$P(H_1) = \frac{\text{C}_5^1\text{C}_4^4}{\text{C}_9^5} = \frac{5}{126}; (\text{в } 1 - \text{ой урне } 4\text{б}, \text{во } 2 - \text{ой } 7\text{б} + 7\text{ч})$$

$$P(H_2) = \frac{\text{C}_5^2\text{C}_4^3}{\text{C}_9^5} = \frac{40}{126}; (\text{в } 1 - \text{ой урне } 3\text{б} + 1\text{ч}, \text{во } 2 - \text{ой } 8\text{б} + 6\text{ч})$$

$$P(H_3) = \frac{\text{C}_5^3\text{C}_4^2}{\text{C}_9^5} = \frac{60}{126} (\text{в } 1 - \text{ой урне } 2\text{б} + 2\text{ч}, \text{во } 2 - \text{ой } 9\text{б} + 5\text{ч})$$

$$P(H_4) = \frac{\text{C}_5^4\text{C}_4^3}{\text{C}_9^5} = \frac{20}{126} (\text{в } 1 - \text{ой урне } 1\text{б} + 3\text{ч}, \text{во } 2 - \text{ой } 10\text{б} + 4\text{ч})$$

$$P(H_5)=\frac{C_4^4}{C_9^5}=\frac{1}{126}(\text{в } 1-\text{ой урне } 4\text{ч}, \text{во } 2-\text{ой } 11\text{б}+3\text{ч})$$

Убеждаемся, что гипотезы образуют полную группу несовместных событий

$$\sum_i P(H_i)=1.$$

а) Пусть событие A – после вскрытия первой урны в ней будет столько же черных шаров (4), сколько было до проведения опыта. Тогда при перекладке 4-х шаров в первую урну во второй урне изначально 14 шаров.

$$C_{14}^4=\frac{14!}{4!\,10!}=1001$$

$$P(A|H_1)=\frac{C_7^4}{C_{14}^4}=\frac{35}{1001};\ P(A|H_2)=\frac{C_8^1\cdot C_6^3}{C_{14}^4}=\frac{160}{1001};$$

$$P(A|H_3)=\frac{C_9^2\cdot C_5^2}{C_{14}^4}=\frac{360}{1001};\ P(A|H_4)=\frac{C_{10}^3\cdot C_4^1}{C_{14}^4}=\frac{480}{1001};$$

$$P(A|H_5)=\frac{C_{11}^4}{C_{14}^4}=\frac{330}{1001}.$$

Воспользуемся формулой полной вероятности:

$$P(A)=\sum_i P(H_i)\cdot P(A|H_i)$$

$$P(A)=\frac{5}{126}\cdot\frac{35}{1001}+\frac{40}{126}\cdot\frac{160}{1001}+\frac{60}{126}\cdot\frac{360}{1001}+\frac{20}{126}\cdot\frac{480}{1001}+\frac{1}{126}\cdot\frac{330}{1001}=\frac{38105}{126126}$$

б) Пусть событие A – после вскрытия первой урны в ней будет столько же чёрных шаров (4), сколько было до проведения опыта. Вероятность того, что при этом условии из первой урны во вторую переложили 2 белых шара можно определить по формуле Байеса:

$$P(H_2|A)=\frac{P(H_2)\cdot P(A|H_2)}{P(A)};$$

$$P(H_2|A)=\frac{\frac{40}{126}\cdot\frac{160}{1001}}{\frac{38105}{126126}}=\frac{1280}{7621}.$$

Ответ: а) $\frac{38105}{126126}$; б) $\frac{1280}{7621}$.

6. Вероятность попадания в цель при любом из 8 выстрелов равна 0,6. Найдите вероятность того, что произойдет:

а) Ровно 5 попаданий.

б) Не более 5 попаданий.

в) Не менее 5 попаданий.

г) От 3 до 6 попаданий.

Решение: по формуле Бернулли вероятность m успехов в серии из n испытаний определяется по формуле:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

а) ровно 5 попаданий;

$$P_8(5) = C_8^5 0.6^5 \cdot 0.4^3 = \frac{8!}{5!\,3!} \cdot \frac{3^5 \cdot 2^3}{5^8} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 3} \cdot \frac{3^5 \cdot 2^3}{5^8} = 0.2322432$$

б) Пусть событие А - не более 5-ти попаданий

$$P(A) = P_8(0) + P_8(1) + P_8(2) + P_8(3) + P_8(4) + P_8(5)$$

$$P_8(0) = 0.4^8 = 0.00065536$$

$$P_8(1) = C_8^1 \cdot 0.4 \cdot 0.6^6 = 8 \cdot 0.4 \cdot 0.6^6 = 0.00786432$$

$$P_8(2) = C_8^2 \cdot 0.4^2 \cdot 0.6^6 = 28 \cdot 0.4^2 \cdot 0.6^6 = 0.04128768$$

$$P_8(3) = C_8^3 \cdot 0.4^3 \cdot 0.6^5 = 56 \cdot 0.4^3 \cdot 0.6^5 = 0.12386304$$

$$P_8(4) = C_8^4 \cdot 0.4^4 \cdot 0.6^4 = 70 \cdot 0.4^4 \cdot 0.6^4 = 0.2322432$$

$$P_8(5) = C_8^5 \cdot 0.4^5 \cdot 0.6^3 = 56 \cdot 0.4^5 \cdot 0.6^3 = 0.27869184$$

$$P(A) = 0.00065536 + 0.00786432 + 0.04128768 + 0.12386304 +$$
$$+0.2322432 + 0.27869184 = 0.68460544$$

в) Пусть событие В - не менее 5 попаданий, тогда $\overline{B}$ – менее 5 попаданий

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P_8(0) - P_8(1) - P_8(2) - P_8(3) - P_8(4)$$

$$P(B) = 1 - 0.00065536 - 0.00786432 - 0.04128768 - 0.12386304 -$$

$$-0.2322432 = 0.5940864$$

г) С - от 3 до 6 попаданий включительно

$$P_8(6) = C_8^6 \cdot 0.4^6 \cdot 0.6^2 = 28 \cdot 0.4^6 \cdot 0.6^2 = 0.20901888$$

$$P(C) = P_8(3) + P_8(4) + P_8(5) + P_8(6) = 0.12386304 + 0.2322432 +$$

$$+0.27869184 + 0.20901888 = 0.84381696$$

Ответ: а) 0.2322432; б)0.68460544; в) 0.5940864; г)0.84381696.

7. Определите вероятность того, что среди 800 изготовленных изделий бракованными окажутся:

а) ровно 2 изделий.

б) не более 5 изделий

если вероятность брака равна 0,005 и определите вероятность того, что среди 1400 изготовленных изделий бракованными окажутся

в) ровно 25 изделий.

г) от 40 до 70 изделий

если вероятность брака равна 0,025

Решение:

а) Поскольку вероятность «успеха» - брака изделия $p = 0.005$ достаточно мала, а число испытаний велико, то будем использовать формулу Пуассона:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!},$$

$$\lambda = np.$$

Итак, $n = 800$, $p = 0.005$, следовательно, $\lambda = 4$.

Ровно 4 изделия окажутся бракованными:

$$P_{800}(4) = \frac{4^2 e^{-4}}{2!} \approx 0.1465$$

б) А – бракованными окажутся не более 5 изделий

$$P(A) = P_{800}(0) + P_{800}(1) + P_{800}(2) + P_{800}(3) + P_{800}(4) + P_{800}(5) =$$

$$= e^{-4}\left(1 + 4 + \frac{4^2}{2} + \frac{4^3}{3!} + \frac{4^4}{4!} + \frac{4^5}{5!}\right) = \frac{643}{15e^4} \approx 0.7851$$

в) Итак, $n = 1400, p = 0.005, np = 35, npq = 34.125$

По формуле Муавра-Лапласа вероятность m успехов в серии из n испытаний определяется по формуле:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

где $\varphi(x)$ – интегральная функция Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. При этом считаем, что $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Значения функции находим из таблиц.

$$P_{1400}(25) \approx \frac{1}{\sqrt{34.125}} \varphi\left(\frac{25-35}{\sqrt{34.125}}\right) = \frac{1}{\sqrt{34.125}} \varphi(-1.71) \approx 0.0158$$

г) Воспользуемся интегральной теоремой Муавра-Лапласа (m – число успехов в серии из n испытаний):

$$P(a < m < b) = \Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}}\right),$$

где $\Phi_0(x)$ – интегральная функция Лапласа $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-x^2/2}\, dx$. При этом считаем, что $\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$, При $x > 5$ принимаем $\Phi_0(x) \approx 0.5$. Значения функции находим из таблиц.

$$P(40 < m < 70) = \Phi_0\left(\frac{70-35}{\sqrt{34.125}}\right) - \Phi_0\left(\frac{40-35}{\sqrt{34.125}}\right) \approx \Phi_0(5.99) - \Phi_0(0.86) \approx$$

$$\approx 0.5 - 0.3051 = 0.1949$$

Ответ: а)0.1465; б)0.7851; в)0.0158; г) 0.1949.

8. В наборе 6 шара белого цвета, 5 шара синего и 4 шаров красного цвета. Из набора случайным образом без возвращения вынимают 5 шаров. Случайная величина ξ – число вынутых красных шаров. Найдите:

а) Ряд распределения случайной величины ξ.

б) Вероятность попадания случайной величины ξ в интервалы

(2; 5), [2; 5); (2; 5], [2; 5].

в) Найдите ряд распределения случайных величин $\eta = |9 - 2\xi^2|, \mu = 125 - (64 - \xi^3)$.

Решение:

ξ может принимать значение от 0 до 4,

$$P(\xi = k) = \frac{C_4^k C_{11}^{5-k}}{C_{15}^5}$$

$$C_{15}^5 = \frac{15!}{5!\,10!} = \frac{15 * 14 * 13 * 12 * 11}{2 * 3 * 4 * 5} = 3003$$

Число способов $C_4^k C_{11}^{5-k}$:

k	0	1	2	3	4
$C_4^k C_{11}^{5-k}$	462	1320	990	220	11

а) Ряд распределения случайной величины ξ.

ξ	0	1	2	3	4
p	0,153846	0,439560	0,329670	0,073260	0,003663

б) Вероятность попадания случайной величины ξ в интервалы

$$P(\xi \in (2;\ 5)) = P(\xi = 3) + P(\xi = 4) = 0.076923$$

$$P(\xi \in [2;\ 5)) = P(\xi = 2) + P(\xi = 3) + P(\xi = 4) = 0.406593$$

$$P(\xi \in\ (2; 5]) = P(\xi \in (2;\ 5)) = 0.076923$$

$$P(\xi \in [2;\ 5]) = P(\xi \in [2;\ 5)) = 0.406593$$

в) Ряд распределения случайных величин

$$\eta = |9 - 2\xi^2|, \mu = 125 - (64 - \xi^3) = 61 + \xi^3$$

Вычислим значения случайных величин η и μ:

ξ	0	1	2	3	4
η	9	7	1	9	23
μ	61	62	69	88	125
p	0,153846	0,439560	0,329670	0,073260	0,003663

Составим ряд распределения η и μ, упорядочив значения случайных величин по возрастанию и, если надо, складывая вероятности при одинаковых значениях:

η	1	7	9	23
p	0,329670	0,439560	0,227106	0,003663

μ	61	62	69	88	125
p	0,153846	0,439560	0,329670	0,073260	0,003663

9. Непрерывная случайная величина ξ имеет плотность распределения $p(x)$.

$$p(x) = \begin{cases} A|x^3+8|, & -3 \le x \le 1 \\ 0, & x \le -3, x > 1 \end{cases}.$$

Найдите:

а) Константу A

По условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$$

$$-A\int_{-3}^{-2}(x^3+8)dx + A\int_{-2}^{1}(x^3+8)dx = -A\left(\frac{x^4}{4}+8x\right)\Big|_{-3}^{-2} + A\left(\frac{x^4}{4}+8x\right)\Big|_{-2}^{1} =$$
$$= \left(\frac{33}{4}+\frac{81}{4}\right)A = \frac{57A}{2} \Longrightarrow A = \frac{2}{57}$$

б) Функцию распределения случайной величины ξ и постройте ее график.

Найдём функцию распределения:

При $-3 < x \le -2$:

$$F_\xi(x) = \frac{2}{57}\int_{-3}^{x}(-x^3-8)dx = \frac{2}{57}\left(-\frac{x^4}{4}-8x\right)\Big|_{-3}^{x} = \frac{-x^4-32x-15}{114}$$

$$F_\xi(-2) = \frac{11}{38}$$

При $-2 < x \le 1$:

$$F_\xi(x) = \frac{11}{38}+\frac{1}{8}\int_{-2}^{x}(x^3+8)dx = \frac{11}{38}+\frac{1}{8}\left(\frac{x^4}{4}+8x\right)\Big|_{-2}^{x} = \frac{x^4+32x+81}{114}$$

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le -3 \\ \dfrac{-x^4-32x-15}{114}, & -3 < x \le -2 \\ \dfrac{x^4+32x+81}{114}, & -2 < x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

в) Вычислите функцию распределения и плотность распределения случайной величины $\eta = (\xi - 1)^3 - 1$.

$$F_\eta(y) = P(\eta < y) = P((\xi - 1)^3 - 1 < y) = P((\xi - 1)^3 < y + 1) =$$

$$= P\left(\xi < 1 + \sqrt[3]{y+1}\right) = F_\xi\left(1 + \sqrt[3]{y+1}\right)$$

$$x = -3 \Longrightarrow y = -65, \qquad x = -2 \Longrightarrow y = -28, \qquad x = 1 \Longrightarrow y = -1$$

При $-3 < x \le -2$, $-65 < y \le -28$:

$$F_\eta(y) = \frac{-\left(1 + \sqrt[3]{y+1}\right)^4 - 32\left(1 + \sqrt[3]{y+1}\right) - 15}{114}$$

При $-2 < x \le 1$, $-28 < y \le -1$:

$$F_\eta(y) = \frac{\left(1 + \sqrt[3]{y+1}\right)^4 + 32\left(1 + \sqrt[3]{y+1}\right) + 81}{114}$$

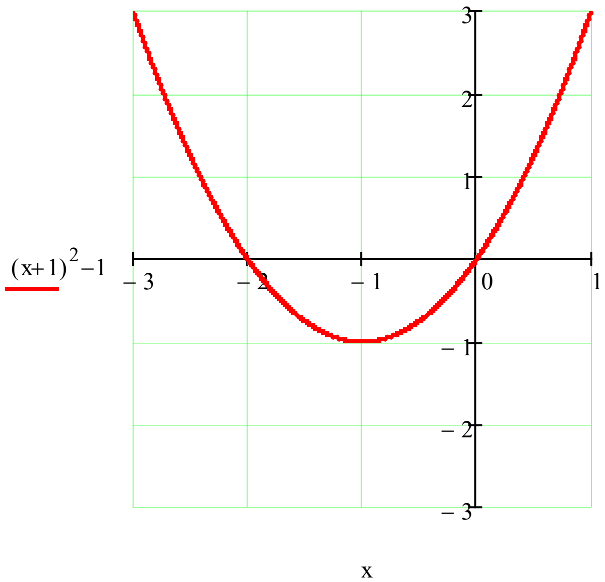
Итак

$$F_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \le -65 \\ \dfrac{-\left(1 + \sqrt[3]{y+1}\right)^4 - 32\sqrt[3]{y+1} - 47}{114}, & -65 < y \le -28 \\ \dfrac{\left(1 + \sqrt[3]{y+1}\right)^4 + 32\sqrt[3]{y+1} + 113}{114}, & -28 < y \le -1 \\ 1, & y > -1 \end{cases}$$

$$p_\eta(y) = F'_\eta(y)$$

$$p_\eta(y) = \begin{cases} -\dfrac{16\sqrt[3]{y+1} + 2\left(1+\sqrt[3]{y+1}\right)^3 \sqrt[3]{y+1}}{171(y+1)}, & -65 < y \le -28 \\ \dfrac{16\sqrt[3]{y+1} + 2\left(1+\sqrt[3]{y+1}\right)^3 \sqrt[3]{y+1}}{171(y+1)}, & -28 < y \le -1 \\ 0, & y \le -65, y > -28 \end{cases}$$

г) Вычислите функцию распределения и плотность распределения случайной величины $\mu = (\xi+1)^2 - 1$



$$y = (x+1)^2 - 1$$

$$p_\mu(y) = p_\xi(g(y))|g'(y)|$$

$$(x+1)^2 = y+1, \qquad x = -1 \pm \sqrt{y+1}$$

$$g(y) = -1 + \sqrt{y+1} \text{ при } x \ge -1$$

$$g(y) = -1 - \sqrt{y+1} \text{ при } x < -1$$

$$|g'(y)| = \frac{1}{2\sqrt{y+1}}$$

$$x = -3 \text{ и } x = 1 \Rightarrow y = 3, \qquad x = -1 \Rightarrow y = -1, \quad x = -2 \text{ и } x = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$y \in [-1; 3]$$

При $-1 < y \le 0$.

$$p_\mu(y)=\frac{2}{57}\left(\left(-1-\sqrt{y+1}\right)^3+8+\left(-1+\sqrt{y+1}\right)^3+8\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{y+1}}=\frac{2(4-3y)}{57\sqrt{y+1}}$$

При $0<y\le 3$.

$$p_\mu(y)=\frac{2}{57}\left(-\left(-1-\sqrt{y+1}\right)^3-8+\left(-1+\sqrt{y+1}\right)^3+8\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{y+1}}=\frac{2y+8}{57}$$

Итак,

$$p_\mu(y)=\begin{cases}\dfrac{2(4-3y)}{57\sqrt{y+1}}, & -1<y\le 0\\ \dfrac{2y+8}{57}, & 0<y\le 3\\ 0, & y\notin[-1,15]\end{cases}$$

Найдём $F_\mu(y)$.

При $-1<y\le 0$.

$$F_\mu(y)=\int_{-1}^{y}\frac{2(4-3y)}{57\sqrt{y+1}}dy=\frac{2}{57}\int_{-1}^{y}\frac{4-3(y+1)+3}{\sqrt{y+1}}dy=$$

$$=\frac{14}{57}\int_{-1}^{y}\frac{1}{\sqrt{y+1}}dy-\frac{6}{57}\int_{-1}^{y}\sqrt{y+1}dy=\frac{28\sqrt{y+1}}{57}\Bigg|_{-1}^{y}-\frac{6}{57}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2(y+1)\sqrt{y+1}}{3}\Bigg|_{-1}^{y}=$$

$$=\frac{4\sqrt{y+1}(6-y)}{57};\ F_\mu(0)=\frac{8}{19}$$

При $0<y\le 3$.

$$F_\mu(y)=\frac{8}{19}+\int_{0}^{y}\frac{2y+8}{57}dy=\frac{y^2+8y+24}{57};\ F_\mu(3)=1$$

$$F_\eta(y)=\begin{cases}0, & y\le -1\\ \dfrac{4\sqrt{y+1}(6-y)}{57}, & -1<y\le 0\\ \dfrac{y^2+8y+24}{57}, & 0<y\le 3\\ 1, & y>15\end{cases}$$

10. В условиях задачи 8 выбирают $m = 5$ шаров. (В наборе 6 шаров белого цвета, 5 шаров синего и 4 шаров красного цвета). Пусть ξ число вынутых красных шаров, а через η – синих.

Найдите:

а) Совместное распределение случайных величин ξ и η (ряд распределения).

ξ может принимать значение от 0 до 4, η может принимать значение от 0 до 5. Всего 15 шаров, извлекаем 5.

$$P(\xi = k, \eta = m) = \frac{C_4^k C_5^m C_6^{5-k-m}}{C_{15}^5}; \; C_{15}^5 = \frac{15!}{5!\,10!} = 3003$$

Число способов $C_4^k C_5^m C_6^{5-k-m}$:

$k \setminus m$	0	1	2	3	4	5
0	6	75	200	150	30	1
1	60	400	600	240	20	
2	120	450	360	60		
3	60	120	40			
4	6	5				

Совместное распределение случайных величин ξ и η

$\xi \setminus \eta$	0	1	2	3	4	5	Сумма
0	0,001998	0,024975	0,0666	0,04995	0,00999	0,000333	0,153846
1	0,01998	0,1332	0,1998	0,07992	0,00666		0,43956
2	0,03996	0,14985	0,11988	0,01998			0,32967
3	0,01998	0,03996	0,01332				0,07326
4	0,001998	0,001665					0,003663
Сумма	0,083916	0,34965	0,3996	0,14985	0,01665	0,000333	1

б) Ряды распределения случайных величин ξ и η.

ξ	0	1	2	3	4
$P(\xi)$	0,153846	0,439560	0,329670	0,073260	0,003663

η	0	1	2	3	4	5
$P(\eta)$	0,083916	0,34965	0,3996	0,14985	0,01665	0,000333

в) Условные распределения случайной величины ξ при условии η, случайной величины η при условии ξ, проверить случайные величины на независимость

Условные распределения:

$$P(\xi = k|\eta = m) = \frac{P(\xi = k, \eta = m)}{P(\eta = m)}$$

Условный закон распределения $P(\xi = k|\eta = 0)$:

ξ	P
0	0,02381
1	0,238095
2	0,47619
3	0,238095
4	0,02381
Сумма	1

Условный закон распределения $P(\xi = k|\eta = 1)$:

ξ	P
0	0,071429
1	0,380952
2	0,428571
3	0,114286
4	0,004762
Сумма	1

Условный закон распределения $P(\xi = k|\eta = 2)$:

ξ	P
0	0,166667
1	0,5
2	0,3
3	0,033333
Сумма	1

Условный закон распределения $P(\xi = k|\eta = 3)$:

ξ	P
0	0,333333
1	0,533333
2	0,133333
Сумма	1

Условный закон распределения $P(\xi = k|\eta = 4)$:

ξ	P
0	0,6
1	0,4
Сумма	1

Условный закон распределения $P(\xi = 0|\eta = 5) = 1$.

$$P(\eta = m|\xi = k) = \frac{P(\xi = k, \eta = m)}{P(\xi = k)}$$

Условный закон распределения $P(\eta = m|\xi = 0)$:

η	0	1	2	3	4	5	Сумма
P	0,012987	0,162338	0,4329	0,324675	0,064935	0,002165	1

Условный закон распределения $P(\eta = m|\xi = 1)$:

η	0	1	2	3	4	Сумма
P	0,045455	0,30303	0,454545	0,181818	0,015152	1

Условный закон распределения $P(\eta = m|\xi = 2)$:

η	0	1	2	3	Сумма
P	0,121212	0,454545	0,363636	0,060606	1

Условный закон распределения $P(\eta = m|\xi = 3)$:

η	0	1	2	Сумма
P	0,272727	0,545455	0,181818	1

Условный закон распределения $P(\eta = m|\xi = 4)$:

η	0	1	Сумма
P	0,545455	0,454545	1

Для независимых случайных величин

$$P(\xi = x, \eta = y) = P(\xi = x)P(\eta = y)$$

Например

$$P(\xi = 0, \eta = 0) = \frac{6}{3003}$$

$$P(\xi = 0)P(\eta = 0) = \frac{252}{3003} \cdot \frac{462}{3003} \neq \frac{6}{3003}$$

Равенство

$$P(\xi = 0, \eta = 0) = P(\xi = 0)P(\eta = 0) - \text{неверно}$$

Следовательно, ξ и η зависимы.

г) Значения двумерной функции распределения $F_{\xi\eta}(x, y)$в заданных точках $(x, y) = (7; 3), (4; 7), (4; 3)$,

$$F_{\xi\eta}(4, 7) = P(\xi < 4, \eta < 7) = P(\xi < 4) = 1 - P(\xi = 4) =$$

$$= 1 - 0.153846 \approx 0.846154$$

$$F_{\xi\eta}(7,3) = P(\xi < 7, \eta < 3) = P(\eta < 3) = 0.083916 + 0.34965 + 0.14985 =$$

$$= 0.833167$$

$$F_{\xi\eta}(4,3) = P(\xi < 4, \eta < 3) = P(\eta < 3) - P(\xi = 4; \eta = 0) - P(\xi = 4; \eta = 1) =$$

$$= 0.833167 - 0.02381 - 0.004762 = 0.829504$$

д) Ряд распределения новой случайной величины $\mu = |\xi^2 - \eta^2|$

Составим таблицу значений случайной величины μ:

$\xi \setminus \eta$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	4	9	16	25
1	1	0	3	8	15	
2	4	3	0	5		
3	9	8	5			
4	16	15				

Далее определяем соответствующие вероятности, складывая вероятности при одинаковых значениях μ:

μ	0	1	3	4	5
$P(\mu)$	0,255078	0,044955	0,349650	0,106560	0,033300

μ	8	9	15	16	25
$P(\mu)$	0,119880	0,069930	0,008325	0,011988	0,000333

е) Ряд распределения новой двумерной дискретной случайной величины (μ_1; μ_2)

$$\mu_1 = 2\big(\xi - (3 - \eta)\big), \mu_2 = 3\eta - 2(\xi - 3)$$

Составим таблицу значений случайной величины μ_1:

$\xi \setminus \eta$	0	1	2	3	4	5
0	-6	-4	-2	0	2	4
1	-4	-2	0	2	4	
2	-2	0	2	4		
3	0	2	4			
4	2	4				

Далее определяем соответствующие вероятности, складывая вероятности при одинаковых значениях μ:

μ_1	-6	-4	-2	0	2	4
$P(\mu)$	0,001998	0,044955	0,239760	0,419580	0,251748	0,041958

Составим таблицу значений случайной величины μ_2:

$\xi \setminus \eta$	0	1	2	3	4	5
0	6	9	12	15	18	21
1	4	7	10	13	16	
2	2	5	8	11		
3	0	3	6			
4	-2	1				

Далее определяем соответствующие вероятности, складывая вероятности при одинаковых значениях μ:

μ_2	-2	0	1	2	3	4	5
$P(\mu)$	0,001998	0,019980	0,001665	0,039960	0,039960	0,019980	0,149850
μ_2	6	7	8	9	10	11	12
$P(\mu)$	0,015318	0,133200	0,119880	0,024975	0,199800	0,019980	0,066600
μ_2	13	15	16	18	21	13	15
$P(\mu)$	0,079920	0,049950	0,006660	0,009990	0,000333	0,079920	0,049950

Совместное распределение случайных величин μ_1 и μ_2

$\mu_1 \setminus \mu_2$	-2	0	1	2	3	4	5
-6							
-4						0,01998	
-2				0,03996			
0		0,01998					0,14985
2	0,001998				0,03996		
4			0,001665				

Продолжение таблицы справа:

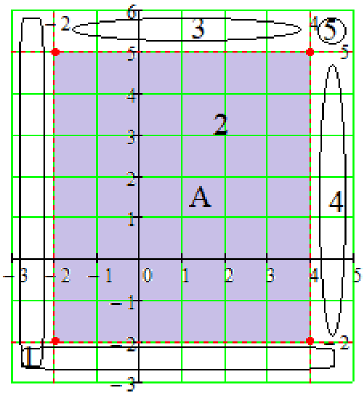
$\mu_1 \setminus \mu_2$	6	7	8	9	10	11	12
-6	0,001998						
-4				0,024975			
-2		0,1332					0,0666
0					0,1998		
2			0,11988				
4	0,01332					0,01998	

$\mu_1 \setminus \mu_2$	13	15	16	18	21
-6					
-4					
-2					
0		0,04995			
2	0,07992			0,00999	
4			0,00666		0,000333

11. В четырехугольник с вершинами в точках $(-2;-2), (-2;5), (4;5), (4;-2)$ в соответствии с принципом геометрической вероятности падает частица. Пусть ξ и η - координаты по оси X и У точки падения частицы.

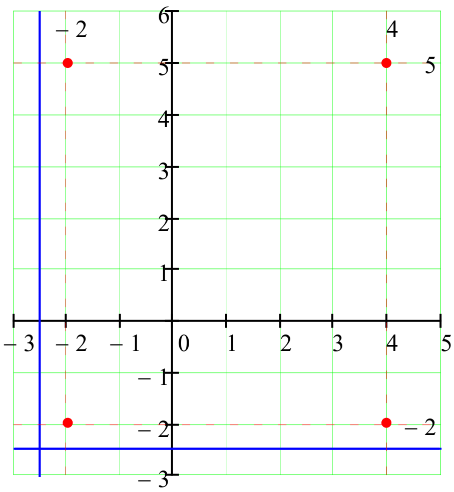
Найдите:

а) Совместную функцию распределения $F_{\xi\eta}(x,y)$ случайной величины (ξ,η) и совместную плотность распределения случайной величины (ξ,η).

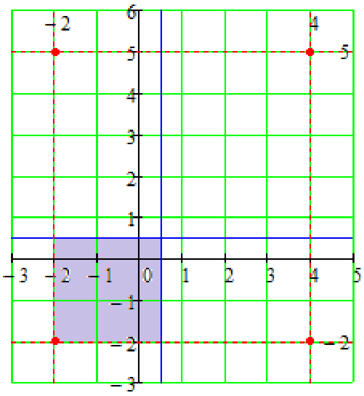


Всего имеем 5 различных областей.

Область 1: $(x < -2)$или $(y < -2)$:



Пересечения с четырёхугольником нет, $F_{\xi\eta}(x,y) = 0$.
Область 2: $(x,y) \in D$:

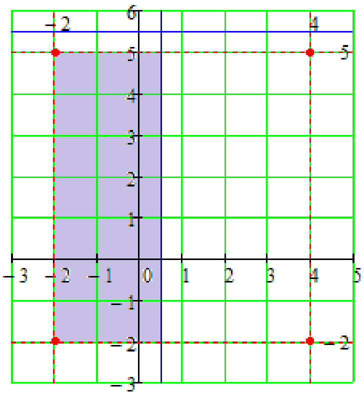


$$F_{\xi\eta}(x,y)=\frac{1}{S_D}\int\limits_{-2}^{x}\int\limits_{-2}^{y}dxdy$$

$S_D=42$ – площадь области.

$$F_{\xi\eta}(x,y)=\frac{1}{42}\int\limits_{-2}^{x}dx\int\limits_{-2}^{y}dy=\frac{(x+2)(y+2)}{42}.$$

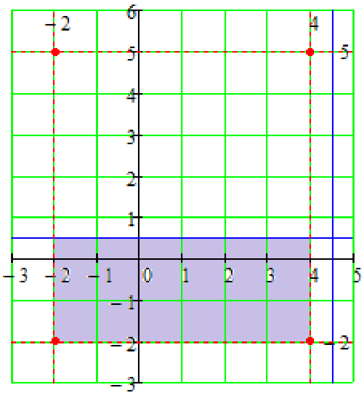
Область 3: $(-2<x\le 4)$и$(y>5)$:



$$F_{\xi\eta}(x,y)=\frac{1}{S_D}\int\limits_{-2}^{x}\int\limits_{-2}^{3}dxdy$$

$$F_{\xi\eta}(x,y)=\frac{1}{42}\int\limits_{-2}^{x}dx\int\limits_{-2}^{5}dy=\frac{x+2}{6}.$$

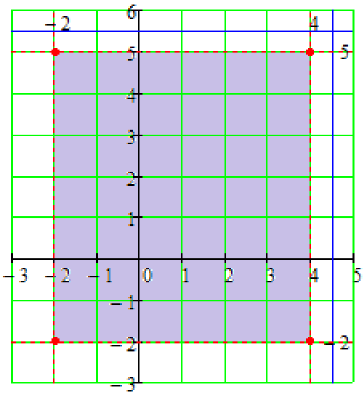
Область 4: $(x>4)$и$(-2<y\le 5)$:



$$F_{\xi\eta}(x,y) = \frac{1}{S_D}\int\limits_{-2}^{2}\int\limits_{-2}^{y} dxdy$$

$$F_{\xi\eta}(x,y) = \frac{1}{42}\int\limits_{-2}^{4} dx \int\limits_{-2}^{y} dy = \frac{y+2}{7}.$$

Область 5: $(x > 4)$и$(y > 5)$:



$$F_{\xi\eta}(x,y) = \frac{1}{S_D}\int\limits_{-2}^{4}\int\limits_{-2}^{5} dxdy = \frac{1}{20}\int\limits_{-2}^{4}\int\limits_{-2}^{5} dxdy = 1.$$

$$F_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} 0, & (x < -2) \text{ или } (y < -2) \\ \dfrac{(x+2)(y+2)}{42}, & (x,y) \in D \\ \dfrac{x+2}{6}, & (-2 < x \le 4)\text{и}(y > 5) \\ \dfrac{y+2}{7}, & (x > 4)\text{и}(-2 < y \le 5) \\ 1, & (x > 4) \text{ и } (y > 5) \end{cases}$$

Поскольку площадь четырёхугольника D равна 42, и точки распределены в соответствии с принципом геометрической вероятности то совместная плотность распределения имеет равномерное распределение внутри D:

$$p_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{42}, (x,y) \in D \\ 0, (x,y) \notin D \end{cases}.$$

б) Одномерные плотности и функции распределения случайных величин ξ и η.

$$p_{\xi}(x) = \int_{-2}^{5} p_{\xi\eta}(x,y)\,dy = \frac{1}{42}\int_{-2}^{5} 1\,dy = \frac{1}{6}$$

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & x \in [-2;4] \\ 0, & x \notin [-2;4] \end{cases}.$$

$$F_{\xi}(x) = \int_{-2}^{x} p_{\xi}(x)\,dx = \frac{x+2}{6}, \qquad -2 < x \le 4$$

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2 \\ \frac{x+2}{6}, & -2 < x \le 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$

$$p_{\eta}(y) = \int_{-2}^{4} p_{\xi\eta}(x,y)\,dx = \frac{1}{42}\int_{-2}^{4} 1\,dy = \frac{1}{7}$$

$$p_{\eta}(y) = \begin{cases} \frac{1}{7}, & y \in [-2;5] \\ 0, & y \notin [-2;5] \end{cases}.$$

$$F_{\eta}(y) = \int_{-2}^{y} p_{\eta}(y)\,dy = \frac{y+2}{7}, \qquad -2 < y \le 5$$

$$F_{\eta}(y) = \begin{cases} 0, & y \le -2 \\ \frac{y+2}{7}, & -2 < y \le 5 \\ 1, & y > 5 \end{cases}$$

в) Условные функции распределения и условные плотности распределения случайной величины ξ при условии η, и случайной величины η при условии ξ. Проверьте, будут ли эти случайные величины независимыми

Условная плотность распределения

$$p_\xi(x|y) = \frac{p_{\xi\eta}(x,y)}{p_\eta(y)} = \frac{1}{6} \text{ при } (x,y) \in D$$

Условная плотность распределения

$$p_\eta(y|x) = \frac{p_{\xi\eta}(x,y)}{p_\xi(x)} = \frac{1}{7} \text{ при } (x,y) \in D$$

Для независимых случайных величин должно выполняться равенство:

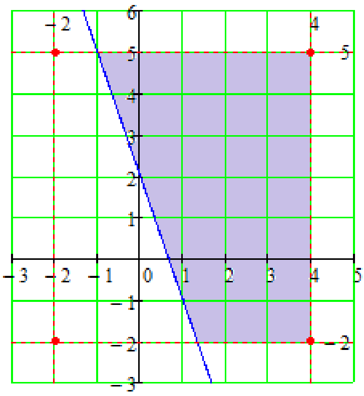
$$p_\xi(x|y) = p_\xi(x) - \text{верно}$$

Следовательно, случайные величины независимы. Условные функции распределения совпадают с одномерными:

$$F_\xi(x|y) = \begin{cases} 0, & x \le -2 \\ \dfrac{x+2}{6}, & -2 < x \le 4; \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$

$$F_\eta(y|x) = \begin{cases} 0, & y \le -2 \\ \dfrac{y+2}{7}, & -2 < y \le 5 \\ 1, & y > 5 \end{cases}$$

г) Значение функции распределения случайной величины $\mu = -3\xi - \eta$ в точке $z = -2$.



$$2 - 3x = -2 \Rightarrow \frac{4}{3}$$

$$F_\mu(-2) = P(-3\xi - \eta < -2) = P(\eta > 2 - 3\xi) = \frac{S_D}{S} = \frac{\frac{5 + 2\frac{2}{3}}{2} \cdot 7}{42} = \frac{23}{36}$$

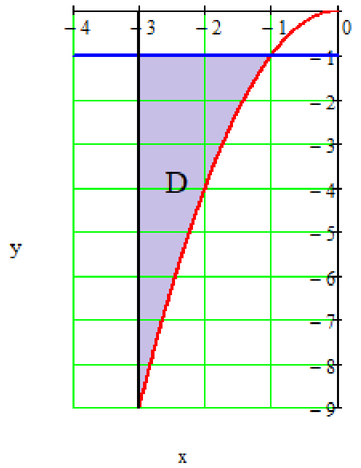
12. Совместная плотность распределения случайных величин ξ и η задана формулой

$$p_{\xi\eta}(x,y) = C(-3x+2y^2), (x,y) \in D,$$

где область $D = \{(x;y): x=-3, y=-1, y=-x^2\}$.

Найдите:

а) Постоянную C.



По закону нормировки

$$\iint\limits_D p_{\xi\eta}(x,y)dxdy = 1,$$

$$D: \begin{cases} -9 \le y \le -1 \\ -3 \le x \le -\sqrt{-y} \end{cases}$$

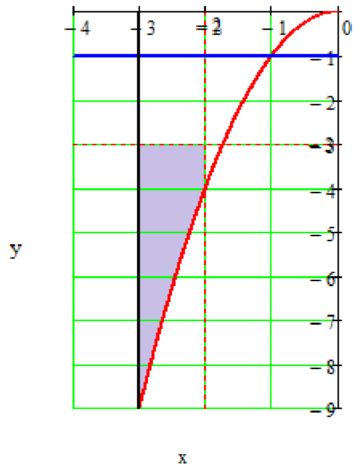
$$\int_{-9}^{-1} dy \int_{-3}^{-\sqrt{-y}} C(-3x+2y^2)\, dx = C\int_{-9}^{-1} \left(\frac{-3x^2}{2} + 2y^2x\right)\Bigg|_{-3}^{-\sqrt{-y}} dy =$$

$$= C\int_{-9}^{-1} \left(6y^2 + \frac{3y}{2} - 2y^2\sqrt{-y} + \frac{27}{2}\right) dx =$$

$$= C\left(2y^3 + \frac{3y^2}{4} - \frac{4}{7}y^3\sqrt{-y} + \frac{27}{2}y\right)\Bigg|_{-9}^{-1} = \frac{1784}{7}C$$

$$C = \frac{7}{1784}$$

б) Значения двумерной функции распределения $F_{\xi\eta}(x,y)$ в заданных точках $(x,y) = (-2;-3)$



$$F_{\xi\eta}(-2,-3) = P(\xi < -2, \eta < -3) = \frac{7}{1784}\int_{-3}^{-2} dx \int_{-x^2}^{-3} (-3x + 2y^2)\, dy =$$

$$= \frac{7}{1784}\int_{-3}^{-2} \left(-3xy + \frac{2}{3}y^3\right)\Big|_{-x^2}^{-3} dx = \frac{7}{1784}\int_{-3}^{-2} \left(\frac{2x^6}{3} - 3x^3 + 9x - 18\right) dx =$$

$$= \frac{7}{1784}\left(\frac{2x^7}{7} - \frac{3}{4}x^4 + \frac{9}{2}x^2 - 18x\right)\Big|_{-3}^{-2} \approx 0.8018$$

в) Одномерные плотности и функции распределения случайных величин ξ и η.

$$p_\xi(x) = \frac{7}{1784}\int_{-x^2}^{-1} (-3x + 2y^2)\, dy = \frac{7}{1784}\left(-3xy + \frac{2}{3}y^3\right)\Big|_{-x^2}^{-1} =$$

$$= \frac{7(2x^6 - 9x^3 + 9x - 2)}{5352};$$

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \frac{7(2x^6 - 9x^3 + 9x - 2)}{5352}, x \in [-3; -1] \\ 0, \quad x \notin [-3; -1] \end{cases}$$

$$F_\xi(x) = \frac{7}{5352}\int_{-3}^{x} (2x^6 - 9x^3 + 9x - 2)\, dx = \frac{7}{5352}\left(\frac{2x^7}{7} - \frac{9}{4}x^4 + \frac{9}{2}x^2 - 2x\right)\Big|_{-3}^{x} =$$

$$= \frac{1}{21408}(8x^7 - 63x^4 + 126x^2 - 56x + 21297)$$

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, \quad x \le -3 \\ \frac{8x^7 - 63x^4 + 126x^2 - 56x + 21297}{21408}, \quad -3 < x \le -1 \\ 1, \quad x > -1 \end{cases}$$

Для случайной величины y:

$$p_\eta(y)=\int\limits_{-3}^{-\sqrt{-y}} p_{\xi\eta}(x,y)\,dx=\frac{7}{1784}\int\limits_{-3}^{-\sqrt{-y}}(-3x+2y^2)\,dx=$$

$$=\frac{7}{1784}\left(-\frac{3x^2}{2}+2y^2x\right)\Bigg|_{-3}^{-\sqrt{-y}}=\frac{7}{3568}\left(3y+12y^2-4y^2\sqrt{-y}+27\right)$$

$$p_\eta(y)=\begin{cases}\frac{7}{3568}\left(3y+12y^2-4y^2\sqrt{-y}+27\right), & y\in[-9;-1]\\ 0, & y\notin[-9;-1]\end{cases}.$$

$$F_\eta(y)=\int\limits_{-9}^{y} p_\eta(y)\,dy=\frac{7}{3568}\int\limits_{-9}^{y}\left(3y+12y^2-4y^2\sqrt{-y}+27\right)dy=$$

$$=\frac{7}{3568}\left(\frac{3y^2}{2}+4y^3-\frac{8y^3\sqrt{-y}}{7}+27y\right)\Bigg|_{-9}^{y}=$$

$$=\frac{1}{7136}\left(21y^2+56y^3+378y-16y^3\sqrt{-y}+7533\right)$$

$$F_\eta(y)=\begin{cases}0, & y\le -9\\ \frac{21y^2+56y^3+378y-16y^3\sqrt{-y}+7533}{7136}, & -9<y\le -1\\ 1, & y>-1\end{cases}$$

г) Условные функции распределения и условные плотности распределения случайной величины ξ при условии η, и случайной величины η при условии ξ. Проверьте, будут ли эти случайные величины независимыми

Условная плотность распределения

$$p_\xi(x|y)=\frac{p_{\xi\eta}(x,y)}{p_\eta(y)}$$

$$p_\xi(x|y)=\frac{\frac{7}{1784}(-3x+2y^2)}{\frac{7}{3568}\left(3y+12y^2-4y^2\sqrt{-y}+27\right)}=$$

$$=\frac{2(-3x+2y^2)}{3y+12y^2-4y^2\sqrt{-y}+27}\ \text{при}\ (x,y)\in D$$

Условная плотность распределения

$$p_\eta(y|x) = \frac{p_{\xi\eta}(x,y)}{p_\xi(x)}$$

$$p_\eta(y|x) = \frac{\frac{7}{1784}(-3x+2y^2)}{\frac{7(2x^6-9x^3+9x-2)}{5352}} = \frac{3(-3x+2y^2)}{2x^6-9x^3+9x-2} \text{при } (x,y)\in D$$

Для независимых случайных величин должно выполняться равенство:

$$p_\xi(x|y) = p_\xi(x) - \text{неверно}$$

Следовательно, случайные величины зависимы.

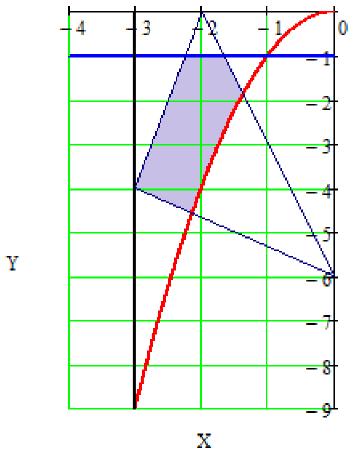
$$F_\xi(x|y) = \frac{2}{3y+12y^2-4y^2\sqrt{-y}+27}\int\limits_{-3}^{x}(-3x+2y^2)\,dx =$$

$$= \frac{2\left(-\frac{3x^2}{2}+2y^2x\right)\Big|_{-3}^{x}}{3y+12y^2-4y^2\sqrt{-y}+27} = \frac{-3x^2+4xy^2+12y^2+27}{3y+12y^2-4y^2\sqrt{-y}+27} \text{ при } (x,y)\in D$$

$$F_\eta(y|x) = \int\limits_{-9}^{y}\frac{3(-3x+2y^2)}{2x^6-9x^3+9x-2}dy = \frac{3\left(2x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{-9}^{y}}{2x^6-9x^3+9x-2} =$$

$$= \frac{2y^3-9xy-81x+1458}{2x^6-9x^3+9x-2} \text{при } (x,y)\in D$$

д) Вычислите вероятность попадания вектора (ξ,η) в треугольник с вершинами в точках $(-3;-4), (-2;0), (0;-6)$. (Записать интеграл, расставить пределы интегрирования, считать интеграл - не надо)



Стороны треугольника: от $(-2;0)$ до $(-3;-4)$; $y = 4x + 8$;

$$4x + 8 = -1 \Longrightarrow x = -\frac{9}{4} = -2.25$$

$$\text{от } (-2;0) \text{ до } (0;-6); y = -3x - 6;$$

$$-3x - 6 = -1 \Longrightarrow x = -\frac{5}{3}$$

$$-3x - 6 = -x^2 \Longrightarrow x_1 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2} \approx -1.372$$

$$\text{от } (-3;-4) \text{ до } (0;-6) \text{ ; } y = -\frac{2}{3}x - 6;$$

$$-\frac{2}{3}x - 6 = -x^2 \Longrightarrow x_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{55}}{3} \approx -2.139$$

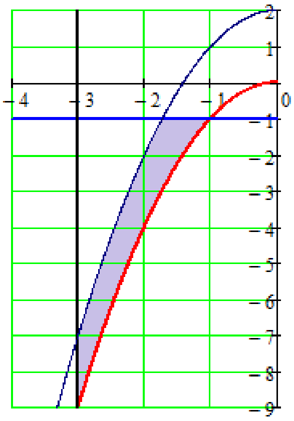
$$P = \frac{7}{1784}\int_{-3}^{-2.25} dx \int_{-\frac{2}{3}x-6}^{4x+8} (-3x^2 + 2y^2)\, dy +$$

$$+\frac{7}{1784}\int_{-2.25}^{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{55}}{3}} dx \int_{-\frac{2}{3}x-6}^{-1} (-3x^2 + 2y^2)\, dy +$$

$$+\frac{7}{1784}\int_{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{55}}{3}}^{-\frac{5}{3}} dx \int_{-x^2}^{-1} (-3x^2 + 2y^2)\, dy + \frac{7}{1784}\int_{-\frac{5}{3}}^{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{33}}{2}} dx \int_{-x^2}^{-3x-6} (-3x^2 + 2y^2)\, dy$$

е) Значение функции распределения $F_\mu(z)$ новой случайной величины $\mu = \xi^2 + \eta$ в точке $z = 3$. (Записать интеграл, расставить пределы интегрирования, считать интеграл - не надо)

$$F_\mu(2) = P(\xi^2 + \eta < 2) = P(\eta < 2 - \xi^2)$$



$$y = 2 - x^2 \Longrightarrow x = -\sqrt{2-y}$$

$$F_\mu(2) = \frac{7}{1784}\int_{-9}^{-7} dy \int_{-3}^{-\sqrt{-y}} (-3x^2 + 2y^2)\,dx +$$

$$+\frac{7}{1784}\int_{-7}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2-y}}^{-\sqrt{-y}} (-3x^2 + 2y^2)\,dx$$