1. В наборе 4 шара красного цвета, 4 шара синего и 3 шара белого цвета. Из набора случайным образом без возвращения вынимают 6 шаров. Найдите вероятность события

$$A = \{\text{красных шаров достали больше, чем белых, но не больше двух}\},$$

$$B = \{\text{шары хотя бы двух цветов}\}$$

Решение:

$$P = \frac{m}{n},$$

Где n - число всевозможных исходов эксперимента, m – число благоприятных исходов.

$$C_N^M = \frac{N!}{M!\,(N-M)!}$$

Извлекаем 6 шаров из 11, следовательно:

$$n = C_{11}^6 = \frac{11!}{6!\,5!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 462$$

$$A = \{\text{красных шаров достали больше, чем белых, но не больше двух}\},$$

A – 2кр.+3син.+1б или 2кр.+4син.

$$m = C_4^2 \cdot C_4^3 \cdot C_3^1 + C_4^2 \cdot C_4^3 = \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot 4 \cdot 3 + \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot 4 = 96$$

$$P(A) = \frac{16}{77} \approx 0.2078$$

$$B = \{\text{шары хотя бы двух цветов}\}$$

Поскольку всего вынимаем 6 шаров, а максимальное число шаров одного цвета 4, всегда будет хотя бы два цвета, это достоверное событие

$$P(B) = 1$$

Ответ: $P(A) = \frac{16}{77}$; $P(B) = 1$.

2. Из колоды в 52 карты наугад (без возвращения) извлекаются четыре. Найти вероятность указанных в варианте событий.

Событие А = {хотя бы две карты одного достоинства},
событие В = {карты двух достоинств}

Решение:

Классическое определение вероятности

$$P = \frac{m}{n},$$

где n - число всевозможных исходов эксперимента, m – число благоприятных исходов.

$$n = \mathrm{C}_{52}^{4} \text{ (число способов выбрать 4 карты из 52)}$$

$$\mathrm{C}_{52}^{4} = \frac{52!}{4!\,48!} = \frac{52 * 51 * 50 * 49}{2 * 3 * 4} = 270725$$

а) А = {хотя бы две карты одного достоинства}, $\overline{A}$ – все карты разного достоинства. Всего разных карт по номерам или картинкам 13. Сначала выбираем 4 достоинства из 13, далее на каждое выбранное достоинство может приходится 4 разных масти.

$$m^{\overline{A}} = \mathrm{C}_{13}^{4} \cdot 4^4 = \frac{13!}{4!\,9!} \cdot 4^4 = \frac{13 * 12 * 11 * 10}{2 * 3 * 4} \cdot 4^4 = 183040$$

$$m = n - m^{\overline{A}} = 270725 - 183040 = 87685$$

$$P = \frac{87685}{270725} = \frac{1349}{4165} \approx 0.3239$$

б) В= {карты двух достоинств}. Сначала выбираем 2 достоинства из 13, далее в каждом достоинстве выбираем 2 карты из 4 или 1 карту в первой и 3 в другом (и наоборот)

$$m = \mathrm{C}_{13}^{2} \cdot ((\mathrm{C}_{4}^{2})^2 + 2 \cdot \mathrm{C}_{4}^{1} \cdot \mathrm{C}_{4}^{3}) = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{2} \cdot \left(\left(\frac{4 \cdot 3}{2}\right)^2 + 8 \cdot 4\right) = 5304$$

$$P = \frac{5304}{270725} = \frac{24}{1225} \approx 0.0196$$

Ответ: $P(A) = \frac{1349}{4165}$; $P(B) = \frac{24}{1225}$.

3. Консультация перед экзаменом должна начаться между 10.00 и 12.00. Преподаватель и студенты забыли уточнить время. Если преподаватель приходит первым в указанное время, а студентов еще нет, то преподаватель ждет студентов не более 30 минут. Если же студенты пришли первыми, то они ждут преподавателя не более 20 минут. Нарисовать указанное в варианте событие и найти его вероятность.

Событие:

Преподаватель пришел раньше студентов (более чем?) на 10 минут, консультации не было до 10.45.

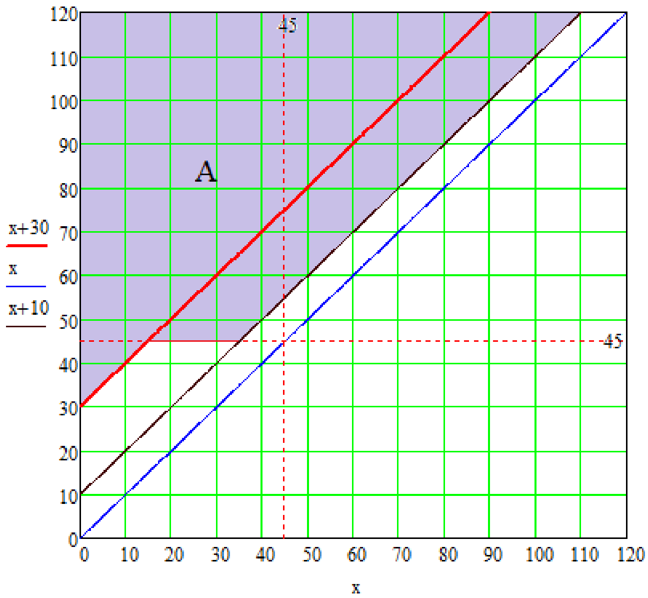
Решение:

Пусть x - время прихода преподавателя, y – время прихода студентов. Для простоты будем считать время 10.00 нулевой точкой отсчёта времени. Тогда

$$x \in [0, 120], y \in [0, 120] \text{ (минут)}$$

Преподаватель пришел раньше студентов более чем на 10 минут, т.е. $x < y$, и $y > x + 10$.

Преподаватель ждет студентов не более 30 минут, значит до 10.45 студенты разошлись с преподавателем более, чем на 30 минут. В крайней ситуации преподаватель мог прийти в 10.15, а студенты в 10.45 – это удовлетворяет задаче.



Изобразим область значений (x, y) на плоскости, отметим области, соответствующие условиям:

$$\begin{cases} y > x \\ y > x + 10 \\ y > 45 \text{ и } y > x + 30 \ \ (x < 45) \end{cases}$$

Используем геометрическое определение вероятности на плоскости:

$$P=\frac{S(A)}{S(\Omega)}$$

Ω - квадрат $[0,120]\times[0,120]$, A - заштрихована на рисунке.

$$P=\frac{\frac{35+110}{2}\cdot 75+\frac{15^2}{2}}{120^2}=\frac{5550}{14400}=\frac{37}{96}.$$

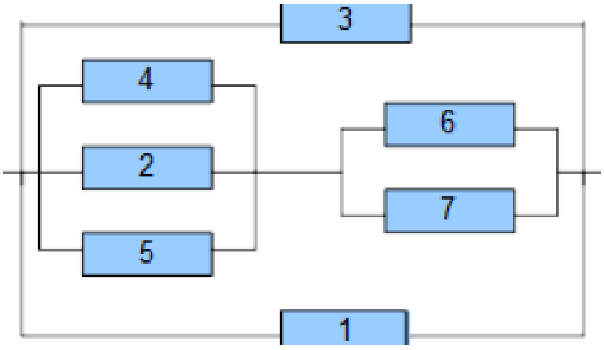
Ответ: $\frac{37}{96}$.

4. Система надежности состоит из 7 элементов и имеет схему, изображенную на рисунке. События A_i, $i=\overline{1,7}$,— отказы элементов за заданный промежуток времени.

1) Выразите через события A_i события A и $\overline{A}$, где A—отказ всей системы за заданный промежуток времени.

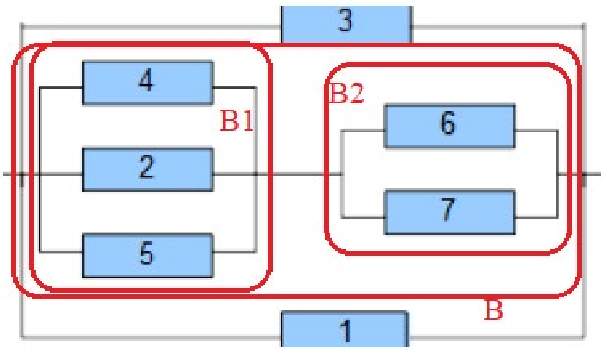
2) Считая, что события A_i независимы в совокупности и имеют вероятности $P(A_i)=p_i$, $i=\overline{1,7}$, вычислите вероятность события A.

$p_1=p_5=0{,}1$, $p_3=p_6=p_7=0{,}3$, $p_2=p_4=0{,}2$.



Решение:

Выделим в системе подсистемы как показано на рисунке:



1) События B, B_1, B_2 – отказ соответствующих подсистем

$$B=B_1+B_2=A_2A_4A_5+A_6A_7$$

A — отказ всей системы за заданный промежуток времени.

$$A = A_3BA_1 = A_3(A_2A_4A_5 + A_6A_7)A_1$$

Противоположное событие:

$$\overline{A} = \overline{A_3 \cdot B \cdot A_1} = \overline{A_3} + \overline{B} + \overline{A_1} = \overline{A_3} + \overline{A_2A_4A_5 + A_6A_7} + \overline{A_1} =$$

$$= \overline{A_3} + \overline{A_2A_4A_5} \cdot \overline{A_6A_7} + \overline{A_1} = \overline{A_3} + \left(\overline{A_2} + \overline{A_4} + \overline{A_5}\right) \cdot \left(\overline{A_6} + \overline{A_7}\right) + \overline{A_1} =$$

2)

$$P(B_1) = P(A_2A_4A_5) = P(A_2)P(A_4)P(A_5) = 0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.1 = 0.004$$

$$P(B_2) = P(A_6A_7) = P(A_6)P(A_7) = 0.3 \cdot 0.3 = 0.09$$

$$P(B) = P(B_1 + B_2) = 1 - \big(1 - P(B_1)\big)\big(1 - P(B_2)\big) = 1 - 0.996 \cdot 0.91 = 0.09364.$$

$$P(A) = P(A_3BA_1) = P(A_3) \cdot P(B) \cdot P(A_1) = 0.3 \cdot 0.09364 \cdot 0.1 = 0.0028092$$

Ответ: $P(A) = 0.0028092$.

5. В первой урне находятся 5 белых и 4 черных шаров, во второй урне — 3 белых и 3 черных шаров. Сначала из первой урны во вторую перекладывается наугад 4 шара, затем также наугад перекладывается из второй урны в первую 3 шара.

а) Определите вероятность того, что после вскрытия первой урны в ней будет столько же черных шаров, сколько было до проведения опыта.

б) После вскрытия первой урны оказалось, что в ней столько же чёрных шаров, сколько было до проведения опыта. Вычислите вероятность того, что при этом условии из первой урны во вторую переложили 1 белый шар.

Решение:

Введём следующие гипотезы:

H_i – из первой урны во вторую переложили i белых шаров;

$$С_9^4 = \frac{9!}{4!\,5!} = \frac{9 * 8 * 7 * 6}{2 * 3 * 4} = 126$$

$$P(H_0) = \frac{С_4^4}{С_9^4} = \frac{1}{126}; (\text{в } 1 - \text{ой урне } 5б, \text{во } 2 - \text{ой } 3б + 7ч)$$

$$P(H_1) = \frac{C_5^1 C_4^3}{C_9^4} = \frac{20}{126}; (\text{в } 1 - \text{ой урне } 4б + 1ч, \text{во } 2 - \text{ой } 4б + 6ч)$$

$$P(H_2) = \frac{C_5^2 C_4^2}{C_9^4} = \frac{60}{126}; (\text{в } 1 - \text{ой урне } 3б + 2ч, \text{во } 2 - \text{ой } 5б + 5ч)$$

$$P(H_3) = \frac{C_5^3 C_4^1}{C_9^4} = \frac{40}{126} (\text{в } 1 - \text{ой урне } 2б + 3ч, \text{во } 2 - \text{ой } 6б + 4ч)$$

$$P(H_4) = \frac{C_5^4}{C_9^4} = \frac{5}{126} (\text{в } 1 - \text{ой урне } 1б + 4ч, \text{во } 2 - \text{ой } 7б + 3ч)$$

Убеждаемся, что гипотезы образуют полную группу несовместных событий

$$\sum_i P(H_i) = 1.$$

а) Пусть событие A – после вскрытия первой урны в ней будет столько же черных шаров (4), сколько было до проведения опыта. Тогда при перекладке 3-х шаров в первую урну во второй урне изначально 10 шаров.

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!\,7!} = 120$$

$$P(A|H_0) = 0 \; (\text{в } 1 - \text{ой корзине нет чёрных, а перекладваем всего } 4);$$

$$P(A|H_1) = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6};$$

$$P(A|H_2) = \frac{C_5^2 \cdot C_5^1}{C_{10}^3} = \frac{50}{120} = \frac{5}{12};$$

$$P(A|H_3) = \frac{C_4^1 \cdot C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{60}{120} = \frac{1}{5}$$

$$P(A|H_4) = \frac{C_7^3}{C_{10}^3} = \frac{35}{120} = \frac{7}{24}$$

Воспользуемся формулой полной вероятности:

$$P(A) = \sum_i P(H_i) \cdot P(A|H_i)$$

$$P(A) = \frac{20}{126} \cdot \frac{1}{6} + \frac{60}{126} \cdot \frac{5}{12} + \frac{40}{126} \cdot \frac{1}{5} + \frac{5}{126} \cdot \frac{7}{24} = \frac{907}{3024}$$

б) Пусть событие A – после вскрытия первой урны в ней будет столько же чёрных шаров (4), сколько было до проведения опыта. Вероятность того, что при этом условии из первой урны во вторую переложили 1 белый шар можно определить по формуле Байеса:

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A|H_1)}{P(A)};$$

$$P(H_1|A) = \frac{\frac{20}{126} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{907}{3024}} = \frac{80}{907}.$$

Ответ: а) $\frac{907}{3024}$; б) $\frac{80}{907}$.

6. Вероятность попадания в цель при любом из 6 выстрелов равна 0,55. Найдите вероятность того, что произойдет:

а) Ровно 2 попадания

б) Не более 2 попаданий.

в) Не менее 2 попаданий.

г) От 1 до 4 попаданий.

Решение:

По формуле Бернулли вероятность m успехов в серии из n испытаний определяется по формуле:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

а) ровно 2 попадания;

$$P_6(2) = C_6^2 0.55^2 \cdot 0.45^4 = \frac{6!}{2!\,4!} 0.55^2 \cdot 0.45^4 = 15 \cdot 0.55^2 \cdot 0.45^4 \approx 0.186066$$

б) Пусть событие А - не более 2 попаданий, тогда

$$P(A) = P_6(0) + P_6(1) + P_6(2)$$

$$P_6(0) = 0.45^6 \approx 0.008304$$

$$P_6(1) = C_6^1 0.55 \cdot 0.45^5 = 6 \cdot 0.55 \cdot 0.45^5 \approx 0.060894$$

$$P(A) = 0.008304 + 0.060894 + 0.186066 \approx 0.255264$$

в) Не менее 2 попаданий.

Пусть событие В - не менее 2 попаданий, тогда $\overline{B}$ − менее 2 попаданий

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P_6(0) - P_6(1)$$

$$P(B) = 1 - 0.008304 - 0.06089 = 0.930802$$

г) Пусть событие В - от 1 до 4 попаданий включительно, тогда

$$P(B) = P_6(1) + P_6(2) + P_6(3) + P_6(4)$$

$$P_6(3) = C_6^3 0.55^3 \cdot 0.45^3 = \frac{6!}{3!\,3!} 0.55^3 \cdot 0.45^3 = 20 \cdot 0.55^3 \cdot 0.45^3 \approx 0.303218$$

$$P_6(2) = C_6^4 0.55^4 \cdot 0.45^2 = 15 \cdot 0.55^4 \cdot 0.45^2 \approx 0.277950$$

$$P(B) = 0.060894 + 0.186066 + 0.303218 + 0.277950 = 0.828129$$

Ответ: а)0.186066; б)0.255264; в)0.930802; г) 0.828129.

7. Определите вероятность того, что среди 100 изготовленных изделий бракованными окажутся:

а) ровно 3 изделий.

б) не более 5 изделий

если вероятность брака равна 0,035 и определите вероятность того, что среди 1400 изготовленных изделий бракованными окажутся

в) ровно 105 изделий.

г) от 90 до 140 изделий

если вероятность брака равна 0,085

Решение:

а) Поскольку вероятность «успеха» - брака изделия $p = 0.035$ достаточно мала, а число испытаний велико, то будем использовать формулу Пуассона:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!},$$

$$\lambda = np.$$

Итак, $n = 100, p = 0.035$, следовательно, $\lambda = 3.5$.

Ровно 3 изделия окажутся бракованными:

$$P_{100}(3) = \frac{3.5^3 e^{-3.5}}{3!} \approx 0.2158$$

б) А – бракованными окажутся не более 5 изделий

$$P(A) = P_{100}(0) + P_{100}(1) + P_{100}(2) + P_{100}(3) + P_{100}(4) + P_{100}(5) =$$

$$= e^{-3.5}\left(1 + 3.5 + \frac{3.5^2}{2} + \frac{3.5^3}{3!} + \frac{3.5^4}{4!} + \frac{3.5^5}{5!}\right) \approx 0.9347$$

в) Итак, $n = 1400, p = 0.085, np = 119, npq = 108.885$

По формуле Муавра-Лапласа вероятность m успехов в серии из n испытаний определяется по формуле:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{m - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

где $\varphi(x)$ – интегральная функция Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. При этом считаем, что $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Значения функции находим из таблиц.

$$P_{1400}(105) \approx \frac{1}{\sqrt{108.885}} \varphi\left(\frac{105-119}{\sqrt{108.885}}\right) = \frac{1}{\sqrt{108.885}} \varphi(-1.341) \approx 0.0155$$

г) Воспользуемся интегральной теоремой Муавра-Лапласа (m – число успехов в серии из n испытаний):

$$P(a < m < b) = \Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}}\right),$$

где $\Phi_0(x)$ – интегральная функция Лапласа $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-x^2/2}\,dx$. При этом считаем, что $\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$, При $x > 5$ принимаем $\Phi_0(x) \approx 0.5$. Значения функции находим из таблиц.

$$P(90 < m < 140) = \Phi_0\left(\frac{140-119}{\sqrt{108.885}}\right) - \Phi_0\left(\frac{90-119}{\sqrt{108.885}}\right) \approx \Phi_0(2.01) - \Phi_0(-2.78) =$$

$$= \Phi_0(2.01) + \Phi_0(2.78) \approx 0.4778 + 0.4973 = 0.9751$$

Ответ: а)0.2158; б)0.9347; в)0.0155; г)0.9751.

8. В наборе 5 шаров белого цвета, 6 шаров синего и 5 шаров красного цвета. Из набора случайным образом без возвращения вынимают 6 шаров. Случайная величина ξ – число вынутых синих шаров. Найдите:

а) Ряд распределения случайной величины ξ.

б) Вероятность попадания случайной величины ξ в интервалы

(3; 6), [3; 6); (3; 6], [3; 6].

в) Найдите ряд распределения случайных величин $\eta = 9 - |\xi^2 - 16|, \mu = 8 - (2-\xi)^3$.

Решение:

ξ может принимать значение от 0 до 6,

$$P(\xi = k) = \frac{C_6^k C_{10}^{6-k}}{C_{16}^6}$$

$$C_{16}^6 = \frac{16!}{5!\,11!} = 8008$$

Число способов $C_6^k C_{10}^{6-k}$:

k	0	1	2	3	4	5	6
$C_6^k C_{10}^{6-k}$	210	1512	3150	2400	675	60	1

а) Ряд распределения случайной величины ξ.

ξ	0	1	2	3	4	5	6
p	0,026224	0,188811	0,393357	0,299700	0,084291	0,007493	0,000125

б) Вероятность попадания случайной величины ξ в интервалы

$$P(\xi \in (3;\ 6)) = P(\xi = 4) + P(\xi = 5) = 0.091783$$

$$P(\xi \in [3;\ 6)) = P(\xi = 3) + P(\xi = 4) + P(\xi = 5) = 0.391484$$

$$P(\xi \in\ (3; 6]) = P(\xi = 4) + P(\xi = 5) + P(\xi = 6) = 0.091908$$

$$P(\xi \in [3;\ 6]) = P(\xi = 3) + P(\xi = 4) + P(\xi = 5) + P(\xi = 6) = 0.391608$$

в) Ряд распределения случайных величин $\eta = 9 - |\xi^2 - 16|, \mu = 8 - (2 - \xi)^3$

Вычислим значения случайных величин η и μ:

ξ	0	1	2	3	4	5	6
η	-7	-6	-3	2	9	0	-11
μ	0	7	8	9	16	35	72
p	0,026224	0,188811	0,393357	0,299700	0,084291	0,007493	0,000125

Составим ряд распределения η и μ, упорядочив значения случайных величин по возрастанию и, если надо, складывая вероятности при одинаковых значениях:

η	-11	-7	-6	-3	0	2	9
p	0,000125	0,026224	0,188811	0,393357	0,007493	0,299700	0,084291

μ	0	7	8	9	16	35	72
p	0,026224	0,188811	0,393357	0,299700	0,084291	0,007493	0,000125

9. Непрерывная случайная величина ξ имеет плотность распределения $p(x)$.

$$p_\xi(x) = \begin{cases} A(1 + |1 - x^3|), & -1 \le x \le 2 \\ 0, \quad x < -1, & x > 2 \end{cases}.$$

Найдите:

$$1 - x^3 \ge 0 \text{ при } x \in [-1; 1], \qquad \text{т. е.} \, p_\xi(x) = 2 - x^3$$

$$1 - x^3 < 0 \text{ при } x \in [1; 2], \text{т. е. } p_\xi(x) = x^3$$

а) Константу A

По условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$$

$$A \int_{-1}^{1} (2 - x^3)dx + A \int_{1}^{2} (x^3)dx = 4A + A\left(\frac{x^4}{4}\right)\Big|_1^2 = 4A + A\left(4 - \frac{1}{4}\right) = \frac{31A}{4}$$

$$\frac{31A}{4} = 1 \Longrightarrow A = \frac{4}{31}$$

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \frac{4}{31}(1 + |1 - x^3|), & -1 \le x \le 2 \\ 0, \quad x < -1, & x > 2 \end{cases}$$

б) Функцию распределения случайной величины ξ и постройте ее график.

Найдём функцию распределения:

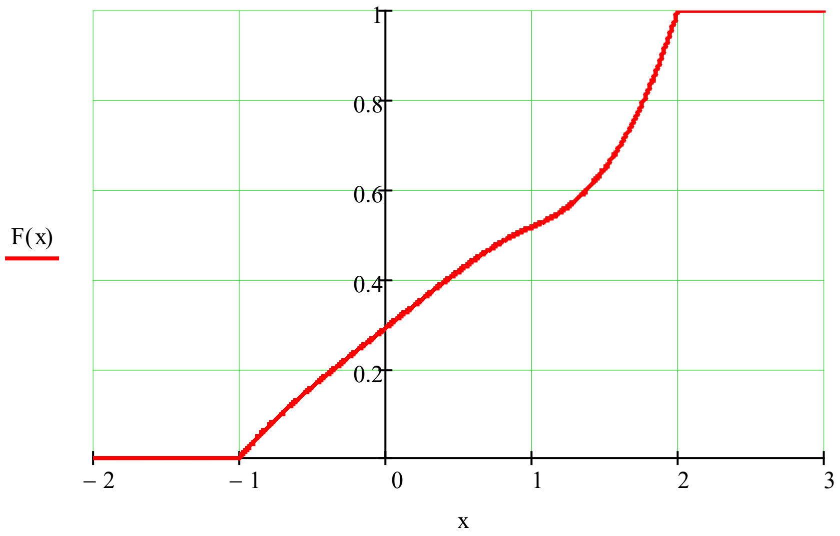
При $-1 < x < 1$:

$$F_\xi(x) = \frac{4}{31} \int_{-1}^{x} (2 - x^3)dx = \frac{4}{31}\left(2x - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_{-1}^{x} = \frac{-x^4 + 8x + 9}{31}; \; F_\xi(1) = \frac{16}{31}$$

При $1 < x < 2$:

$$F_\xi(x) = \frac{16}{31} + \frac{4}{31}\int_{1}^{x} (x^3)dx = \frac{16}{31} + \frac{4}{31}\left(\frac{x^4}{4}\right)\Big|_1^x = \frac{x^4 + 15}{31}$$

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ \dfrac{-x^4 + 8x + 9}{31}, & x \in (-1,1] \\ \dfrac{x^4 + 15}{31}, & x \in (1,2] \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$



в) Вычислите функцию распределения и плотность распределения случайной величины $\eta = 2(\xi + 1)^3 - 4$.

$$F_\eta(y) = P(\eta < y) = P(2(\xi + 1)^3 - 4 < y) = P\left((\xi + 1)^3 < \frac{y+4}{2}\right) =$$

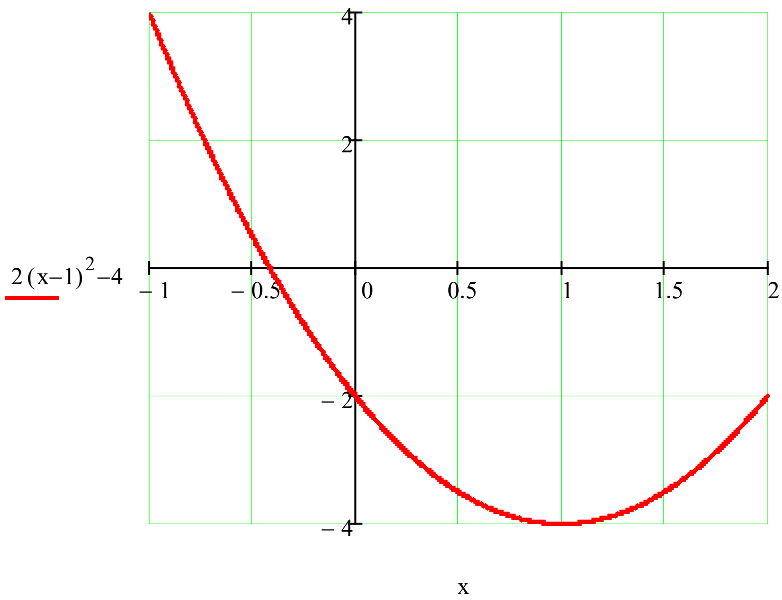
$$= P\left(\xi < \sqrt[3]{\frac{y+4}{2}} - 1\right) = F_\xi\left(\sqrt[3]{\frac{y+4}{2}} - 1\right)$$

$$F_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \le -4 \\ -\dfrac{1}{31}\left(\sqrt[3]{\dfrac{y+4}{2}} - 1\right)^4 + \dfrac{8}{31}\left(\sqrt[3]{\dfrac{y+4}{2}} - 1\right) + \dfrac{9}{31}, & y \in (-4, 12] \\ \dfrac{1}{31}\left(\sqrt[3]{\dfrac{y+4}{2}} - 1\right)^4 + \dfrac{15}{31}, & y \in (12, 50] \\ 1, & y > 50 \end{cases}$$

$$p_\eta(y) = F'_\eta(y)$$

$$p_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \le -4 \\ \dfrac{4\sqrt[3]{\frac{y+4}{2}}\left(3\left(\frac{y+4}{2}\right)^{\frac{2}{3}} - \frac{y+4}{2} - 3\sqrt[3]{\frac{y+4}{2}} + 3\right)}{93(y+4)}, & y \in (-4, 12] \\ \dfrac{4\sqrt[3]{\frac{y+4}{2}}\left(\sqrt[3]{\frac{y+4}{2}} - 1\right)^3}{93(y+4)}, & y \in (12, 50] \\ 0, & y > 50 \end{cases}$$

г) Вычислите функцию распределения и плотность распределения случайной величины $\eta = 2(\xi - 1)^2 - 4$



$$p_\eta(y) = p_\xi(g(y))|g'(y)|$$

$$y = 2(x-1)^2 - 4, \qquad x = g(y) = 1 \pm \sqrt{\frac{y+4}{2}}$$

$$|g'(y)| = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{y+4}}$$

$$x = -1 \Longrightarrow y = 4, \qquad x = 1 \Longrightarrow y = -4, \quad x = 2 \Longrightarrow y = -2$$

При $-1 < x < 0$ $y \in (-2; 4)$:

$$p_\eta(y) = \frac{4}{31}\left(2 - \left(1 - \sqrt{\frac{y+4}{2}}\right)^3\right)\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{y+4}}$$

При $0 < x < 2,\, y \in (-4;-2)$:

$$p_\eta(y) = \frac{4}{31}\left(2 - \left(1 - \sqrt{\frac{y+4}{2}}\right)^3 + \left(1 + \sqrt{\frac{y+4}{2}}\right)^3\right)\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{y+4}} = \frac{2\sqrt{2}}{31\sqrt{y+4}} + \frac{y+10}{31}$$

$$p_\eta(y) = \begin{cases} 0, \qquad y \notin (-4,4) \\ \dfrac{2\sqrt{2}}{31\sqrt{y+4}} + \dfrac{y+10}{31}, \qquad y \in (-4,-2] \\ \dfrac{4}{31}\left(2 - \left(1 - \sqrt{\dfrac{y+4}{2}}\right)^3\right)\dfrac{\sqrt{2}}{4\sqrt{y+4}}, y \in (-2,4) \end{cases}$$

$$F_\eta(y) = \int_{-4}^{y}\left(\frac{2\sqrt{2}}{31\sqrt{y+4}} + \frac{y+10}{31}\right)dy = \frac{4\sqrt{2}\left(\sqrt{y+4}\right)}{31} + \frac{y^2+20y+64}{62}, y \in (-4,-2)$$

$$F_\eta(-2) = \frac{22}{31}$$

При $y \in (-2, 4]$:

$$F_\eta(y) = P(\eta < y) = P(2(\xi-1)^2 - 4 < y) = P\left(\xi > 1 - \sqrt{\frac{y+4}{2}}\right) =$$

$$= 1 - F_\xi\left(1 - \sqrt{\frac{y+4}{2}}\right) = 1 - \left(\frac{9}{31} + \frac{8}{31}\left(1 - \sqrt{\frac{y+4}{2}}\right) - \frac{1}{31}\left(1 - \sqrt{\frac{y+4}{2}}\right)^4\right).$$

Функция распределения:

$$F_\eta(y) = \begin{cases} 0, \qquad y \le -4 \\ \dfrac{4\sqrt{2}\left(\sqrt{y+4}\right)}{31} + \dfrac{y^2+20y+64}{62}, \qquad y \in (-4,-2] \\ \dfrac{14}{31} + \dfrac{1}{31}\left(1 - \sqrt{\dfrac{y+4}{2}}\right)^4 + \dfrac{8}{31}\sqrt{\dfrac{y+4}{2}}, \qquad y \in (-2,4] \\ 1, \qquad y > 4 \end{cases}$$

10. В условиях задачи 8 выбирают $m = 6$ шаров. (В наборе 5 шаров белого цвета, 6 шаров синего и 5 шаров красного цвета). Пусть ξ число вынутых красных шаров, а η – число вынутых синих шаров.

Найдите:

а) Совместное распределение случайных величин ξ и η (ряд распределения).

ξ может принимать значение от 0 до 5, η может принимать значение от 0 до 6. Всего 15 шаров, извлекаем 5.

$$P(\xi = k, \eta = m) = \frac{C_5^k C_6^m C_5^{6-k-m}}{C_{16}^6};\ C_{16}^6 = \frac{16!}{6!\,10!} = 8008$$

Число способов $C_5^k C_6^m C_5^{6-k-m}$:

$k \setminus m$	0	1	2	3	4	5	6
0		6	75	200	150	30	1
1	5	150	750	1000	375	30	
2	50	600	1500	1000	150		
3	100	600	750	200			
4	50	150	75				
5	5	6					

Совместное распределение случайных величин ξ и η

$\xi \setminus \eta$	0	1	2	3	4	5	6	Сумма
0		0,000749	0,009366	0,024975	0,018731	0,003746	0,000125	0,057692
1	0,000624	0,018731	0,093656	0,124875	0,046828	0,003746		0,288462
2	0,006244	0,074925	0,187313	0,124875	0,018731			0,412088
3	0,012488	0,074925	0,093656	0,024975				0,206044
4	0,006244	0,018731	0,009366					0,034341
5	0,000624	0,000749						0,001374
Сумма	0,026224	0,188811	0,393357	0,2997	0,084291	0,007493	0,000125	1

б) Ряды распределения случайных величин ξ и η.

ξ	0	1	2	3	4	5
$P(\xi)$	0,057692	0,288462	0,412088	0,206044	0,034341	0,001374

η	0	1	2	3	4	5	6
$P(\eta)$	0,026224	0,188811	0,393357	0,2997	0,084291	0,007493	0,000125

в) Условные распределения случайной величины ξ при условии η, случайной величины η при условии ξ, проверить случайные величины на независимость

Условные распределения:

$$P(\xi = k|\eta = m) = \frac{P(\xi = k, \eta = m)}{P(\eta = m)}$$

Условный закон распределения $P(\xi = k|\eta = 0)$:

ξ	P
1	0,02381
2	0,238095
3	0,47619
4	0,238095
5	0,02381
Сумма	1

Условный закон распределения $P(\xi = k|\eta = 1)$:

ξ	P
0	0,003968
1	0,099206
2	0,396825
3	0,396825
4	0,099206
5	0,003968
Сумма	1

Условный закон распределения $P(\xi = k|\eta = 2)$:

ξ	P
0	0,02381
1	0,238095
2	0,47619
3	0,238095
4	0,02381
Сумма	1

Условный закон распределения $P(\xi = k|\eta = 3)$:

ξ	P
0	0,083333
1	0,416667
2	0,416667
3	0,083333
Сумма	1

Условный закон распределения $P(\xi = k|\eta = 4)$:

ξ	P
0	0,222222
1	0,555556
2	0,222222
Сумма	1

Условный закон распределения $P(\xi = k|\eta = 5)$:

ξ	P
0	0,5
1	0,5
Сумма	1

Условный закон распределения $P(\xi = 0|\eta = 6) = 1$.

$$P(\eta = m|\xi = k) = \frac{P(\xi = k, \eta = m)}{P(\xi = k)}$$

Условный закон распределения $P(\eta = m|\xi = 0)$:

η	1	2	3	4	5	6	Сумма
P	0,012987	0,162338	0,4329	0,324675	0,064935	0,002165	1

Условный закон распределения $P(\eta = m|\xi = 1)$:

η	0	1	2	3	4	5	Сумма
P	0,002165	0,064935	0,324675	0,4329	0,162338	0,012987	1

Условный закон распределения $P(\eta = m|\xi = 2)$:

η	0	1	2	3	4	Сумма
P	0,015152	0,181818	0,454545	0,30303	0,045455	1

Условный закон распределения $P(\eta = m|\xi = 3)$:

η	0	1	2	3	Сумма
P	0,060606	0,363636	0,454545	0,121212	1

Условный закон распределения $P(\eta = m|\xi = 4)$:

η	0	1	2	Сумма
P	0,181818	0,545455	0,272727	1

Условный закон распределения $P(\eta = m|\xi = 5)$:

η	0	1	Сумма
P	0,454545	0,545455	1

Для независимых случайных величин

$$P(\xi = x, \eta = y) = P(\xi = x)P(\eta = y)$$

Например

$$P(\xi = 1, \eta = 1) = \frac{5}{8008}$$

$$P(\xi = 1)P(\eta = 1) = \frac{210}{8008} \cdot \frac{462}{8008} \neq \frac{5}{8008}$$

Равенство

$$P(\xi = 1, \eta = 1) = P(\xi = 1)P(\eta = 1) - \text{неверно}$$

Следовательно, ξ и η зависимы.

г) Значения двумерной функции распределения $F_{\xi\eta}(x, y)$в заданных точках $(x, y) = (7; 3), (2; 4), (3; 7)$,

$$F_{\xi\eta}(7,3) = P(\xi < 7, \eta < 3) = P(\eta < 3) = 0.026224 + 0.188811 + 0.399357 \approx$$

$$\approx 0.608392$$

$$F_{\xi\eta}(2,4) = P(\xi < 2, \eta < 4) = P(\xi = 0, \eta = 1) + \cdots + P(\xi = 0, \eta = 3) +$$

$$+P(\xi = 1, \eta = 1) + \cdots + P(\xi = 1, \eta = 3) = 0.272977$$

$$F_{\xi\eta}(3,7) = P(\xi < 3, \eta < 7) = P(\xi < 3) = 0{,}057692 + 0{,}288462 + 0{,}412088 \approx$$

$$\approx 0.758242$$

д) Ряд распределения новой случайной величины $\mu = \eta - \xi \cos \pi\eta$

Составим таблицу значений случайной величины μ:

$\xi \setminus \eta$	0	1	2	3	4	5	6
0		1	2	3	4	5	0
1	-1	2	1	4	3	6	
2	-2	3	0	5	2		
3	-3	4	-1	6			
4	-4	5	-2				
5	-5	6					

Далее определяем соответствующие вероятности, складывая вероятности при одинаковых значениях μ:

μ	-5	-4	-3	-2	-1	0
$P(\mu)$	0,000624	0,006244	0,012488	0,015609	0,094281	0,187438
μ	1	2	3	4	5	6
$P(\mu)$	0,094406	0,046828	0,146728	0,218531	0,147353	0,029471

e) Ряд распределения новой двумерной дискретной случайной величины (μ_1; μ_2)

$$\mu_1 = 3 - 2(\eta - \xi), \mu_2 = 2\eta - 3(\xi - 2)$$

Составим таблицу значений случайной величины μ_1:

$\xi \setminus \eta$	0	1	2	3	4	5	6
0		1	-1	-3	-5	-7	3
1	5	3	1	-1	-3	-5	
2	7	5	3	1	-1		
3	9	7	5	3			
4	11	9	7				
5	13	11					

Далее определяем соответствующие вероятности, складывая вероятности при одинаковых значениях μ:

μ_1	-7	-5	-3	-1	1	3	5
$P(\mu)$	0,003746	0,022478	0,071803	0,152972	0,219281	0,231144	0,169206
μ_1	7	9	11	13			
$P(\mu)$	0,090534	0,031219	0,006993	0,000624			

Составим таблицу значений случайной величины μ_2:

$\xi \setminus \eta$	0	1	2	3	4	5	6
0		8	10	12	14	16	6
1	3	5	7	9	11	13	
2	0	2	4	6	8		
3	-3	-1	1	3			
4	-6	-4	-2				
5	-9	-7					

Далее определяем соответствующие вероятности, складывая вероятности при одинаковых значениях μ:

μ_2	-9	-7	-6	-4	-3	-2	-1	0
$P(\mu)$	0,000624	0,000749	0,006244	0,018731	0,012488	0,009366	0,074925	0,006244
μ_2	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(\mu)$	0,093656	0,074925	0,025599	0,187313	0,018731	0,125	0,093656	0,019481
μ_2	9	10	11	12	13	14	16	
$P(\mu)$	0,124875	0,009366	0,046828	0,024975	0,003746	0,018731	0,003746	

Совместное распределение случайных величин μ_1 и μ_2

$\mu_1 \setminus \mu_2$	-9	-7	-6	-4	-3	-2	-1	0
-7								
-5								
-3								
-1								
1								
3								
5								
7						0,009366	0,074925	0,006244
9				0,018731	0,012488			
11		0,000749	0,006244					
13	0,000624							

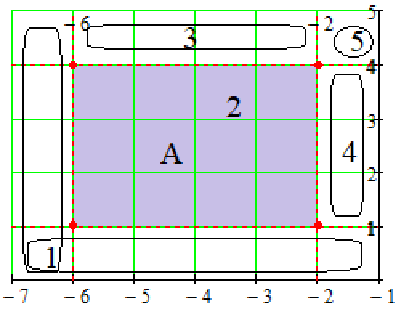
$\mu_1 \setminus \mu_2$	1	2	3	4	5	6	7	8
-7								
-5								
-3								
-1								0,018731
1						0,124875	0,093656	0,000749
3			0,024975	0,187313	0,018731			
5	0,093656	0,074925	0,000624					
7								
9								
11								
13								

$\mu_1 \setminus \mu_2$	9	10	11	12	13	14	16
-7							0,000125
-5					0,003746	0,018731	
-3			0,046828	0,024975			
-1	0,124875	0,009366					
1							
3							
5							
7							
9							
11							
13							

11. В четырехугольник с вершинами в точках $(-6;1),(-6;4),(-2;4),(-2;1)$ в соответствии с принципом геометрической вероятности падает частица. Пусть ξ и η - координаты по оси X и У точки падения частицы.

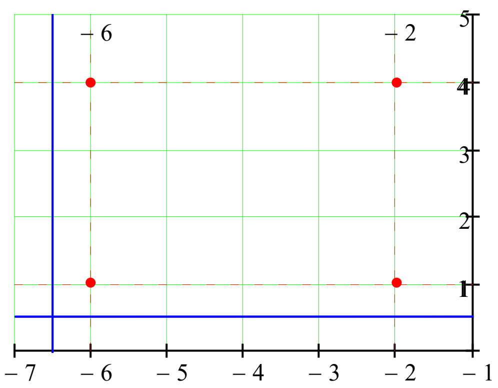
Найдите:

а) Совместную функцию распределения $F_{\xi\eta}(x,y)$ случайной величины (ξ,η) и совместную плотность распределения случайной величины (ξ,η).



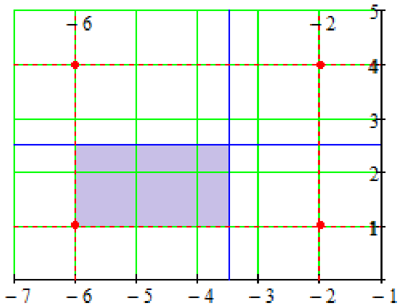
Всего имеем 5 различных областей.

Область 1: $(x<-6)$или $(y<1)$:



Пересечения с четырёхугольником нет, $F_{\xi\eta}(x,y)=0$.

Область 2: $(x,y)\in D$:

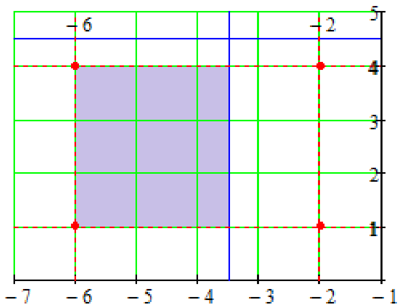


$$F_{\xi\eta}(x,y) = \frac{1}{S_D}\int_0^x \int_1^y dxdy$$

$$S_D = 12 - \text{площадь области.}$$

$$F_{\xi\eta}(x,y) = \frac{1}{12}\int_{-6}^{x} dx \int_1^y dy = \frac{(x+6)(y-1)}{12}.$$

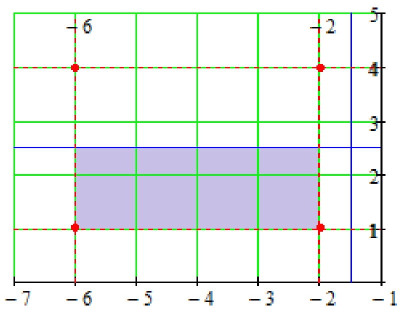
Область 3: $(-6 < x \leq -2)$и$(y > 4)$:



$$F_{\xi\eta}(x,y) = \frac{1}{S_D}\int_0^x \int_1^6 dxdy$$

$$F_{\xi\eta}(x,y) = \frac{1}{12}\int_{-6}^{x} dx \int_1^4 dy = \frac{x+6}{4}.$$

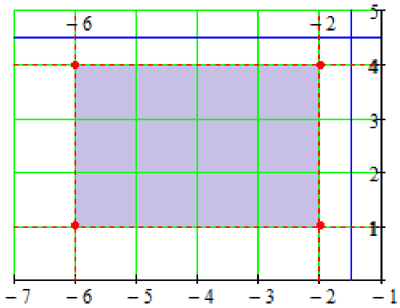
Область 4: $(x > -2)$и$(1 < y \leq 4)$:



$$F_{\xi\eta}(x,y) = \frac{1}{S_D}\int_0^4\int_1^y dxdy$$

$$F_{\xi\eta}(x,y) = \frac{1}{12}\int_{-6}^{-2} dx \int_1^y dy = \frac{y-1}{3}.$$

Область 5: $(x > -2)$и$(y > 4)$:



$$F_{\xi\eta}(x,y) = \frac{1}{S_D}\int_{-6}^{-2}\int_1^4 dxdy = \frac{1}{12}\int_{-6}^{-2}\int_1^4 dxdy = 1.$$

$$F_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} 0, & (x < -6) \text{ или } (y < 1) \\ \dfrac{(x+6)(y-1)}{12}, & (x,y) \in D \\ \dfrac{x+6}{4}, & (-6 < x \le -2)\text{и}(y > 4) \\ \dfrac{y-1}{3}, & (x > -2)\text{и}(1 < y \le 4) \\ 1, & (x > -2)\text{и}(y > 4) \end{cases}$$

Поскольку площадь четырёхугольника D равна 12, и точки распределены в соответствии с принципом геометрической вероятности то совместная плотность распределения имеет равномерное распределение внутри D:

$$p_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{12}, (x,y) \in D \\ 0, (x,y) \notin D \end{cases}.$$

б) Одномерные плотности и функции распределения случайных величин ξ и η.

$$p_\xi(x) = \int_1^4 p_{\xi\eta}(x,y)\,dy = \frac{1}{12}\int_1^4 1\,dy = \frac{1}{4}$$

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, x \in [-6;-2] \\ 0, x \notin [-6;-2] \end{cases}.$$

$$F_\xi(x) = \int_{-6}^{x} p_\xi(x)\,dx = \frac{x+6}{4}, -6 < x \le -2$$

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le -6 \\ \dfrac{x+6}{4}, & -6 < x \le -2 \\ 1, & x > -2 \end{cases}$$

$$p_\eta(y) = \int_{-6}^{-2} p_{\xi\eta}(x,y)\,dx = \frac{1}{12}\int_{-6}^{-2} 1\,dy = \frac{1}{3}$$

$$p_\eta(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}, & y \in [1;4] \\ 0, & y \notin [1;4] \end{cases}.$$

$$F_\eta(y) = \int_{1}^{y} p_\eta(y)\,dy = \frac{y-1}{3}, 1 < y \le 4$$

$$F_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \le 1 \\ \dfrac{y-1}{3}, & 1 < y \le 4 \\ 1, & y > 4 \end{cases}$$

в) Условные функции распределения и условные плотности распределения случайной величины ξ при условии η, и случайной величины η при условии ξ. Проверьте, будут ли эти случайные величины независимыми

Условная плотность распределения

$$p_\xi(x|y) = \frac{p_{\xi\eta}(x,y)}{p_\eta(y)} = \frac{1}{4} \text{ при } (x,y) \in D$$

Условная плотность распределения

$$p_\eta(y|x) = \frac{p_{\xi\eta}(x,y)}{p_\xi(x)} = \frac{1}{3} \text{ при } (x,y) \in D$$

Для независимых случайных величин должно выполняться равенство:

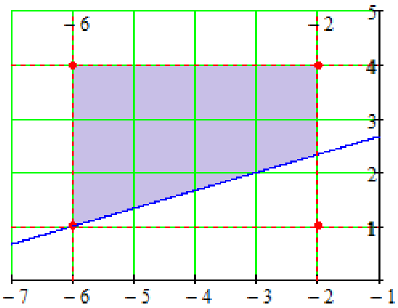
$$p_\xi(x|y) = p_\xi(x) - \text{верно}$$

Следовательно, случайные величины независимы. Условные функции распределения совпадают с одномерными:

$$F_{\xi}(x|y) = \begin{cases} 0, & x \le -6 \\ \dfrac{x+6}{4}, & -6 < x \le -2; \\ 1, & x > -2 \end{cases}$$

$$F_{\eta}(y|x) = \begin{cases} 0, & y \le 1 \\ \dfrac{y-1}{3}, & 1 < y \le 4 \\ 1, & y > 4 \end{cases}$$

г) Значение функции распределения случайной величины $\mu = \xi - 3\eta$ в точке $z = -9$.



$$y = \frac{-2}{3} + 3 = 2\frac{1}{3}$$

$$F_{\mu}(-9) = P(\xi - 3\eta < -9) = P\left(\eta > \frac{\xi}{3} + 3\right) = \frac{S_D}{S} = \frac{12 - \frac{4 \cdot 4/3}{2}}{12} = \frac{7}{9}$$

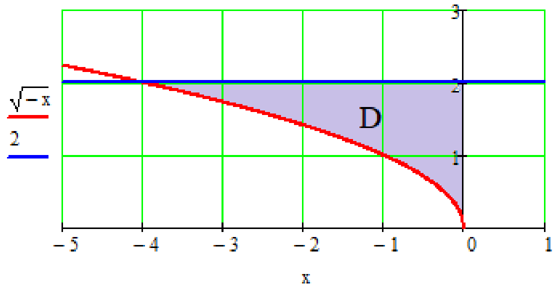
12. Совместная плотность распределения случайных величин ξ и η задана формулой

$$p_{\xi\eta}(x,y) = C(-3x + y^2), (x,y) \in D,$$

где область D задана в варианте. Найдите:

$$D = \{(x;y): x = 0, y = 2, y = \sqrt{-x}\}$$

а) Постоянную C.



По закону нормировки

$$\iint\limits_D p_{\xi\eta}(x,y)dxdy = 1,$$

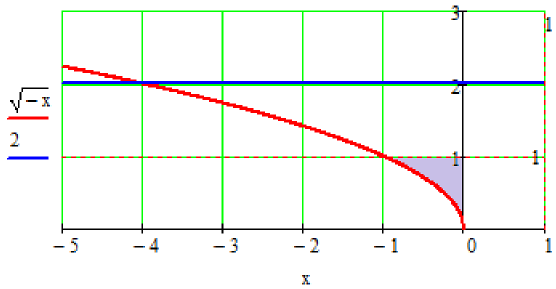
$$D: \begin{cases} -4 \le x \le 0 \\ \sqrt{-x} \le y \le 2 \end{cases}$$

$$\int_{-4}^{0} dx \int_{\sqrt{-x}}^{2} C(-3x + y^2)\,dy = C\int_{-4}^{0} \left(-3xy + \frac{y^2}{3}\right)\Bigg|_{\sqrt{-x}}^{2} dx =$$

$$= C\int_{-4}^{0} \left(\frac{8}{3} - 6x + \frac{10}{3}x\sqrt{-x}\right)dx = C\left(\frac{8x}{3} - 3x^2 + \frac{4}{3}x^2\sqrt{-x}\right)\Bigg|_{-4}^{0} = 16C$$

$$C = \frac{1}{16}$$

б) Значения двумерной функции распределения $F_{\xi\eta}(x,y)$ в заданных точках $(x,y) = (1;1)$



$$F_{\xi\eta}(1,)=P(\xi<1,\eta<1)=\frac{1}{16}\int_{-1}^{0}dx\int_{\sqrt{-x}}^{1}C(-3x+y^2)\,dy=$$

$$=\frac{1}{16}\int_{-1}^{0}\left(-3xy+\frac{y^2}{3}\right)\Bigg|_{\sqrt{-x}}^{1}dx=\frac{1}{16}\int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{3}-3x+\frac{10}{3}x\sqrt{-x}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{16}\left(\frac{x}{3}-\frac{3x^2}{2}+\frac{4}{3}x^2\sqrt{-x}\right)\Bigg|_{-1}^{0}=\frac{1}{32}$$

в) Одномерные плотности и функции распределения случайных величин ξ и η.

$$p_\xi(x)=\int\limits_{\sqrt{-x}}^{2}p_{\xi\eta}(x,y)\,dy=\frac{1}{16}\int\limits_{\sqrt{-x}}^{2}(-3x+y^2)\,dy=\frac{1}{16}\left(-3xy+\frac{y^2}{3}\right)\Bigg|_{\sqrt{-x}}^{2}=$$

$$=\frac{8-18x+10x\sqrt{-x}}{48}$$

$$p_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{8-18x+10x\sqrt{-x}}{48}, x\in[-4;0]\\ 0, x\notin[-4;0]\end{cases}.$$

$$F_\xi(x)=\frac{1}{48}\int\limits_{-4}^{x}\left(8-18x+10x\sqrt{-x}\right)dx=\frac{1}{48}\left(8x-9x^2+10x\sqrt{-x}\right)\Big|_{-4}^{x}=$$

$$=\frac{8x-9x^2+4x^2\sqrt{-x}}{48}+1$$

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le -4\\ \dfrac{8x-9x^2+4x^2\sqrt{-x}}{48}+1, & -4<x\le 0\\ 1, & x>0\end{cases}$$

$$y=\sqrt{-x}\Rightarrow x=-y^2$$

$$p_\eta(y)=\int\limits_{-y^2}^{0}p_{\xi\eta}(x,y)\,dx=\frac{1}{16}\int\limits_{-y^2}^{0}(-3x+y^2)\,dx=\frac{1}{16}\left(-\frac{3x^2}{2}+y^2x\right)\Bigg|_{-y^2}^{0}=\frac{5y^4}{32}$$

$$p_\eta(y)=\begin{cases}\dfrac{5y^4}{32}, y\in[0;2]\\ 0, y\notin[0;2]\end{cases}.$$

$$F_\eta(y)=\int_0^y p_\eta(y)\,dy=\int_0^y \frac{5y^4}{32}dy=\frac{y^5}{32}$$

$$F_\eta(y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ \frac{y^5}{32}, & 0<y\le 2\\ 1, & y>2\end{cases}$$

г) Условные функции распределения и условные плотности распределения случайной величины ξ при условии η, и случайной величины η при условии ξ. Проверьте, будут ли эти случайные величины независимыми

Условная плотность распределения

$$p_\xi(x|y)=\frac{p_{\xi\eta}(x,y)}{p_\eta(y)}$$

$$p_\xi(x|y)=\frac{\frac{1}{16}(-3x+y^2)}{\frac{5y^4}{32}}=\frac{2(-3x+y^2)}{5y^4}\text{ при }(x,y)\in D$$

Условная плотность распределения

$$p_\eta(y|x)=\frac{p_{\xi\eta}(x,y)}{p_\xi(x)}$$

$$p_\eta(y|x)=\frac{\frac{1}{16}(-3x+y^2)}{\frac{8-18x+10x\sqrt{-x}}{48}}=\frac{3(-3x+y^2)}{8-18x+10x\sqrt{-x}}\text{ при }(x,y)\in D$$

Для независимых случайных величин должно выполняться равенство:

$$p_\xi(x|y)=p_\xi(x)-\text{неверно}$$

Следовательно, случайные величины зависимы.

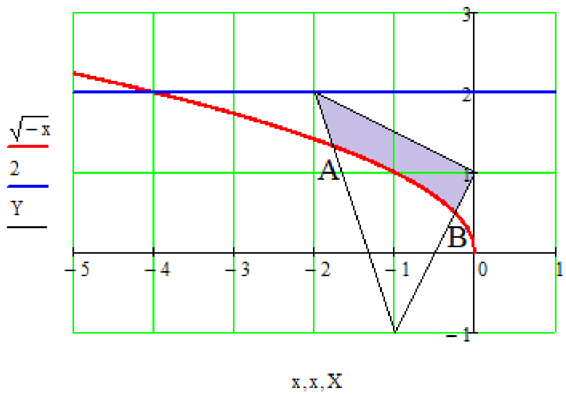
$$F_\xi(x|y)=\frac{2}{5y^4}\int_{-4}^{x}(-3x+y^2)\,dx=\frac{2\left(-\frac{3x^2}{2}+y^2x\right)\Big|_{-4}^{x}}{5y^4}=$$

$$=\frac{2xy^2-3x^2+8y^2+48}{5y^4}\text{ при }(x,y)\in D$$

$$F_\eta(y|x) = \int\limits_0^y \frac{3(-3x+y^2)}{8-18x+10x\sqrt{-x}}dy =$$

$$= \frac{3\left(-3xy+\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^y}{8-18x+10x\sqrt{-x}} = \frac{y(9x-y^2)}{8-18x+10x\sqrt{-x}} \text{ при } (x,y)\in D$$

д) Вычислите вероятность попадания вектора (ξ,η) в треугольник с вершинами в точках $(-1;-1), (-2;2), (0;1)$. (Записать интеграл, расставить пределы интегрирования, считать интеграл - не надо)



Стороны треугольника:

$$(-2;2),(0;1): y = -\frac{x}{2}+1;$$

$$(-2;2),(-1;-1): y = -3x-4$$

$$(0;1),(-1;-1): y = 2x+1$$

Точка A: $-3x-4=\sqrt{-x} \Longrightarrow x = -\frac{16}{9}$.

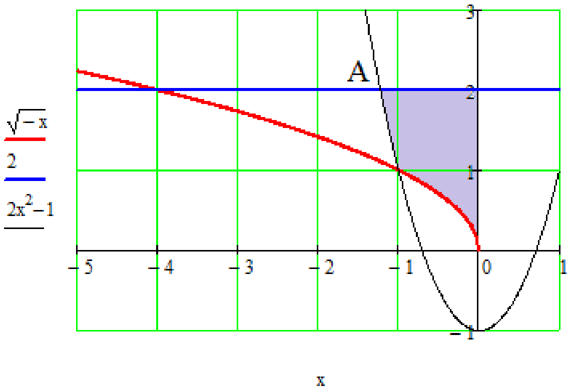
Точка B: $2x+1=\sqrt{-x} \Longrightarrow x = -\frac{1}{4}$.

$$P = \frac{1}{16}\int_{-2}^{-\frac{16}{9}} dx \int_{-3x-4}^{-\frac{x}{2}+1}(-3x+y^2)\,dy + \frac{1}{16}\int_{-\frac{16}{9}}^{-\frac{1}{4}} dx \int_{\sqrt{-x}}^{-\frac{x}{2}+1}(-3x+y^2)\,dy +$$

$$+\frac{1}{16}\int_{-1/4}^{0} dx \int_{2x+1}^{-\frac{x}{2}+1}(-3x+y^2)\,dy$$

e) Значение функции распределения $F_\mu(z)$ новой случайной величины $\mu = 2\xi^2 - \eta$ в точке $z = 1$. (Записать интеграл, расставить пределы интегрирования, считать интеграл - не надо)

$$F_\mu(1) = P(2\xi^2 - \eta \ < 1) = P(\eta > 2\xi^2 - 1)$$



Точка A: $y = 2x^2 - 1 = 2 \Longrightarrow x = \sqrt[3]{1.5}$.

$$F_\mu(1) = \frac{1}{16}\int_{\sqrt[3]{1.5}}^{-1} dx \int_{2x^2-1}^{2} (-3x + y^2)\, dy - \frac{1}{16}\int_{-1}^{0} dx \int_{\sqrt{-x}}^{2} (-3x + y^2)\, dy$$