1. В наборе 4 шара белого цвета, 4 шаров синего и 5 шаров красного цвета. Из набора случайным образом без возвращения вынимают 5 шара. Найдите вероятность события

Событие A={белых и красных шаров достали больше, чем синих},

событие B={синих шаров достали столько же, сколько и красных}

Решение:

A={белых и красных шаров достали больше, чем синих}

Белых и красных шаров всего 9.

Т.е.:

5 красных/белых; 4 красных/белых + 1 синий; 3 красных/белых + 2 синих;

$$P = \frac{m}{n},$$

Где n - число всевозможных исходов эксперимента, m – число благоприятных исходов.

$$\mathrm{C}_N^M = \frac{N!}{M!\,(N-M)!}$$

Извлекаем 5 шаров из 13, следовательно:

$$n = \mathrm{C}_{13}^5 = \frac{13!}{5!\,8!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 1287$$

$$m = \mathrm{C}_9^5 + \mathrm{C}_9^4 \cdot \mathrm{C}_4^1 + \mathrm{C}_9^3 \cdot \mathrm{C}_4^2 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 4 + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{2 \cdot 3} \cdot 6 = 1134$$

$$P(A) = \frac{1134}{1287} = \frac{126}{143} \approx 0.8811$$

B={синих шаров достали столько же, сколько и красных}

1 красный+1 синий+3белых; 2 красных+2 синих+1белый

$$m = \mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_4^1 \cdot \mathrm{C}_4^3 + \mathrm{C}_5^2 \cdot \mathrm{C}_4^2 \cdot \mathrm{C}_4^1 = 5 \cdot 16 + 10 \cdot 6 \cdot 4 = 320$$

$$P(B) = \frac{320}{1287} \approx 0.2486$$

Ответ: $P(A) = \frac{126}{143}$; $P(B) = \frac{320}{1287}$.

2. Из колоды в 52 карты наугад (без возвращения) извлекаются четыре. Найти вероятность указанных в варианте событий.

Событие A={выпали карты разного достоинства}, событие B={карты разной масти}

Решение:

Классическое определение вероятности

$$P = \frac{m}{n},$$

где n - число всевозможных исходов эксперимента, m – число благоприятных исходов.

$$n = C_{52}^{4} \text{ (число способов выбрать 4 карты из 52)}$$

$$C_{52}^{4} = \frac{52!}{4!\,48!} = \frac{52 * 51 * 50 * 49}{2 * 3 * 4} = 270725$$

а) A={выпали карты разного достоинства}. Карт одного достоинства 4, всего различных достоинств 13. Выбираем 4 достоинств из 13 и потом по одной карте каждого выбранного достоинства:

$$m = C_{13}^{4} \cdot (C_{4}^{1})^{4} = \frac{13!}{4!\,9!} \cdot 16^{2} = 183040$$

$$P = \frac{183040}{270725} \approx 0.6761$$

б) B={карты разной масти}. Всего мастей 4 по 13 карт в каждой, т.е. нужно по одной карты каждой масти.

$$m = (C_{13}^{1})^{4} = 13^{4} = 28561$$

$$P = \frac{28561}{270725} \approx 0.1055$$

Ответ: $P(A) = \frac{183040}{270725} \approx 0.6761;\ P(B) = \frac{28561}{270725} \approx 0.1055.$

3. Консультация перед экзаменом должна начаться между 11.00 и 12.00. Преподаватель и студенты забыли уточнить время. Если преподаватель приходит первым в указанное время, а студентов еще нет, то преподаватель ждет студентов не более 20 минут. Если же студенты пришли первыми, то они ждут преподавателя не более 15 минут. Найти вероятность указанного в варианте события.

Консультация началась либо до 11.20, либо после 11.45

Решение:

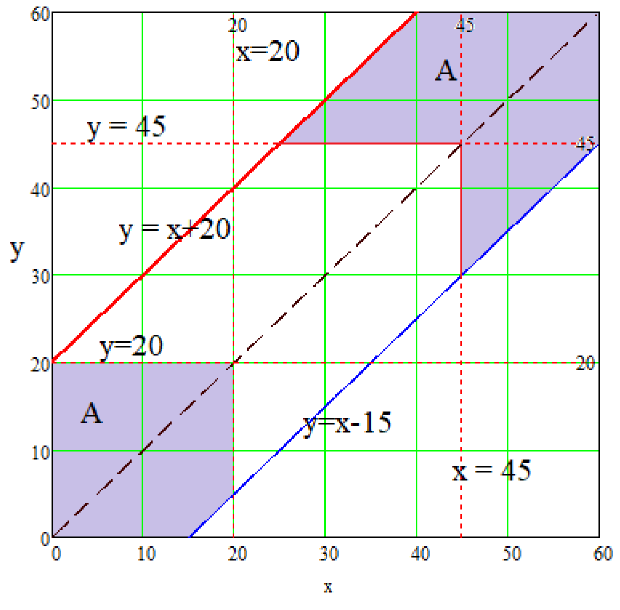
Пусть x - время прихода преподавателя, y – время прихода студентов. Для простоты будем считать время 11.00 нулевой точкой отсчёта времени. Тогда

$$x \in [0, 60], y \in [0, 60] \text{ (минут)}$$

Если преподаватель приходит первым $(y > x)$, то консультация начинается при $y - x \leq 20 \Rightarrow y \leq x + 20$. Здесь, чтобы консультация была либо до 11.20, либо после 11.45 нужно, чтобы $y < 20$ или $y > 45$.

Если преподаватель приходит вторым $(y < x)$, то консультация начинается при $x - y \leq 15 \Rightarrow y \geq x - 15$. Здесь, чтобы консультация была либо до 11.20, либо после 11.45 нужно, чтобы $x < 20$ или $x > 45$.

Изобразим область значений (x, y) на плоскости, отметим области, соответствующие условиям:



Используем геометрическое определение вероятности на плоскости:

$$P = \frac{S(A)}{S(\Omega)}$$

Ω - квадрат $[0,60]\times[0,60]$, A - заштрихована на рисунке.

$$P = \frac{20^2 - \frac{25}{2} + 20\cdot 15 + 15^2}{60^2} = \frac{912.5}{3600} = \frac{73}{288} \approx 0.2535.$$

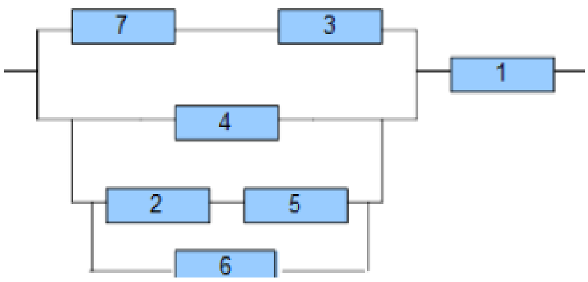
Ответ: $\frac{73}{288}$.

4. Система надежности состоит из 7 элементов и имеет схему, изображенную на рисунке. События A_i, $i=\overline{1,7}$,— отказы элементов за заданный промежуток времени.

1) Выразите через события A_i события A и $\overline{A}$, где A—отказ всей системы за заданный промежуток времени.

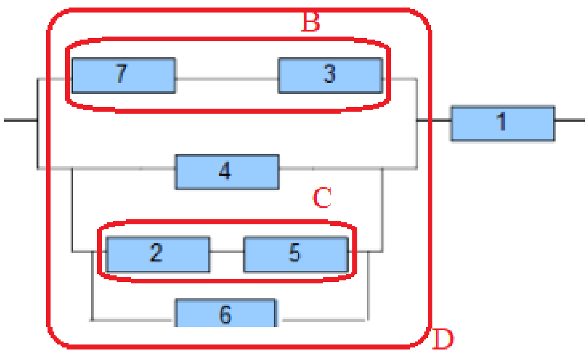
2) Считая, что события A_i независимы в совокупности и имеют вероятности $P(A_i)=p_i$, $i=\overline{1,7}$, вычислите вероятность события A.

$p_1=0{,}2, p_2=0{,}1, p_3= p_4=0{,}3, p_5= p_6=p_7=0{,}2.$



Решение:

Выделим в системе подсистемы как показано на рисунке:



1) События B, C, D – отказ соответствующих подсистем

$$B = A_3 + A_7$$

$$C = A_2 + A_5$$

$$D = BA_4CA_6 = (A_3 + A_7)A_4(A_2 + A_5)A_6$$

A — отказ всей системы за заданный промежуток времени.

$$A = D + A_1 = A_1 + (A_3 + A_7)A_4(A_2 + A_5)A_6$$

Противоположное событие:

$$\overline{A} = \overline{A_1 + (A_3 + A_7)A_4(A_2 + A_5)A_6} = \overline{A_1} \cdot \overline{(A_3 + A_7)A_4(A_2 + A_5)A_6} =$$

$$= \overline{A_1} \cdot \left(\overline{(A_3 + A_7)} + \overline{A_4} + \overline{(A_2 + A_5)} + \overline{A_6}\right) = \overline{A_1} \cdot \left(\overline{A_3} \cdot \overline{A_7} + \overline{A_4} + \overline{A_2} \cdot \overline{A_5} + \overline{A_6}\right) =$$

2)

$$P(B) = P(A_3 + A_7) = 1 - \big(1 - P(A_3)\big)\big(1 - P(A_7)\big) = 1 - 0.7 \cdot 0.8 = 0.44$$

$$P(C) = P(A_2 + A_5) = 1 - \big(1 - P(A_2)\big)\big(1 - P(A_5)\big) = 1 - 0.9 \cdot 0.8 = 0.28$$

$$P(D) = P(BA_4CA_6) = P(B)P(A_4)P(C)P(A_6) = 0.44 \cdot 0.3 \cdot 0.28 \cdot 0.2 = 0.007392$$

$$P(A) = P(D + A_1) = 1 - \big(1 - P(D)\big)\big(1 - P(A_1)\big) =$$
$$= 1 - (1 - 0.007392) \cdot 0.8 = 0.2059136$$

Ответ: $P(A) = 0.2059136$.

5. В первой урне находятся 6 белых и 2 черных шаров, во второй урне — 3 белых и 4 черных шаров. Сначала из первой урны во вторую перекладывается наугад 4 шаров, затем так же наугад перекладывается из второй урны в первую 4 шаров.

а) Определите вероятность того, что после вскрытия первой урны в ней будет столько же белых шаров, сколько было до проведения опыта.

б) После вскрытия первой урны оказалось, что в ней столько же белых шаров, сколько было до проведения опыта. Вычислите вероятность того, что при этом условии из первой урны во вторую переложили 2 черных шаров.

Решение:

Введём следующие гипотезы:

H_i – из первой урны во вторую переложили i чёрных шаров;

$$C_8^4 = \frac{8!}{4!\,4!} = \frac{8 * 7 * 6 * 5}{2 * 3 * 4} = 70$$

$$P(H_0) = \frac{C_6^4}{C_8^4} = \frac{15}{70} = \frac{3}{14}; (\text{в } 1-\text{ой урне } 2\text{б} + 2\text{ч, во } 2-\text{ой } 7\text{б} + 4\text{ч})$$

$$P(H_1) = \frac{C_6^3 C_2^1}{C_8^4} = \frac{40}{70} = \frac{4}{7}; (\text{в } 1-\text{ой урне } 3\text{б} + 1\text{ч, во } 2-\text{ой } 6\text{б} + 5\text{ч})$$

$$P(H_2) = \frac{C_6^2 C_2^2}{C_8^4} = \frac{15}{70} = \frac{3}{14}; (\text{в } 1-\text{ой урне } 4\text{б} + 2\text{ч, во } 2-\text{ой } 5\text{б} + 6\text{ч})$$

Убеждаемся, что гипотезы образуют полную группу несовместных событий

$$\sum_i P(H_i) = 1.$$

а) Пусть событие A – после вскрытия первой урны в ней будет столько же белых шаров (6), сколько было до проведения опыта. Тогда при перекладке 4 шаров в первую урну во второй урне 11 шаров.

$$C_{11}^4 = \frac{11!}{4!\,7!} = 330$$

$$P(A|H_0) = \frac{C_7^4}{C_{11}^4} = \frac{35}{330};\ P(A|H_1) = \frac{C_6^3 C_5^1}{C_{11}^4} = \frac{100}{330};$$

$$P(A|H_2) = \frac{C_5^2 C_6^2}{C_{11}^4} = \frac{150}{330}.$$

Воспользуемся формулой полной вероятности:

$$P(A) = \sum_i P(H_i) \cdot P(A|H_i)$$

$$P(A) = \frac{3}{14} \cdot \frac{35}{330} + \frac{4}{7} \cdot \frac{100}{330} + \frac{3}{14} \cdot \frac{150}{330} = \frac{271}{924}$$

б) Вероятность того, что при этом условии из первой урны во вторую переложили 2 черных шаров можно определить по формуле Байеса:

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A|H_2)}{P(A)}$$

$$P(H_2|A) = \frac{\frac{3}{14} \cdot \frac{150}{330}}{\frac{271}{924}} = \frac{90}{271}$$

Ответ: а) $\frac{271}{924}$; б) $\frac{90}{271}$.

6. Вероятность попадания в цель при любом из 7 выстрелов равна 0,4. Найдите вероятность того, что произойдет:

а) Ровно 4 попаданий.

б) Не более 4 попаданий.

в) Не менее 4 попаданий.

г) От 2 до 9 попаданий.

Решение: по формуле Бернулли вероятность m успехов в серии из n испытаний определяется по формуле:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

а) ровно 4 попадания;

$$P_7(4) = C_7^4 0.4^4 \cdot 0.6^3 = \frac{7!}{4!\,3!} \cdot \frac{2^4 \cdot 3^3}{5^7} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 3} \cdot \frac{2^4 \cdot 3^3}{5^7} = 0.193536$$

б) Пусть событие А - не более 4-х попаданий, тогда

$$P(A) = P_7(0) + P_7(1) + P_7(2) + P_7(3) + P_7(4)$$

$$P_7(0) = 0.6^7 = 0.0279936$$

$$P_7(1) = C_7^1 \cdot 0.4 \cdot 0.6^6 = 7 \cdot 0.4 \cdot 0.6^6 = 0.1306368$$

$$P_7(2) = C_7^2 \cdot 0.4^2 \cdot 0.6^5 = 21 \cdot 0.4^2 \cdot 0.6^6 = 0.2612736$$

$$P_7(3) = C_7^3 \cdot 0.4^3 \cdot 0.6^4 = 35 \cdot 0.4^3 \cdot 0.6^4 = 0.290304$$

$$P(A) = 0.0279936 + 0.1306368 + 0.2612736 + 0.290304 + 0.193536 = \\ = 0.903744$$

в) Пусть событие В - не менее 4 попаданий, тогда $\overline{B}$ − менее 4 попаданий

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P_7(0) - P_7(1) - P_7(2) - P_7(3)$$

$$P(B) = 1 - 0.0279936 - 0.1306368 - 0.2612736 - 0.290304 = 0.289792$$

г) С - от 2 до 9 попаданий включительно, т.е. не менее 2-х попаданий

$$P(C) = 1 - P_7(0) - P_7(1) = 1 - 0.0279936 - 0.1306368 = 0.8413696$$

Ответ: а) 0.193536; б)0.903744; в) 0.289792; г)0.8413696.

7. Определите вероятность того, что среди 1500 изготовленных изделий бракованными окажутся:

а) ровно 4 изделий.

б) не более 5 изделий

если вероятность брака равна 0,003 и определите вероятность того, что среди 1600 изготовленных изделий бракованными окажутся

в) ровно 120 изделий.

г) от 90 до 160 изделий

если вероятность брака равна 0,08

Решение:

а) Поскольку вероятность «успеха» - брака изделия $p = 0.008$ достаточно мала, а число испытаний велико, то будем использовать формулу Пуассона:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!},$$

$$\lambda = np.$$

Итак, $n = 1500$, $p = 0.003$, следовательно, $\lambda = 4.5$.

Ровно 4 изделия окажутся бракованными:

$$P_{1500}(4) = \frac{4.5^4 e^{-4.5}}{4!} \approx 0.1898$$

б) А – бракованными окажутся не более 5 изделий

$$P(A) = P_{1500}(0) + P_{1500}(1) + P_{1500}(2) + P_{1500}(3) + P_{1500}(4) + P_{1500}(5) =$$

$$= e^{-4.5}\left(1 + 4.5 + \frac{4.5^2}{2} + \frac{4.5^3}{3!} + \frac{4.5^4}{4!} + \frac{4.5^5}{5!}\right) = \frac{80993}{1280e^{4.5}} \approx 0.7029$$

в) Итак, $n = 1600, p = 0.08, np = 128, npq = 117.76$

По формуле Муавра-Лапласа вероятность m успехов в серии из n испытаний определяется по формуле:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{m - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

где $\varphi(x)$ – интегральная функция Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. При этом считаем, что $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Значения функции находим из таблиц.

$$P_{1600}(120) \approx \frac{1}{\sqrt{117.76}} \varphi\left(\frac{120-128}{\sqrt{117.76}}\right) = \frac{1}{\sqrt{117.76}} \varphi(-0.7372) \approx 0.028$$

г) Воспользуемся интегральной теоремой Муавра-Лапласа (m – число успехов в серии из n испытаний):

$$P(a < m < b) = \Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}}\right),$$

где $\Phi_0(x)$ – интегральная функция Лапласа $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-x^2/2}\, dx$. При этом считаем, что $\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$, При $x > 5$ принимаем $\Phi_0(x) \approx 0.5$. Значения функции находим из таблиц.

$$P(90 < m < 160) = \Phi_0\left(\frac{160-128}{\sqrt{117.76}}\right) - \Phi_0\left(\frac{90-128}{\sqrt{117.76}}\right) \approx \Phi_0(2.95) - \Phi_0(-3.50) =$$

$$= \Phi_0(2.95) + \Phi_0(3.50) \approx 0.4984 + 0.4998 = 0.9982$$

Ответ: 0.9982.

8. В наборе 4 шаров белого цвета, 5 шаров синего и 6 шаров красного цвета. Из набора случайным образом без возвращения вынимают 5 шаров. Случайная величина ξ – число вынутых синих шаров. Найдите:

а) Ряд распределения случайной величины ξ.

б) Вероятность попадания случайной величины ξ в интервалы

(0; 3), [0; 3); (0; 3], [0; 3].

в) Найдите ряд распределения случайных величин $\eta = (25 - \xi^2)\cos \pi\xi\,, \mu = (5-\xi)^3 + 10$.

Решение:

ξ может принимать значение от 0 до 6,

$$P(\xi = k) = \frac{C_5^k C_{10}^{5-k}}{C_{15}^5}$$

$$C_{15}^5 = \frac{15!}{5!\,10!} = 3003$$

Число способов $C_5^k C_{10}^{5-k}$:

k	0	1	2	3	4	5
$C_5^k C_{10}^{5-k}$	252	1050	1200	450	50	1

а) Ряд распределения случайной величины ξ.

ξ	0	1	2	3	4	5
p	0,083916	0,34965	0,3996	0,14985	0,01665	0,000333

б) Вероятность попадания случайной величины ξ в интервалы

$$P(\xi \in (0;\ 3)) = P(\xi = 1) + P(\xi = 2) = 0.749251$$

$$P(\xi \in [0;\ 3)) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2) = 0.833167$$

$$P(\xi \in\ (0; 3]) = P(\xi = 1) + P(\xi = 2) + P(\xi = 3) = 0.899101$$

$$P(\xi \in [0;\ 3]) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2) + P(\xi = 3) = 0.983017$$

в) Ряд распределения случайных величин $\eta = (25 - \xi^2)\cos \pi\xi\,, \mu = (5 - \xi)^3 + 10$

Вычислим значения случайных величин η и μ:

ξ	0	1	2	3	4	5
η	25	-24	21	-16	9	0
μ	135	74	37	18	11	10
p	0,083916	0,34965	0,3996	0,14985	0,01665	0,000333

Составим ряд распределения η и μ, упорядочив значения случайных величин по возрастанию и, если надо, складывая вероятности при одинаковых значениях:

η	-24	-16	0	9	21	25
p	0,349650	0,149850	0,000333	0,016650	0,399600	0,083916

μ	10	11	18	37	74	135
p	0,00033	0,01665	0,14985	0,3996	0,34965	0,083916

9. Непрерывная случайная величина ξ имеет плотность распределения $p(x)$.

$$p(x) = \begin{cases} Axe^{3x}, & 0 \le x \le 2 \\ 0, & x < 0, x > 2 \end{cases}.$$

Найдите:

а) Константу A

По условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$$

$$A\int_0^2 xe^{3x}dx = \begin{pmatrix} u = x & dv = e^{3x}dx \\ du = dx & v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{pmatrix} = \frac{Axe^{3x}}{3}\Bigg|_0^2 - \frac{A}{3}\int_0^2 e^{3x}dx = \frac{A}{3}(2e^6) -$$

$$-\frac{Ae^{3x}}{9}\Bigg|_0^2 = A\left(\frac{2e^6}{3} - \frac{e^6-1}{9}\right) = \frac{A}{9}(5e^6+1)$$

$$A = \frac{9}{5e^6+1}$$

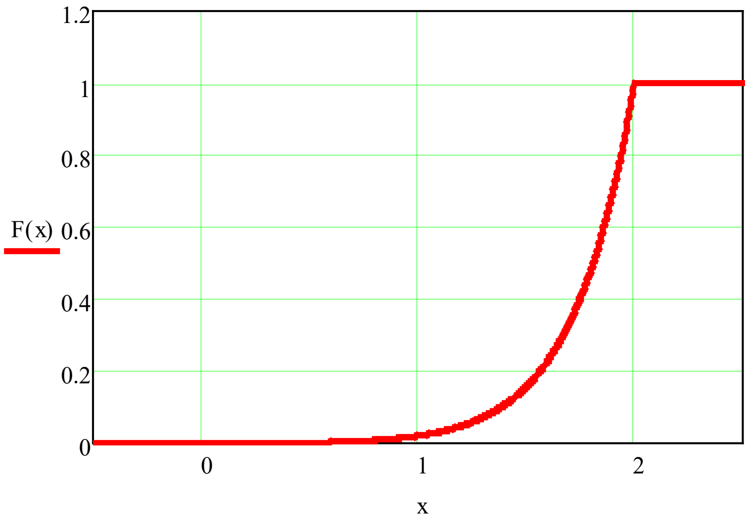
б) Функцию распределения случайной величины ξ и постройте ее график.

Найдём функцию распределения:

$$F_\xi(x) = \frac{9}{5e^6+1}\int_0^x xe^{3x}dx = \begin{pmatrix} u = x & dv = e^{3x}dx \\ du = dx & v = \frac{e^{3x}}{3} \end{pmatrix} = \frac{3xe^{3x}}{5e^6+1}\Bigg|_0^x -$$

$$-\frac{3}{5e^6+1}\int_0^x e^{3x}dx = \frac{3xe^{3x}}{5e^6+1} - \frac{e^{3x}}{5e^6+1}\Bigg|_0^x = \frac{e^{3x}(3x-1)+1}{5e^6+1}$$

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \dfrac{e^{3x}(3x-1)+1}{5e^6+1}, & x \in (0,2) \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$



в) Вычислите функцию распределения и плотность распределения случайной величины $\eta = (\xi - 1)^3 + 2$.

$$F_\eta(y) = P(\eta < y) = P((\xi - 1)^3 + 2 < y) = P((\xi - 1)^3 < y - 2) =$$

$$= P\left(\xi < 1 + \sqrt[3]{y-2}\right) = F_\xi\left(1 + \sqrt[3]{y-2}\right) = \frac{e^{3\left(1+\sqrt[3]{y-2}\right)}\left(3\left(1 + \sqrt[3]{y-2}\right) - 1\right) + 1}{5e^6 + 1}$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 1, \qquad x = 2 \Rightarrow y = 3$$

$$F_\eta(y) = \begin{cases} 0, y \le 1 \\ \dfrac{e^{3\left(1+\sqrt[3]{y-2}\right)}\left(2 + 3\sqrt[3]{y-2}\right) + 1}{5e^6 + 1}, y \in (1,3) \\ 1, \quad y > 3 \end{cases}$$

$$p_\eta(y) = p_\xi(g(y))|g'(y)|$$

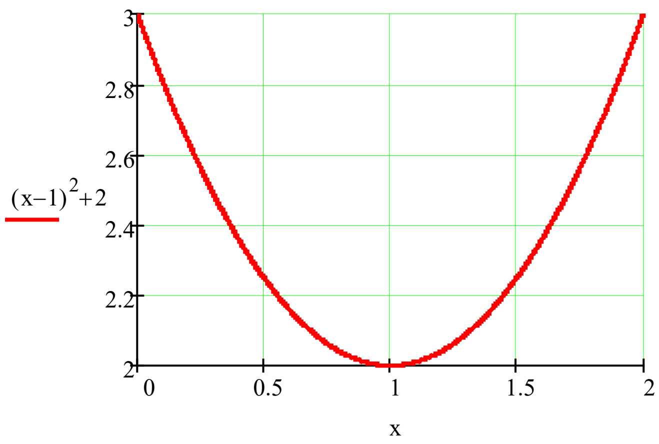
$$g(y) = \sqrt[3]{y-2}$$

$$|g'(y)| = \frac{\sqrt[3]{y-2}}{3(y-2)}$$

$$p_\eta(y) = \frac{9}{5e^6 + 1}\left(1 + \sqrt[3]{y-2}\right)e^{3\left(1+\sqrt[3]{y-2}\right)} \cdot \frac{\sqrt[3]{y-2}}{3(y-2)} = \frac{3e^{3\left(1+\sqrt[3]{y-2}\right)}\left(1 + \sqrt[3]{y-2}\right)}{(5e^6 + 1)(y-2)^{2/3}}$$

$$p_\eta(y) = \begin{cases} 0, \quad y \le 1 \\ \dfrac{3e^{3\left(1+\sqrt[3]{y-2}\right)}\left(1 + \sqrt[3]{y-2}\right)}{(5e^6 + 1)(y-2)^{2/3}}, \quad y \in (1,3) \\ 0, \quad y > 3 \end{cases}$$

г) Вычислите функцию распределения и плотность распределения случайной величины $\mu = (\xi - 1)^2 + 2$.



$$F_\mu(y) = P(\mu < y) = P((\xi - 1)^2 + 2 < y) = P((\xi - 2)^2 < y - 2) =$$

$$= P\left(1 - \sqrt{y-2} < \xi < 1 + \sqrt{y-2}\right) = F_\xi\left(1 + \sqrt{y-2}\right) - F_\xi\left(1 - \sqrt{y-2}\right) =$$

$$= \frac{e^{3\left(1+\sqrt{y-2}\right)}\left(3\left(1+\sqrt{y-2}\right) - 1\right) + 1}{5e^6 + 1} - \frac{e^{3\left(1-\sqrt{y-2}\right)}\left(3\left(1-\sqrt{y-2}\right) - 1\right) + 1}{5e^6 + 1}$$

$$= \frac{e^6\left(4\,\mathrm{sh}\left(3\sqrt{y-2}\right) + 6\sqrt{y-2}\,\mathrm{ch}\left(3\sqrt{y-2}\right)\right)}{5e^6 + 1}$$

$$x = 0 \Longrightarrow y = 3, \qquad x = 1 \Longrightarrow y = 2$$

$$F_\mu(y) = \begin{cases} 0, & y \le 2 \\ \dfrac{e^6\left(4\,\mathrm{sh}\left(3\sqrt{y-2}\right) + 6\sqrt{y-2}\,\mathrm{ch}\left(3\sqrt{y-2}\right)\right)}{5e^6 + 1}, & y \in (2, 3) \\ 1, & y > 3 \end{cases}$$

$$p_\mu(y) = p_\xi(g(y))|g'(y)|$$

$$g(y) = 1 \pm \sqrt{y-2}$$

$$|g'(y)| = \frac{1}{2\sqrt{y-2}}$$

$$p_\mu(y) = \frac{9}{5e^6 + 1}\left(\left(1 - \sqrt{y-2}\right)e^{3\left(1-\sqrt{y-2}\right)} + \left(1 + \sqrt{y-2}\right)e^{3\left(1+\sqrt{y-2}\right)}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y-2}}$$

$$= \frac{9e^3\left(\left(1 - \sqrt{y-2}\right)e^{-3\sqrt{y-2}} + \left(1 + \sqrt{y-2}\right)e^{3\sqrt{y-2}}\right)}{2(5e^6 + 1)\sqrt{y-2}}$$

$$p_\mu(y) = \begin{cases} 0, & y \le 2 \\ \dfrac{9e^3\left(\left(1-\sqrt{y-2}\right)e^{-3\sqrt{y-2}} + \left(1+\sqrt{y-2}\right)e^{3\sqrt{y-2}}\right)}{2(5e^6+1)\sqrt{y-2}}, & y \in (2,3) \\ 0, & y > 3 \end{cases}$$

10. В условиях задачи 8 выбирают $m = 5$ шаров. (В наборе 4 шаров белого цвета, 5 шаров синего и 6 шаров красного цвета). Пусть ξ число вынутых белых шаров, а через η – красных.

Найдите:

а) Совместное распределение случайных величин ξ и η (ряд распределения).

ξ может принимать значение от 0 до 4, η может принимать значение от 0 до 5. Всего 15 шаров, извлекаем 5.

$$P(\xi = k, \eta = m) = \frac{C_4^k C_6^m C_5^{5-k-m}}{C_{15}^5};\ C_{15}^5 = \frac{15!}{5!\,10!} = 3003$$

Число способов $C_4^k C_6^m C_5^{5-k-m}$:

$k \setminus m$	0	1	2	3	4	5
0	1	30	150	200	75	6
1	20	240	600	400	60	
2	60	360	450	120		
3	40	120	60			
4	5	6				

Совместное распределение случайных величин ξ и η

$\xi \setminus \eta$	0	1	2	3	4	5	Сумма
0	0,000333	0,009990	0,049950	0,066600	0,024975	0,001998	0,153846
1	0,006660	0,079920	0,199800	0,133200	0,019980		0,439560
2	0,019980	0,119880	0,149850	0,039960			0,329670
3	0,013320	0,039960	0,019980				0,073260
4	0,001665	0,001998					0,003663
Сумма	0,041958	0,251748	0,419580	0,239760	0,044955	0,001998	1

б) Ряды распределения случайных величин ξ и η.

ξ	0	1	2	3	4
$P(\xi)$	0,153846	0,439560	0,329670	0,073260	0,003663

η	0	1	2	3	4	5
$P(\eta)$	0,041958	0,251748	0,419580	0,239760	0,044955	0,001998

в) Условные распределения случайной величины ξ при условии η, случайной величины η при условии ξ, проверить случайные величины на независимость

Условные распределения:

$$P(\xi = k|\eta = m) = \frac{P(\xi = k, \eta = m)}{P(\eta = m)}$$

Условный закон распределения $P(\xi = k|\eta = 0)$:

ξ	P
0	0,007937
1	0,158730
2	0,476190
3	0,317460
4	0,039683
Сумма	1

Условный закон распределения $P(\xi = k|\eta = 1)$:

ξ	P
0	0,039683
1	0,317460
2	0,476190
3	0,158730
4	0,007937
Сумма	1

Условный закон распределения $P(\xi = k|\eta = 2)$:

ξ	P
0	0,119048
1	0,476190
2	0,357143
3	0,047619
Сумма	1

Условный закон распределения $P(\xi = k|\eta = 3)$:

ξ	P
0	0,277778
1	0,555556
2	0,166667
Сумма	1

Условный закон распределения $P(\xi = k|\eta = 4)$:

ξ	P
0	0,555556
1	0,444444
Сумма	1

Условный закон распределения $P(\xi = 0|\eta = 5)$: $P(\xi = 0|\eta = 5) = 1$.

$$P(\eta = m|\xi = k) = \frac{P(\xi = k, \eta = m)}{P(\xi = k)}$$

Условный закон распределения $P(\eta = m|\xi = 0)$:

η	0	1	2	3	4	5	Сумма
P	0,002165	0,064935	0,324675	0,432900	0,162338	0,012987	1

Условный закон распределения $P(\eta = m|\xi = 1)$:

η	0	1	2	3	4	Сумма
P	0,015152	0,181818	0,454545	0,303030	0,045455	1

Условный закон распределения $P(\eta = m|\xi = 2)$:

η	0	1	2	3	Сумма
P	0,060606	0,363636	0,454545	0,121212	1

Условный закон распределения $P(\eta = m|\xi = 3)$:

η	0	1	2	Сумма
P	0,181818	0,545455	0,272727	1

Условный закон распределения $P(\eta = m|\xi = 4)$:

η	0	1	Сумма
P	0,454545	0,545455	1

Для независимых случайных величин

$$P(\xi < x, \eta < y) = P(\xi < x)P(\eta < y)$$

Например

$$P(\xi < 1, \eta < 1) = \frac{1}{3003}$$

$$P(\xi < 1)P(\eta < 1) = \frac{126}{3003} \cdot \frac{462}{3003} \neq \frac{1}{3003}$$

Равенство

$$P(\xi < 1, \eta < 1) = P(\xi < 1)P(\eta < 1) - \text{неверно}$$

Следовательно, ξ и η зависимы.

г) Значения двумерной функции распределения $F_{\xi\eta}(x, y)$в заданных точках $(x, y) = (2; 6), (5; 3), (3; 3)$,

$$F_{\xi\eta}(5, 3) = P(\xi < 5, \eta < 3) = P(\eta < 3) = P(\eta = 0) + P(\eta = 1) + P(\eta = 2) =$$

$$= 0.713287$$

$$F_{\xi\eta}(2,6) = P(\xi < 2, \eta < 6) = P(\xi < 2) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) = 0.593407$$

$$F_{\xi\eta}(3,3) = P(\xi < 3, \eta < 3) = P(\xi = 0, \eta = 0) + P(\xi = 1, \eta = 1) +$$

$$+P(\xi = 1, \eta = 0) + P(\xi = 0, \eta = 1) + P(\xi = 1, \eta = 2) + P(\xi = 2, \eta = 1) +$$

$$+P(\xi = 2, \eta = 1) + P(\xi = 2, \eta = 0) + P(\xi = 0, \eta = 2) = 0.636364$$

д) Ряд распределения новой случайной величины $\mu = |\xi - \eta^2|$

Составим таблицу значений случайной величины μ:

$\xi \setminus \eta$	0	1	2	3	4	5
0	2	1	2	7	14	23
1	3	2	1	6	13	
2	4	3	0	5		
3	0	1	4			
4	0	1				

Далее определяем соответствующие вероятности, складывая вероятности при одинаковых значениях μ:

μ	0	1	2	3	4	5
$P(\mu)$	0,164835	0,251748	0,130203	0,126540	0,039960	0,039960
μ	6	7	13	14	23	
$P(\mu)$	0,133200	0,066600	0,019980	0,024975	0,001998	

е) Ряд распределения новой двумерной дискретной случайной величины (μ_1; μ_2)

$$\mu_1 = 2(\xi - 1) - 3\eta, \mu_2 = \eta - 2(\xi - 2)$$

Составим таблицу значений случайной величины μ_1:

$\xi \setminus \eta$	0	1	2	3	4	5
0	-2	-5	-8	-11	-14	-17
1	0	-3	-6	-9	-12	
2	2	-1	-4	-7		
3	4	1	-2			
4	6	3				

Далее определяем соответствующие вероятности, складывая вероятности при одинаковых значениях μ:

μ_1	-17	-14	-12	-11	-9	-8	-7
$P(\mu)$	0,001998	0,024975	0,019980	0,066600	0,133200	0,049950	0,039960
μ_1	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
$P(\mu)$	0,199800	0,009990	0,149850	0,079920	0,020313	0,119880	0,006660
μ_1	1	2	3	4	6		
$P(\mu)$	0,039960	0,019980	0,001998	0,013320	0,001665		

Составим таблицу значений случайной величины μ_2:

$\xi \setminus \eta$	0	1	2	3	4	5
0	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	
2	0	1	2	3		
3	-2	-1	0			
4	-4	-3				

Далее определяем соответствующие вероятности, складывая вероятности при одинаковых значениях μ:

μ_2	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$P(\mu)$	0,001665	0,001998	0,013320	0,039960	0,039960	0,119880	0,156510
μ_2	3	4	5	6	7	8	9
$P(\mu)$	0,119880	0,200133	0,143190	0,069930	0,066600	0,024975	0,001998

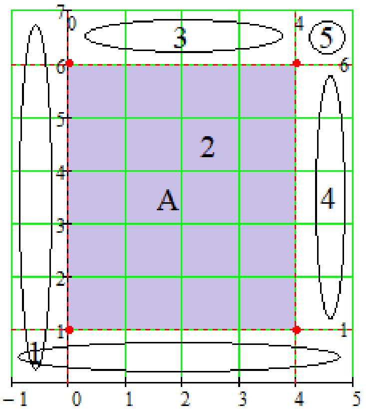
Совместное распределение случайных величин μ_1 и μ_2

$\mu_1 \backslash \mu_2$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-17														0,00200
-14													0,02498	
-12											0,01998			
-11												0,06660		
-9										0,13320				
-8											0,04995			
-7								0,03996						
-6									0,19980					
-5										0,00999				
-4							0,14985							
-3								0,07992						
-2					0,01998				0,00033					
-1						0,11988								
0							0,00666							
1				0,03996										
2					0,01998									
3		0,00200												
4			0,01332											
6	0,00167													

11. В четырехугольник с вершинами в точках $(0;1),(0;6),(4;1),(4;6)$ в соответствии с принципом геометрической вероятности падает частица. Пусть ξ и η - координаты по оси X и У точки падения частицы.

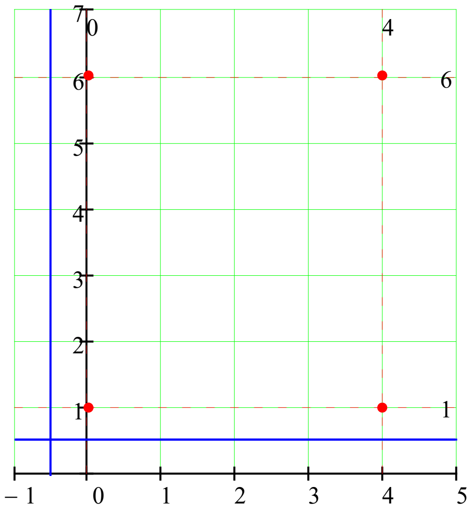
Найдите:

а) Совместную функцию распределения $F_{\xi\eta}(x,y)$ случайной величины (ξ,η) и совместную плотность распределения случайной величины (ξ,η).

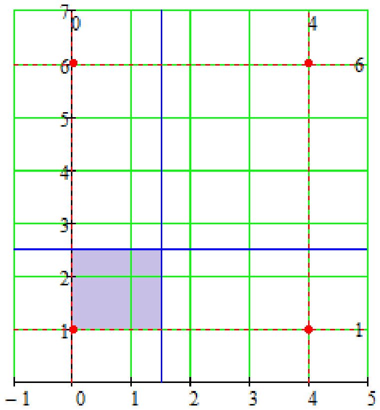


Всего имеем 5 различных областей.

Область 1: $(x < 0)$или $(y < 1)$:



Пересечения с четырёхугольником нет, $F_{\xi\eta}(x,y) = 0$.
Область 2: $(x,y) \in D$:

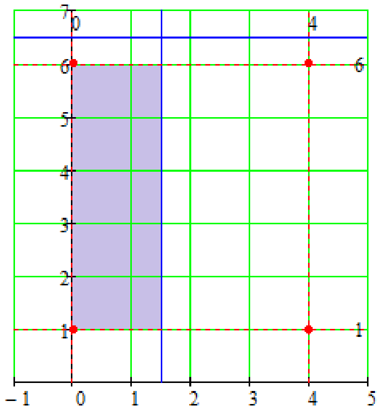


$$F_{\xi\eta}(x,y)=\frac{1}{S_D}\int_0^x\int_1^y dxdy$$

$$S_D=20-\text{площадь области.}$$

$$F_{\xi\eta}(x,y)=\frac{1}{20}\int_0^x dx\int_1^y dy=\frac{x(y-1)}{20}.$$

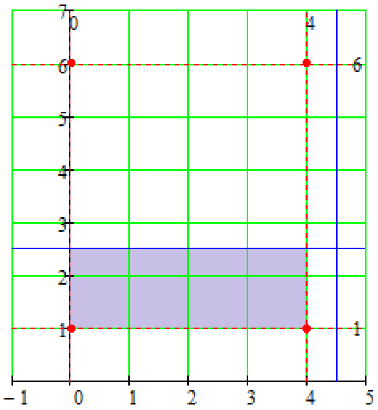
Область 3: $(0<x\leq 4)$и$(y>6)$:



$$F_{\xi\eta}(x,y)=\frac{1}{S_D}\int_0^x\int_1^6 dxdy$$

$$F_{\xi\eta}(x,y)=\frac{1}{20}\int_0^x dx\int_1^6 dy=\frac{x}{4}.$$

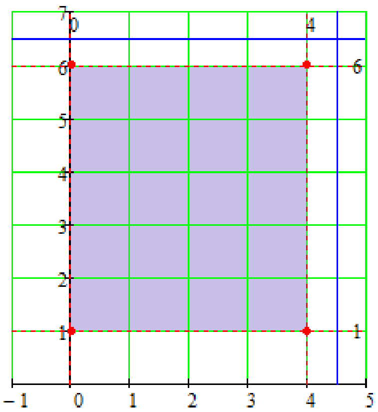
Область 4: $(x>4)$и$(1<y\leq 6)$:



$$F_{\xi\eta}(x,y) = \frac{1}{S_D}\int_0^4\int_1^y dxdy$$

$$F_{\xi\eta}(x,y) = \frac{1}{20}\int_0^4 dx\int_1^y dy = \frac{y-1}{5}.$$

Область 5: $(x > 4)$и$(y > 6)$:



$$F_{\xi\eta}(x,y) = \frac{1}{S_D}\int_0^4\int_1^6 dxdy = \frac{1}{20}\int_0^4\int_1^6 dxdy = 1.$$

$$F_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} 0, & (x < 0) \text{ или } (y < 1) \\ \dfrac{x(y-1)}{20}, & (x,y) \in D \\ \dfrac{x}{4}, & (0 < x \le 4) \text{и} (y > 6) \\ \dfrac{y-1}{5}, & (x > 4) \text{и} (1 < y \le 6) \\ 1, & (x > 4) \text{и} (y > 6) \end{cases}$$

Поскольку площадь четырёхугольника D равна 20, и точки распределены в соответствии с принципом геометрической вероятности то совместная плотность распределения имеет равномерное распределение внутри D:

$$p_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{20}, (x,y) \in D \\ 0, (x,y) \notin D \end{cases}.$$

б) Одномерные плотности и функции распределения случайных величин ξ и η.

$$p_{\xi}(x) = \int_{1}^{6} p_{\xi\eta}(x,y)\,dy = \frac{1}{20}\int_{1}^{6} 1\,dy = \frac{1}{4}$$

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, x \in [0;4] \\ 0, x \notin [0;4] \end{cases}.$$

$$F_{\xi}(x) = \int_{0}^{x} p_{\xi}(x)\,dx = \frac{x}{4}, \qquad 0 < x \le 4$$

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{x}{4}, & 0 < x \le 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$

$$p_{\eta}(y) = \int_{0}^{4} p_{\xi\eta}(x,y)\,dx = \frac{1}{20}\int_{0}^{4} 1\,dy = \frac{1}{5}$$

$$p_{\eta}(y) = \begin{cases} \frac{1}{5}, & y \in [1;6] \\ 0, & y \notin [1;6] \end{cases}.$$

$$F_{\eta}(y) = \int_{1}^{y} p_{\eta}(y)\,dy = \frac{y-1}{5}, 1 < y \le 6$$

$$F_{\eta}(y) = \begin{cases} 0, & y \le 1 \\ \frac{y-1}{5}, & 1 < y \le 6 \\ 1, & y > 6 \end{cases}$$

в) Условные функции распределения и условные плотности распределения случайной величины ξ при условии η, и случайной величины η при условии ξ. Проверьте, будут ли эти случайные величины независимыми

Условная плотность распределения

$$p_\xi(x|y) = \frac{p_{\xi\eta}(x,y)}{p_\eta(y)} = \frac{1}{4} \text{ при } (x,y) \in D$$

Условная плотность распределения

$$p_\eta(y|x) = \frac{p_{\xi\eta}(x,y)}{p_\xi(x)} = \frac{1}{5} \text{ при } (x,y) \in D$$

Для независимых случайных величин должно выполняться равенство:

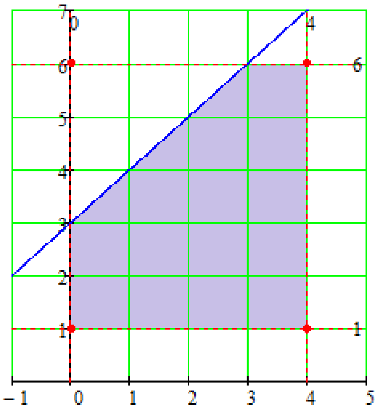
$$p_\xi(x|y) = p_\xi(x) - \text{верно}$$

Следовательно, случайные величины независимы. Условные функции распределения совпадают с одномерными:

$$F_\xi(x|y) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{x}{4}, & 0 < x \le 4; \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$

$$F_\eta(y|x) = \begin{cases} 0, & y \le 1 \\ \frac{y-1}{5}, & 1 < y \le 6 \\ 1, & y > 6 \end{cases}$$

г) Значение функции распределения случайной величины $\mu = -\xi + \eta$ в точке $z = 3$.



$$F_\mu(3) = P(-\xi + \eta < 3) = P(\eta < 3 + \xi) = \frac{S_D}{S} = \frac{20 - \frac{9}{2}}{20} = \frac{31}{40}$$

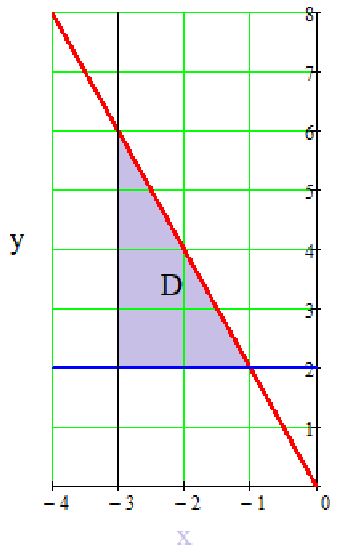
12. Совместная плотность распределения случайных величин ξ и η задана формулой

$$p_{\xi\eta}(x,y) = C(x^2 + 2y), (x,y) \in D,$$

где область D задана в варианте. Найдите:

$$D = \{(x;y): x = -3, y = 2, y = -2x\}$$

а) Постоянную C.



По закону нормировки

$$\iint\limits_D p_{\xi\eta}(x,y)dxdy = 1,$$

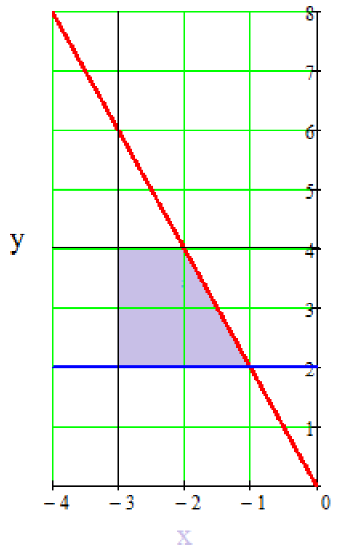
$$D: \begin{cases} -3 \le x \le -1 \\ 2 \le y \le -2x \end{cases}$$

$$\int_{-3}^{-1} dx \int_{2}^{-2x} C(x^2 + 2y)\, dy = C \int_{-3}^{-1} (x^2 y + y^2)|_2^{-2x} dx =$$

$$= C \int_{-3}^{-1} (2x^2 - 2x^3 - 4)dx = C\left(\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{2} - 4x\right)\Bigg|_{-3}^{-1} = \frac{148}{3} C$$

$$C = \frac{3}{148}$$

б) Значения двумерной функции распределения $F_{\xi\eta}(x,y)$ в заданных точках $(x,y) = (-1;4)$



$$F_{\xi\eta}(-1,4) = P(\xi < -1, \eta < 4) = P(\eta < 4) = \int_2^4 dy \int_{-3}^{-y/2} p_{\xi\eta}(x,y)\,dx =$$

$$= \frac{3}{148}\int_2^4 dy \int_{-3}^{-y/2} (x^2 + 2y)\,dx = \frac{3}{148}\int_2^4 \left(\frac{x^3}{3} + 2yx\right)\Bigg|_{-3}^{-y/2} dy =$$

$$= \frac{3}{148}\int_2^4 \left(6y - y^2 - \frac{y^3}{24} + 9\right) dy = \frac{3}{148}\left(3y^2 - \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{96} + 9y\right)\Bigg|_2^4 =$$

$$= \frac{197}{296} \approx 0.66554$$

в) Одномерные плотности и функции распределения случайных величин ξ и η.

$$p_\xi(x) = \int_2^{-2x} p_{\xi\eta}(x,y)\,dy = \frac{3}{148}\int_2^{-2x} (x^2 + 2y)\,dy = \frac{3}{148}(x^2 y + y^2)|_2^{-2x} =$$

$$= \frac{6(x^2 - x^3 - 2)}{148}$$

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{3(x^2 - x^3 - 2)}{74}, x \in [-3;-1] \\ 0, x \notin [-3;-1] \end{cases}.$$

$$F_\xi(x) = \frac{3}{74}\int_{-3}^{x} (x^2 - x^3 - 2)\,dx = \frac{3}{74}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - 2x\right)\Bigg|_{-3}^{x} = \frac{4x^3 - 3x^4 - 24x + 279}{296}$$

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le -3 \\ \dfrac{4x^3 - 3x^4 - 24x + 279}{296}, & -3 < x \le -1 \\ 1, & x > -1 \end{cases}$$

$$y = -2x \Longrightarrow x = -\frac{y}{2}$$

$$p_\eta(y) = \int_{-3}^{-y/2} p_{\xi\eta}(x, y)\, dx = \frac{3}{148} \int_{-3}^{-y/2} (x^2 + 2y)\, dx = \frac{3}{148}\left(\frac{x^3}{3} + 2yx\right)\Bigg|_{\frac{y}{2}}^{2} =$$

$$= \frac{-4y^3 - 96y^2 + 384y + 256}{1377}$$

$$p_\eta(y) = \begin{cases} \dfrac{-y^3 - 24y^2 + 144y + 216}{1184}, y \in [2; 6] \\ 0, y \notin [2; 6] \end{cases}.$$

$$F_\eta(y) = \int_2^y p_\eta(y)\, dy = \int_2^y \frac{-y^3 - 24y^2 + 144y + 216}{1184} dy =$$

$$= \frac{1}{1184}\left(-\frac{y^4}{4} - 8y^3 + 72y^2 + 216y\right)\Bigg|_2^y = \frac{-y^4 - 32y^3 + 288y^2 + 864y - 2608}{4736}$$

$$F_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \le 2 \\ \dfrac{-y^4 - 32y^3 + 288y^2 + 864y - 2608}{4736}, & 2 < y \le 6 \\ 1, & y > 6 \end{cases}$$

г) Условные функции распределения и условные плотности распределения случайной величины ξ при условии η, и случайной величины η при условии ξ. Проверьте, будут ли эти случайные величины независимыми

Условная плотность распределения

$$p_\xi(x|y) = \frac{p_{\xi\eta}(x, y)}{p_\eta(y)}$$

$$p_\xi(x|y) = \frac{\frac{3}{148}(x^2+2y)}{\frac{-y^3-24y^2+144y+216}{1184}} = \frac{24(x^2+2y)}{-y^3-24y^2+144y+216} \text{ при } (x,y) \in D$$

Условная плотность распределения

$$p_\eta(y|x) = \frac{p_{\xi\eta}(x,y)}{p_\xi(x)}$$

$$p_\eta(y|x) = \frac{\frac{3}{148}(x^2+2y)}{\frac{3(x^2-x^3-2)}{74}} = \frac{x^2+2y}{2(x^2-x^3-2)} \text{ при } (x,y) \in D$$

Для независимых случайных величин должно выполняться равенство:

$$p_\xi(x|y) = p_\xi(x) - \text{неверно}$$

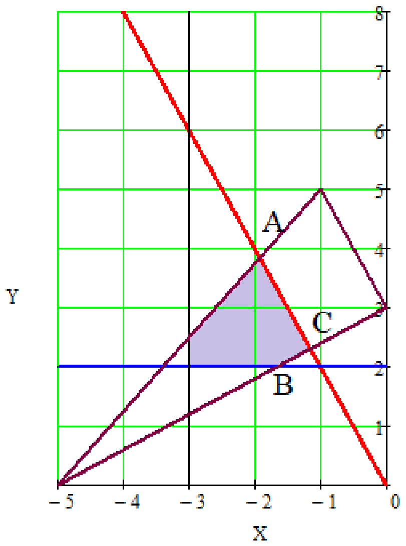
Следовательно, случайные величины зависимы.

$$F_\xi(x|y) = \frac{24}{-y^3-24y^2+144y+216}\int_{-3}^{x}(x^2+2y)\,dx = \frac{24\left(\frac{x^3}{3}+2yx\right)\Big|_{-3}^{x}}{-y^3-24y^2+144y+216} =$$

$$= \frac{8(x^3+6yx+18y+27)}{-y^3-24y^2+144y+216} \text{ при } (x,y) \in D$$

$$F_\eta(y|x) = \int_2^y \frac{x^2+2y}{2(x^2-x^3-2)}dy = \frac{(x^2y+y^2)|_2^y}{2(x^2-x^3-2)} = \frac{y(x^2+y)-2x^2-4}{2(x^2-x^3-2)} \text{при } (x,y) \in D$$

д) Вычислите вероятность попадания вектора (ξ,η) в треугольник с вершинами в точках $(-5;0),(-1;5),(0;3)$. (Записать интеграл, расставить пределы интегрирования, считать интеграл - не надо)



Стороны треугольника:

$$(-5;0),(-1;5): y=\frac{5}{4}x+5+\frac{5}{4}; y=\frac{5(x+5)}{4}$$

$$(-5;0),(0;3): y=\frac{3}{5}x+3$$

Точка А: $\frac{5(x+5)}{4}=-2x \Longrightarrow x=-\frac{25}{13}=-1\frac{12}{13}$.

Точка В: $\frac{3}{5}x+3=2 \Longrightarrow x=-\frac{5}{3}=-1\frac{2}{3}$.

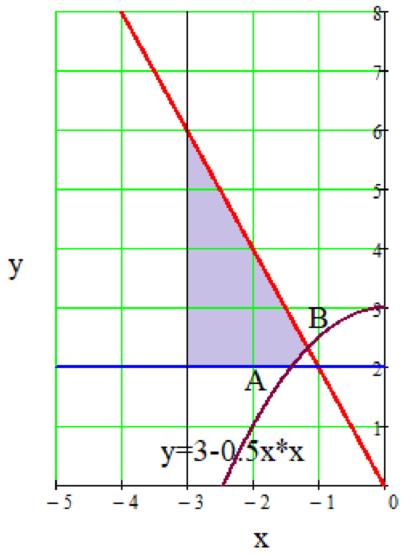
Точка С: $\frac{3}{5}x+3=-2x \Longrightarrow x=-\frac{15}{13}=-1\frac{2}{13}$.

$$P=\frac{3}{148}\int_{-3}^{-1\frac{12}{13}}dx\int_{2}^{\frac{5(x+5)}{4}}(x^2+2y)\,dy+\frac{3}{148}\int_{-1\frac{12}{13}}^{-1\frac{2}{3}}dx\int_{1}^{-2x}(x^2+2y)\,dy+$$

$$+\frac{3}{148}\int_{-1\frac{2}{3}}^{-1\frac{2}{13}}dx\int_{\frac{3}{5}x+3}^{-2x}(x^2+2y)\,dy$$

е) Значение функции распределения $F_\mu(z)$ новой случайной величины $\mu=1-\xi^2-2\eta$ в точке $z=-5$. (Записать интеграл, расставить пределы интегрирования, считать интеграл - не надо)

$$F_\mu(-5)=P(1-\xi^2-2\eta<-5)=P\left(\eta>3-\frac{\xi^2}{2}\right)$$



Точка A: $y = 3 - \frac{x^2}{2} = 2 \Longrightarrow x = \sqrt{2}$.

Точка B: $3 - \frac{x^2}{2} = -2x \Longrightarrow x = 2 - \sqrt{10} \approx -1.162$.

$$F_\mu(-5) = 1 - \frac{3}{148}\int_{\sqrt{2}}^{2-\sqrt{10}} dx \int_{2}^{3-\frac{x^2}{2}} (x^2 + 2y)\, dy - \frac{3}{148}\int_{2-\sqrt{10}}^{-1} dx \int_{2}^{-2x} (x^2 + 2y)\, dy$$