1. В наборе 4 шара красного цвета, 5 шара синего и 4 шара белого цвета. Из набора случайным образом без возвращения вынимают 5 шаров. Найдите вероятность события

A={белых шаров достали больше, чем красных},
B={белых шаров достали ровно в два раза больше, чем синих}

Решение:

$$P = \frac{m}{n},$$

где n - число всевозможных исходов эксперимента, m – число благоприятных исходов.

$$C_N^M = \frac{N!}{M!\,(N-M)!}$$

Извлекаем 6 шаров из 11, следовательно:

$$n = C_{13}^5 = \frac{13!}{5!\,8!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 1287$$

A={белых шаров достали больше, чем красных},

A – 4бел+1любой или 3бел+2любых или 2бел+2син+1кр или 2бел+3син

или 1бел+4син

$$m = C_4^4 \cdot C_9^1 + C_4^3 \cdot C_9^2 + C_4^2 \cdot C_5^2 \cdot C_4^1 + C_4^2 \cdot C_5^3 + C_4^1 \cdot C_5^4 =$$

$$= 9 + 4 \cdot 36 + 6 \cdot (10 \cdot 4 + 10) + 20 = 473$$

$$P(A) = \frac{473}{1287} = \frac{43}{117} \approx 0.3675$$

B={белых шаров достали ровно в два раза больше, чем синих}
B – 2бел +1син +2кр

$$m = C_4^2 \cdot C_5^1 \cdot C_4^2 = 36 \cdot 5 = 180$$

$$P(B) = \frac{180}{1287} = \frac{20}{143} \approx 0.1399$$

Ответ: $P(A) = \frac{43}{117}$; $P(B) = \frac{20}{143}$.

2. Из колоды в 52 карты наугад (без возвращения) извлекаются четыре. Найти вероятность указанных в варианте событий.

A={хотя бы один красный валет},
событие B={хотя бы один черный валет и дама той же масти}

Решение:

Классическое определение вероятности

$$P = \frac{m}{n},$$

где n - число всевозможных исходов эксперимента, m – число благоприятных исходов.

$$n = C_{52}^{4} \text{ (число способов выбрать 4 карты из 52)}$$

$$C_{52}^{4} = \frac{52!}{4!\,48!} = \frac{52 * 51 * 50 * 49}{2 * 3 * 4} = 270725$$

а) A={хотя бы один красный валет}, $\overline{A}$ – ни одного красного валета. Всего красных валетов 2, а других карт 50.

$$m^{\overline{A}} = C_{50}^{4} = \frac{50!}{4!\,46!} = \frac{50 * 49 * 48 * 47}{2 * 3 * 4} = 230300$$

$$m = n - m^{\overline{A}} = 270725 - 230300 = 40425$$

$$P = \frac{40425}{270725} = \frac{33}{221} \approx 0.1493$$

б) B= {хотя бы один черный валет и дама той же масти}. Это 1в +1д той же масти (их две) + 3 любые карты из оставшихся 50 (в том числе может быть ещё один чёрный валет и дама). Поскольку 2 раза посчитали случай 2чёрных валета и 2 чёрных дамы, надо вычесть 1:

$$m = 2 \cdot C_{1}^{1} \cdot C_{1}^{1} \cdot C_{50}^{2} - 1 = 2 * \frac{50 * 49}{2} - 1 = 2449$$

$$P = \frac{2449}{270725} \approx 0.0091$$

Ответ: $P(A) = \frac{33}{221}$; $P(B) = \frac{2449}{270725}$.

3. Консультация перед экзаменом должна начаться между 11.00 и 12.00. Преподаватель и студенты забыли уточнить время. Если преподаватель приходит первым в указанное время, а студентов еще нет, то преподаватель ждет студентов не

более 20 минут. Если же студенты пришли первыми, то они ждут преподавателя не более 15 минут. Нарисовать указанное в варианте событие и найти его вероятность.

Событие:

Студенты пришли до 11.30 и не дождались преподавателя

Решение:

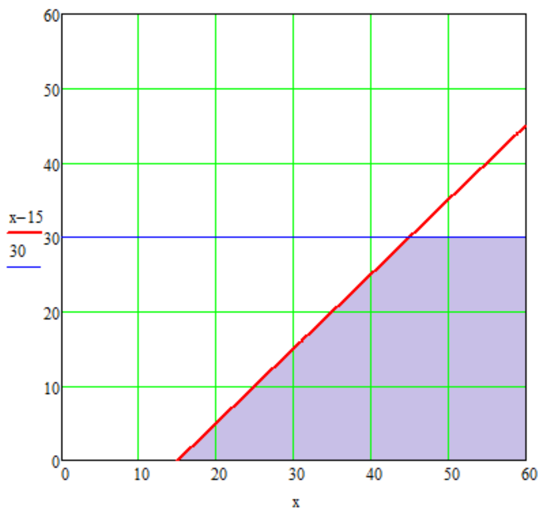
Пусть x - время прихода преподавателя, y – время прихода студентов. Для простоты будем считать время 10.00 нулевой точкой отсчёта времени. Тогда

$$x \in [0, 60], y \in [0, 60] \text{ (минут)}$$

Студенты пришли до 11.30, т.е $y < 30$. Поскольку студенты не дождались, то преподаватель пришёл вторым, значит $x > 15 + y$.

Изобразим область значений (x, y) на плоскости, отметим области, соответствующие условиям:

$$\begin{cases} y < 30 \\ y < x - 15 \end{cases}$$



Используем геометрическое определение вероятности на плоскости:

$$P = \frac{S(A)}{S(\Omega)}$$

Ω - квадрат $[0, 60] \times [0, 60]$, A - заштрихована на рисунке.

$$P = \frac{\frac{15 + 45}{2} \cdot 30}{60^2} = 0.25.$$

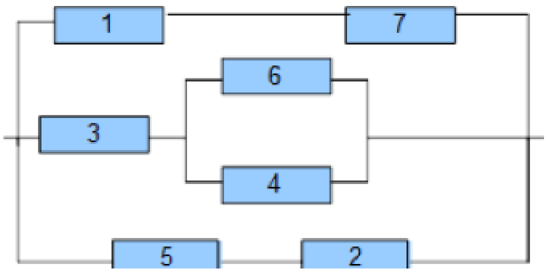
Ответ: 0.25.

4. Система надежности состоит из 7 элементов и имеет схему, изображенную на рисунке. События A_i, $i=\overline{1,7}$,— отказы элементов за заданный промежуток времени.

1) Выразите через события A_i события A и $\overline{A}$, где A—отказ всей системы за заданный промежуток времени.

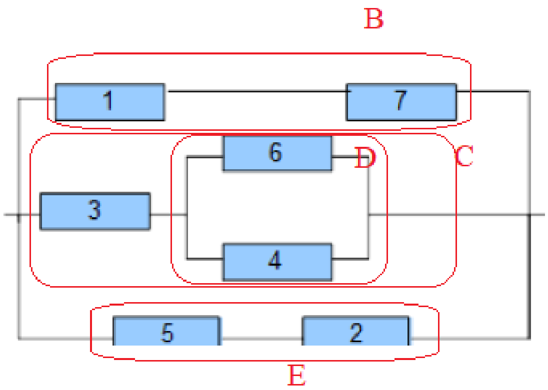
2) Считая, что события A_i независимы в совокупности и имеют вероятности $P(A_i)=p_i$, $i=\overline{1,7}$, вычислите вероятность события A.

$p_1=0,2, p_2=0,1, p_3=0,3, p_4=p_5=0,1,\ p_6=p_7=0,2.$



Решение:

Выделим в системе подсистемы как показано на рисунке:



1) События В, C, D, E – отказ соответствующих подсистем

$$B = A_1 + A_7;\ E = A_2 + A_5$$

$$D = A_4 A_6$$

$$C = A_3 + D = A_3 + A_4 A_6$$

A — отказ всей системы за заданный промежуток времени.

$$A = BCE = (A_1 + A_7)(A_3 + A_4A_6)(A_2 + A_5)$$

Противоположное событие:

$$\overline{A} = \overline{(A_1 + A_7)(A_3 + A_4A_6)(A_2 + A_5)} = \overline{A_1 + A_7} + \overline{A_3 + A_4A_6} + \overline{A_2 + A_5}$$

$$= \overline{A_1} \cdot \overline{A_7} + \overline{A_3} \cdot \overline{A_4A_6} + \overline{A_2} \cdot \overline{A_5} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_7} + \overline{A_3}\left(\overline{A_4} + \overline{A_6}\right) + \overline{A_2} \cdot \overline{A_5}$$

2)

$$P(B) = P(A_1 + A_7) = 1 - \big(1 - P(A_1)\big)\big(1 - P(A_7)\big) = 1 - 0.8 \cdot 0.8 = 0.36.$$

$$P(E) = P(A_2 + A_5) = 1 - \big(1 - P(A_2)\big)\big(1 - P(A_5)\big) = 1 - 0.8 \cdot 0.9 = 0.28.$$

$$P(D) = P(A_4 A_6) = P(A_4)P(A_6) = 0.1 \cdot 0.2 = 0.02$$

$$P(C) = P(A_3 + D) = 1 - \big(1 - P(A_3)\big)\big(1 - P(D)\big) = 1 - 0.7 \cdot 0.98 = 0.314.$$

$$P(A) = P(BCE) = P(B) \cdot P(C) \cdot P(E) = 0.36 \cdot 0.314 \cdot 0.28 = 0.0316512$$

Ответ: $P(A) = 0.0316512.$

5. В первой урне находятся 6 белых и 4 черных шаров, во второй урне — 4 белых и 2 черных шаров. Сначала из первой урны во вторую перекладывается наугад 5 шаров, затем также наугад перекладывается из второй урны в первую 5 шаров.

а) Определите вероятность того, что после вскрытия первой урны в ней будет столько же белых шаров, сколько было до проведения опыта.

б) После вскрытия первой урны оказалось, что в ней столько же белых шаров, сколько было до проведения опыта. Вычислите вероятность того, что при этом условии из первой урны во вторую переложили 3 чёрных шара.

Решение:

Введём следующие гипотезы:

H_i – из первой урны во вторую переложили i чёрных шаров;

$$\text{C}_{10}^5 = \frac{10!}{5!\,5!} = \frac{10 * 9 * 8 * 7 * 6}{2 * 3 * 4 * 5} = 252$$

$$P(H_0) = \frac{\text{C}_6^5}{\text{C}_{10}^5} = \frac{6}{252}; (\text{в } 1 - \text{ой урне } 1\text{б} + 4\text{ч}, \text{во } 2 - \text{ой } 9\text{б} + 2\text{ч})$$

$$P(H_1) = \frac{\text{C}_6^4\text{C}_4^1}{\text{C}_{10}^5} = \frac{60}{252}; (\text{в } 1 - \text{ой урне } 2\text{б} + 3\text{ч}, \text{во } 2 - \text{ой } 8\text{б} + 3\text{ч})$$

$$P(H_2) = \frac{\text{C}_6^3\text{C}_4^2}{\text{C}_{10}^5} = \frac{120}{252}; (\text{в } 1 - \text{ой урне } 3\text{б} + 2\text{ч}, \text{во } 2 - \text{ой } 7\text{б} + 4\text{ч})$$

$$P(H_3)=\frac{C_6^2C_4^3}{C_{10}^5}=\frac{60}{252}(\text{в }1-\text{ой урне }4\text{б}+1\text{ч, во }2-\text{ой }6\text{б}+5\text{ч})$$

$$P(H_4)=\frac{C_6^1}{C_{10}^5}=\frac{6}{252}(\text{в }1-\text{ой урне }5\text{б, во }2-\text{ой }5\text{б}+6\text{ч})$$

Убеждаемся, что гипотезы образуют полную группу несовместных событий

$$\sum_i P(H_i)=1.$$

а) Пусть событие A – после вскрытия первой урны в ней будет столько же белых шаров (6), сколько было до проведения опыта. Тогда при перекладке 5-ти шаров в первую урну во второй урне изначально 11 шаров.

$$C_{11}^5=\frac{11!}{5!\,6!}=462$$

$$P(A|H_0)=\frac{C_9^5}{C_{11}^5}=\frac{126}{462}$$

$$P(A|H_1)=\frac{C_8^4C_3^1}{C_{11}^5}=\frac{210}{462};$$

$$P(A|H_2)=\frac{C_7^3C_4^2}{C_{11}^5}=\frac{210}{462};$$

$$P(A|H_3)=\frac{C_6^2C_5^3}{C_{11}^5}=\frac{150}{462}$$

$$P(A|H_4)=\frac{C_5^1C_6^4}{C_{11}^5}=\frac{75}{462}$$

Воспользуемся формулой полной вероятности:

$$P(A)=\sum_i P(H_i)\cdot P(A|H_i)$$

$$P(A)=\frac{6}{252}\cdot\frac{126}{462}+\frac{60}{252}\cdot\frac{210}{462}+\frac{120}{252}\cdot\frac{210}{462}+\frac{60}{252}\cdot\frac{150}{462}+\frac{6}{252}\cdot\frac{75}{462}=\frac{127}{308}$$

б) Пусть событие A – после вскрытия первой урны в ней будет столько же белых шаров (6), сколько было до проведения опыта. Вероятность того, что при этом условии из первой урны во вторую переложили 3 чёрных шара можно определить по формуле Байеса:

$$P(H_3|A) = \frac{P(H_3) \cdot P(A|H_3)}{P(A)};$$

$$P(H_3|A) = \frac{\frac{60}{252} \cdot \frac{150}{462}}{\frac{127}{308}} = \frac{500}{2667}.$$

Ответ: а) $\frac{127}{308}$; б) $\frac{500}{2667}$.

6. Вероятность попадания в цель при любом из 8 выстрелов равна 0,85. Найдите вероятность того, что произойдет:

а) Ровно 2 попадания

б) Не более 2 попаданий.

в) Не менее 2 попаданий.

г) От 3 до 9 попаданий.

Решение: по формуле Бернулли вероятность m успехов в серии из n испытаний определяется по формуле:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

а) ровно 2 попадания;

$$P_8(2) = C_8^2 0.85^2 \cdot 0.15^6 = \frac{8!}{2!\,6!} 0.85^2 \cdot 0.15^6 = 28 \cdot 0.85^2 \cdot 0.15^6 \approx 0.000230$$

б) Пусть событие А - не более 2 попаданий, тогда

$$P(A) = P_8(0) + P_8(1) + P_8(2)$$

$$P_8(0) = 0.15^8;\ P_8(1) = C_8^1 0.85 \cdot 0.15^7$$

$$P(A) = 0.15^8 + 8 \cdot 0.85 \cdot 0.15^7 + 0.00023 \approx 0.000242$$

в) Не менее 2 попаданий.

Пусть событие В - не менее 2 попаданий, тогда $\overline{B} -$ менее 2 попаданий

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P_8(0) - P_8(1)$$

$$P(B) = 1 - 0.15^8 - 8 \cdot 0.85 \cdot 0.15^7 \approx 0.999988$$

г) Пусть событие В - от 3 до 9 попаданий включительно, тогда

$$P(B) = 1 - P_8(0) - P_8(1) - P_8(2) = 1 - P(A) = 1 - 0.000242 \approx 0.999758$$

Ответ: а)0.000230; б)0.000242; в)0.999988; г) 0.999758.

7. Определите вероятность того, что среди 800 изготовленных изделий бракованными окажутся:

а) ровно 5 изделий.

б) не более 3 изделий

если вероятность брака равна 0,005 и определите вероятность того, что среди 1000 изготовленных изделий бракованными окажутся

в) ровно 70 изделий.

г) от 65 до 95 изделий

если вероятность брака равна 0,085

Решение:

а) Поскольку вероятность «успеха» - брака изделия $p = 0.035$ достаточно мала, а число испытаний велико, то будем использовать формулу Пуассона:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!},$$

$$\lambda = np.$$

Итак, $n = 800, p = 0.005$, следовательно, $\lambda = 4$.

Ровно 5 изделий окажутся бракованными:

$$P_{800}(5) = \frac{4^5 e^{-4}}{5!} \approx 0.1563$$

б) А – бракованными окажутся не более 3 изделий

$$P(A) = P_{100}(0) + P_{100}(1) + P_{100}(2) + P_{100}(3) =$$

$$= e^{-4}\left(1 + 4 + \frac{4^2}{2} + \frac{4^3}{3!}\right) = \frac{71}{3e^4} \approx 0.4335$$

в) Итак, $n = 1000, p = 0.085, np = 85, npq = 77.775$

По формуле Муавра-Лапласа вероятность m успехов в серии из n испытаний определяется по формуле:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi\left(\frac{m - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

где $\varphi(x)$ – интегральная функция Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$. При этом считаем, что $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Значения функции находим из таблиц.

$$P_{1000}(70) \approx \frac{1}{\sqrt{77.775}}\varphi\left(\frac{70-85}{\sqrt{77.775}}\right) = \frac{1}{\sqrt{77.775}}\varphi(-1.70) \approx 0.0106$$

г) Воспользуемся интегральной теоремой Муавра-Лапласа (m – число успехов в серии из n испытаний):

$$P(a < m < b) = \Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}}\right),$$

где $\Phi_0(x)$ – интегральная функция Лапласа $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-x^2/2}\,dx$. При этом считаем, что $\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$, При $x > 5$ принимаем $\Phi_0(x) \approx 0.5$. Значения функции находим из таблиц.

$$P(65 < m < 95) = \Phi_0\left(\frac{95-85}{\sqrt{77.775}}\right) - \Phi_0\left(\frac{65-85}{\sqrt{77.775}}\right) \approx \Phi_0(1.13) - \Phi_0(-2.27) =$$

$$= \Phi_0(1.13) + \Phi_0(2.27) \approx 0.3708 + 0.4884 = 0.8592$$

Ответ: а)0.1563; б)0.4335; в)0.0106; г)0.8592.

8. В наборе 6 шаров белого цвета, 4 шаров синего и 5 шаров красного цвета. Из набора случайным образом без возвращения вынимают 6 шаров. Случайная величина ξ – число вынутых синих шаров. Найдите:

а) Ряд распределения случайной величины ξ.

б) Вероятность попадания случайной величины ξ в интервалы

(2; 5), [2; 5); (2; 5], [2; 5].

в) Найдите ряд распределения случайных величин $\eta = (3-\xi)^3 - 3, \mu = 2(4-2\xi)^2 - 2$.

Решение:

ξ может принимать значение от 0 до 4,

$$P(\xi = k) = \frac{C_4^k C_{11}^{6-k}}{C_{15}^6}$$

$$C_{15}^6 = \frac{15!}{6!\,9!} = 5005$$

Число способов $C_4^k C_{11}^{6-k}$:

k	0	1	2	3	4
$C_4^k C_{11}^{6-k}$	462	1848	1980	660	55

а) Ряд распределения случайной величины ξ.

ξ	0	1	2	3	4
p	6/65	24/65	36/91	12/91	1/91

б) Вероятность попадания случайной величины ξ в интервалы

$$P(\xi \in (2;\ 5)) = P(\xi = 3) + P(\xi = 4) = \frac{1}{7}$$

$$P(\xi \in [2;\ 5)) = P(\xi = 2) + P(\xi = 3) + P(\xi = 4) = \frac{7}{13}$$

$$P(\xi \in\ (2; 5]) = P(\xi \in (2;\ 5)) = \frac{1}{7}$$

$$P(\xi \in [2;\ 5]) = P(\xi \in [2;\ 5)) = \frac{7}{13}$$

в) Ряд распределения случайных величин $\eta = (3 - \xi)^3 - 3, \mu = 2(4 - 2\xi)^2 - 2$

Вычислим значения случайных величин η и μ:

ξ	0	1	2	3	4
η	6	1	-2	-3	-2
μ	24	5	-2	-3	-4
p	30	6	-2	6	30

Составим ряд распределения η и μ, упорядочив значения случайных величин по возрастанию и, если надо, складывая вероятности при одинаковых значениях:

η	-4	-3	-2	5	24
p	1/91	12/91	36/91	24/65	6/65

μ	-2	6	30
p	36/91	228/455	47/455

9. Непрерывная случайная величина ξ имеет плотность распределения $p(x)$.

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} A(1-2x)^2, -2 \le x \le 2 \\ 0, \qquad x < -2, x > 2 \end{cases}.$$

Найдите:

а) Константу A

По условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$$

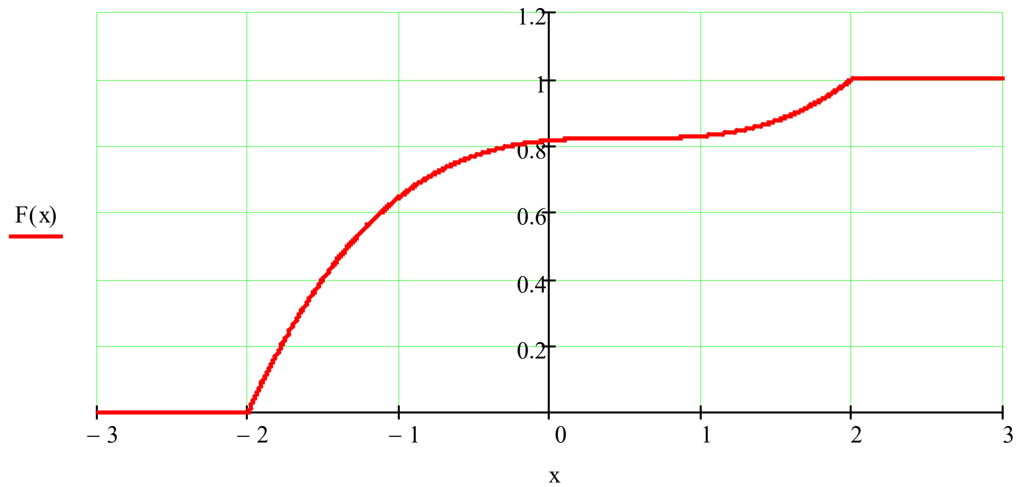
$$A\int_{-2}^{2}(1-2x)^2dx = A\left(\frac{(1-2x)^3}{-6}\right)\Bigg|_{-2}^{2} = \frac{76A}{3} \Longrightarrow A = \frac{3}{76}$$

б) Функцию распределения случайной величины ξ и постройте ее график.

Найдём функцию распределения:

$$F_{\xi}(x) = \frac{3}{76}\int_{-2}^{x}(1-2x)^2dx = \frac{3}{76}\left(\frac{(1-2x)^3}{-6}\right)\Bigg|_{-2}^{x} = \frac{1}{152}(125-(1-2x)^3)$$

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, x \le -2 \\ \dfrac{125-(1-2x)^3}{152}, x \in (-2,2) \\ 1, \qquad x > 2 \end{cases}$$



в) Вычислите функцию распределения и плотность распределения случайной величины $\eta = 2(\xi+1)^3 + 3$.

$$F_\eta(y) = P(\eta < y) = P(2(\xi+1)^3 + 3 < y) = P\left((\xi+1)^3 < \frac{y-3}{2}\right) =$$

$$= P\left(\xi < \sqrt[3]{\frac{y-3}{2}} - 1\right) = F_\xi\left(\sqrt[3]{\frac{y-3}{2}} - 1\right) = \frac{125 - \left(3 - 2\sqrt[3]{\frac{y-3}{2}}\right)^3}{152}$$

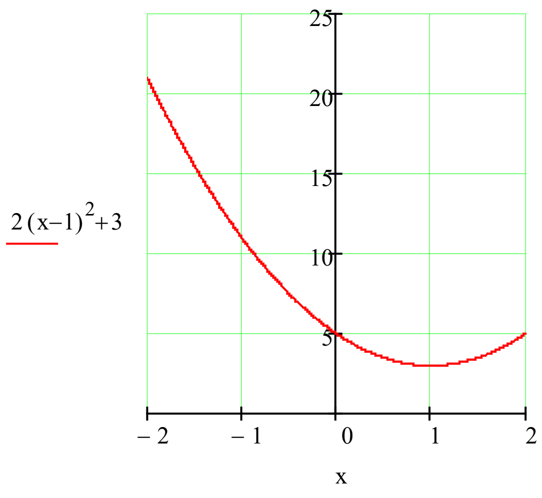
$$F_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \le 1 \\ \dfrac{125 - \left(3 - 2\sqrt[3]{\frac{y-3}{2}}\right)^3}{152}, & y \in (1{,}57) \\ 1, & y > 57 \end{cases}$$

$$p_\eta(y) = F'_\eta(y)$$

$$p_\eta(y) = \frac{\left(2\sqrt[3]{\frac{y-3}{2}} - 3\right)^2 \sqrt[3]{\frac{y-3}{2}}}{76(y-3)}$$

$$p_\eta(y) = \begin{cases} 0, y \le 1 \\ \dfrac{\left(2\sqrt[3]{\frac{y-3}{2}} - 3\right)^2 \sqrt[3]{\frac{y-3}{2}}}{76(y-3)}, y \in (1, 57) \\ 0, \quad y > 57 \end{cases}$$

г) Вычислите функцию распределения и плотность распределения случайной величины $\eta = 2(\xi - 1)^2 + 3$



$$p_\eta(y) = p_\xi(g(y))|g'(y)|$$

$$g(y) = 1 - \frac{\sqrt{y-3}}{\sqrt{2}} \text{ при } x < 1$$

$$g(y) = 1 + \frac{\sqrt{y-3}}{\sqrt{2}} \text{ при } x > 1$$

$$|g'(y)| = \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{y-3}}$$

$$x = -2 \Rightarrow y = 21, x = 0 \Rightarrow y = 5, x = 1 \Rightarrow y = 3, \qquad x = 2 \Rightarrow y = 5$$

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \frac{3}{76}(1-2x)^2, -2 \le x \le 2 \\ 0, \qquad x < -2, x > 2 \end{cases}.$$

$$p_\eta(y) = \frac{3}{76}\left(1 - 2\left(1 - \frac{\sqrt{y-3}}{\sqrt{2}}\right)\right)^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{y-3}}, \qquad y \in (5, 21)$$

$$p_\eta(y) = \frac{3\left(\sqrt{2}\sqrt{y-3} - 1\right)^2}{152\sqrt{2}\sqrt{y-3}}, \qquad y \in (5, 21)$$

$$p_\eta(y) = \frac{3}{76}\left(\left(1 - 2\left(1 - \frac{\sqrt{y-3}}{\sqrt{2}}\right)\right)^2 + \left(1 - 2\left(1 + \frac{\sqrt{y-3}}{\sqrt{2}}\right)\right)^2\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{y-3}} =$$

$$= \frac{3\sqrt{2}(2y-5)}{152\sqrt{y-3}}, y \in (3, 5)$$

$$p_\eta(y) = \begin{cases} 0, \qquad y \notin (3, 21) \\ \frac{3\sqrt{2}(2y-5)}{152\sqrt{y-3}}, \qquad y \in (3, 5) \\ \frac{3\left(\sqrt{2}\sqrt{y-3} - 1\right)^2}{152\sqrt{2}\sqrt{y-3}}, \qquad y \in (5, 21) \end{cases}$$

$$F_\eta(y) = \int_3^y \frac{3\sqrt{2}(2y-5)}{152\sqrt{y-3}}dy = \frac{\sqrt{2}\sqrt{y-3}(2y-3)}{76}, y \in (3,5);\ F_\eta(5) = \frac{7}{38}$$

$$F_\eta(y) = \frac{7}{38} + \int_5^y \frac{3\left(\sqrt{2}\sqrt{y-3} - 1\right)^2}{152\sqrt{2}\sqrt{y-3}}dy = \frac{7}{38} + \frac{3}{152\sqrt{2}}\int_5^y \frac{2(y-3) - 2\sqrt{2}\sqrt{y-3} + 1}{\sqrt{y-3}}dy =$$

$$= \frac{11}{38} - \frac{3y}{76} + \frac{3\sqrt{2}}{152}\sqrt{y-3} + \frac{\sqrt{2}}{76}\,(y-3)^{\frac{3}{2}}, \quad y \in (5{,}21)$$

$$F_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \le 3 \\ \dfrac{\sqrt{2}\sqrt{y-3}(2y-3)}{76}, & y \in (3,5] \\ \dfrac{11}{38} - \dfrac{3y}{76} + \dfrac{3\sqrt{2}}{152}\sqrt{y-3} + \dfrac{\sqrt{2}}{76}\,(y-3)^{\frac{3}{2}}, & y \in (5,21] \\ 1, & y > 21 \end{cases}$$

10. В условиях задачи 8 выбирают $m = 6$ шаров. (В наборе 6 шаров белого цвета, 4 шаров синего и 5 шаров красного цвета). Пусть ξ число вынутых белых шаров, а через η – красных.

Найдите: а) Совместное распределение случайных величин ξ и η (ряд распределения).

ξ может принимать значение от 0 до 6, η может принимать значение от 0 до 5. Всего 15 шаров, извлекаем 5.

$$P(\xi = k, \eta = m) = \frac{C_6^k C_5^m C_4^{6-k-m}}{C_{15}^6}; \; C_{15}^6 = \frac{15!}{6!\,9!} = 5005$$

Число способов $C_6^k C_5^m C_4^{6-k-m}$:

$k \setminus m$	0	1	2	3	4	5
0			10	40	30	4
1		30	240	360	120	6
2	15	300	900	600	75	
3	80	600	800	200		
4	90	300	150			
5	24	30				
6	1					

Совместное распределение случайных величин ξ и η

$\xi \setminus \eta$	0	1	2	3	4	5	Сумма
0			0,001998	0,007992	0,005994	0,000799	0,016783
1		0,005994	0,047952	0,071928	0,023976	0,001199	0,151049
2	0,002997	0,059940	0,179820	0,119880	0,014985		0,377622
3	0,015984	0,119880	0,159840	0,039960			0,335664
4	0,017982	0,059940	0,029970				0,107892
5	0,004795	0,005994					0,010789
6	0,000200						0,000200
Сумма	0,041958	0,251748	0,419580	0,239760	0,044955	0,001998	1

б) Ряды распределения случайных величин ξ и η.

ξ	0	1	2	3	4	5	6
$P(\xi)$	0,016783	0,151049	0,377622	0,335664	0,107892	0,010789	0,000200

η	0	1	2	3	4	5
$P(\eta)$	0,041958	0,251748	0,419580	0,239760	0,044955	0,001998

в) Условные распределения случайной величины ξ при условии η, случайной величины η при условии ξ, проверить случайные величины на независимость

Условные распределения:

$$P(\xi = k|\eta = m) = \frac{P(\xi = k, \eta = m)}{P(\eta = m)}$$

Условный закон распределения $P(\xi = k|\eta = 0)$:

ξ	P
2	0,071429
3	0,380952
4	0,428571
5	0,114286
6	0,004762
Сумма	1

Условный закон распределения $P(\xi = k|\eta = 1)$:

ξ	P
1	0,023810
2	0,238095
3	0,476190
4	0,238095
5	0,023810
Сумма	1

Условный закон распределения $P(\xi = k|\eta = 2)$:

ξ	P
0	0,004762
1	0,114286
2	0,428571
3	0,380952
4	0,071429
Сумма	1

Условный закон распределения $P(\xi = k|\eta = 3)$:

ξ	P
0	0,033333
1	0,3

2	0,5
3	0,166667
Сумма	1

Условный закон распределения $P(\xi = k|\eta = 4)$:

ξ	P
0	0,133333
1	0,533333
2	0,333333
Сумма	1

Условный закон распределения $P(\xi = k|\eta = 5)$:

ξ	P
0	0,4
1	0,6
Сумма	1

$$P(\eta = m|\xi = k) = \frac{P(\xi = k, \eta = m)}{P(\xi = k)}$$

Условный закон распределения $P(\eta = m|\xi = 0)$:

η	2	3	4	5	Сумма
P	0,119048	0,476190	0,357143	0,047619	1

Условный закон распределения $P(\eta = m|\xi = 1)$:

η	1	2	3	4	5	Сумма
P	0,039683	0,317460	0,476190	0,158730	0,007937	1

Условный закон распределения $P(\eta = m|\xi = 2)$:

η	0	1	2	3	4	Сумма
P	0,007937	0,158730	0,476190	0,317460	0,039683	1

Условный закон распределения $P(\eta = m|\xi = 3)$:

η	0	1	2	3	Сумма
P	0,047619	0,357143	0,476190	0,119048	1

Условный закон распределения $P(\eta = m|\xi = 4)$:

η	0	1	2	Сумма
P	0,166667	0,555556	0,277778	1

Условный закон распределения $P(\eta = m|\xi = 5)$:

η	0	1	Сумма
P	0,444444	0,555556	1

$$P(\eta = 0|\xi = 6) = 1$$

Для независимых случайных величин

$$P(\xi < x, \eta < y) = P(\xi < x)P(\eta < y)$$

Например

$$P(\xi < 1, \eta < 1) = 0$$

$$P(\xi < 1)P(\eta < 1) = 0.016783 \cdot 0.041958 \neq 0$$

Равенство

$$P(\xi < 1, \eta < 1) = P(\xi < 1)P(\eta < 1) - \text{неверно}$$

Следовательно, ξ и η зависимы.

г) Значения двумерной функции распределения $F_{\xi\eta}(x, y)$в заданных точках $(x, y) = (7; 2), (4; 3), (2; 6)$,

$$F_{\xi\eta}(7, 2) = P(\xi < 7, \eta < 2) = P(\eta < 2) = P(\eta = 0) + P(\eta = 1) =$$

$$= 0.293706$$

$$F_{\xi\eta}(4, 3) = P(\xi < 4, \eta < 3) = 0{,}001998 + 0{,}005994 + \cdots + 0{,}159840 = 0.594406$$

$$F_{\xi\eta}(2, 6) = P(\xi < 2, \eta < 6) = P(\xi < 2) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) = 0.167832$$

д) Ряд распределения новой случайной величины $\mu = |\xi - \eta^2|$

Составим таблицу значений случайной величины μ:

$\xi \setminus \eta$	0	1	2	3	4	5
0			4	9	16	25
1		0	3	8	15	24
2	2	1	2	7	14	
3	3	2	1	6		
4	4	3	0			
5	5	4				
6	6					

Далее определяем соответствующие вероятности, складывая вероятности при одинаковых значениях μ:

μ	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(\mu)$	0,035964	0,219780	0,302697	0,123876	0,025974	0,004795	0,040160	0,119880
μ	8	9	14	15	16	24	25	
$P(\mu)$	0,071928	0,007992	0,014985	0,023976	0,005994	0,001199	0,000799	

е) Ряд распределения новой двумерной дискретной случайной величины (μ_1; μ_2)

$$\mu_1 = 2\big(\xi - (1-\eta)\big), \mu_2 = 2\eta - \xi + 1$$

Составим таблицу значений случайной величины μ_1:

$\xi \setminus \eta$	0	1	2	3	4	5
0			2	4	6	8
1		2	4	6	8	10
2	2	4	6	8	10	
3	4	6	8	10		
4	6	8	10			
5	8	10				
6	10					

Далее определяем соответствующие вероятности, складывая вероятности при одинаковых значениях μ:

μ_1	2	4	6	8	10
$P(\mu)$	0,010989	0,131868	0,395604	0,369231	0,092308

Составим таблицу значений случайной величины μ_2:

$\xi \setminus \eta$	0	1	2	3	4	5
0			5	7	9	11
1		2	4	6	8	10
2	-1	1	3	5	7	
3	-2	0	2	4		
4	-3	-1	1			
5	-4	-2				
6	-5					

Далее определяем соответствующие вероятности, складывая вероятности при одинаковых значениях μ:

μ_2	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$P(\mu)$	0,000200	0,004795	0,017982	0,021978	0,062937	0,119880	0,089910	0,165834	0,179820
μ_2	4	5	6	7	8	9	10	11	
$P(\mu)$	0,087912	0,121878	0,071928	0,022977	0,023976	0,005994	0,001199	0,000799	

Совместное распределение случайных величин μ_1 и μ_2

$\mu_1 \backslash \mu_2$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
2					0,00300			0,00599	
4				0,01598			0,05994		
6			0,01798			0,11988			0,17982
8		0,00480			0,05994			0,15984	
10	0,00020			0,00599			0,02997		

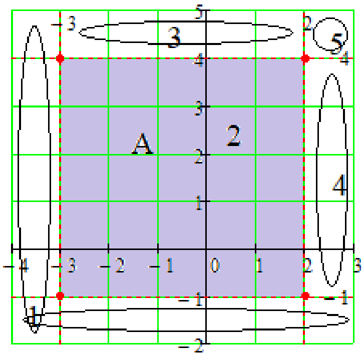
Продолжение таблицы справа:

$\mu_1 \backslash \mu_2$	4	5	6	7	8	9	10	11
2		0,00200						
4	0,04795			0,00799				
6			0,07193			0,005994		
8		0,11988			0,02398			0,000799
10	0,03996			0,01499			0,001199	

11. В четырехугольник с вершинами в точках $(-3;-1),(-3;4),(2;4),(2;-1)$ в соответствии с принципом геометрической вероятности падает частица. Пусть ξ и η - координаты по оси X и У точки падения частицы.

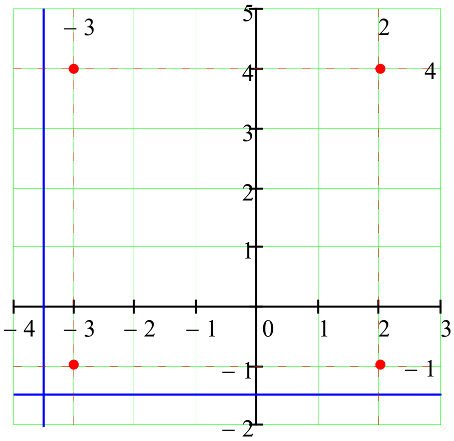
Найдите:

а) Совместную функцию распределения $F_{\xi\eta}(x,y)$ случайной величины (ξ,η) и совместную плотность распределения случайной величины (ξ,η).



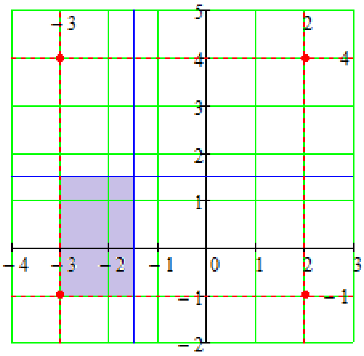
Всего имеем 5 различных областей.

Область 1: $(x<-3)$или $(y<-1)$:



Пересечения с четырёхугольником нет, $F_{\xi\eta}(x,y) = 0$.

Область 2: $(x,y) \in D$:

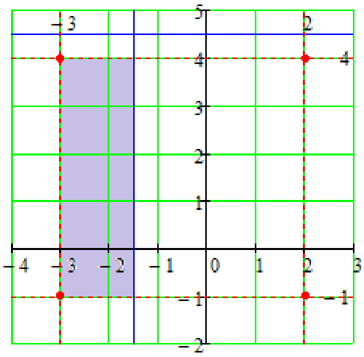


$$F_{\xi\eta}(x,y) = \frac{1}{S_D} \int_{-3}^{x} \int_{-1}^{y} dxdy$$

$$S_D = 25 - \text{площадь области.}$$

$$F_{\xi\eta}(x,y) = \frac{1}{25} \int_{-3}^{x} dx \int_{-1}^{y} dy = \frac{(x+3)(y+1)}{25}.$$

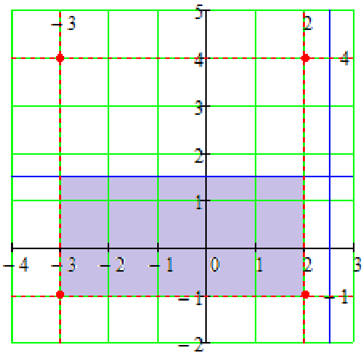
Область 3: $(-3 < x \leq 2)$и$(y > 4)$:



$$F_{\xi\eta}(x,y) = \frac{1}{S_D} \int_{-3}^{x} \int_{-1}^{4} dxdy$$

$$F_{\xi\eta}(x,y) = \frac{1}{25} \int_{-3}^{x} dx \int_{-1}^{4} dy = \frac{x+3}{5}.$$

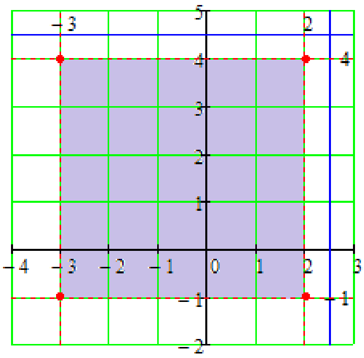
Область 4: $(x > 2)$и$(-1 < y \le 4)$:



$$F_{\xi\eta}(x,y) = \frac{1}{S_D} \int_{-3}^{2} \int_{-1}^{y} dxdy$$

$$F_{\xi\eta}(x,y) = \frac{1}{25} \int_{-3}^{2} dx \int_{-1}^{y} dy = \frac{y+1}{5}.$$

Область 5: $(x > 2)$и$(y > 4)$:



$$F_{\xi\eta}(x,y) = \frac{1}{S_D}\int_{-3}^{2}\int_{-1}^{4} dxdy = \frac{1}{25}\int_{-3}^{2}\int_{-1}^{4} dxdy = 1.$$

$$F_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} 0, & (x < -3) \text{ или } (y < -1) \\ \dfrac{(x+3)(y+1)}{25}, & (x,y) \in D \\ \dfrac{x+3}{5}, & (-3 < x \le 2) \text{и} (y > 4) \\ \dfrac{y+1}{5}, & (x > 2) \text{и} (-1 < y \le 4) \\ 1, & (x > 2) \text{и} (y > 4) \end{cases}$$

Поскольку площадь четырёхугольника D равна 25, и точки распределены в соответствии с принципом геометрической вероятности то совместная плотность распределения имеет равномерное распределение внутри D:

$$p_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{25}, (x,y) \in D \\ 0, (x,y) \notin D \end{cases}.$$

б) Одномерные плотности и функции распределения случайных величин ξ и η.

$$p_{\xi}(x) = \int_{-1}^{4} p_{\xi\eta}(x,y)\, dy = \frac{1}{25}\int_{-1}^{4} 1\, dy = \frac{1}{5}$$

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{5}, x \in [-3;2] \\ 0, x \notin [-3;2] \end{cases}.$$

$$F_{\xi}(x) = \int_{-3}^{x} p_{\xi}(x)\, dx = \frac{x+3}{5}, \qquad -3 < x \le 2$$

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \le -3 \\ \dfrac{x+3}{5}, & -3 < x \le 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

$$p_{\eta}(y) = \int_{-3}^{2} p_{\xi\eta}(x,y)\, dx = \frac{1}{25}\int_{-3}^{2} 1\, dy = \frac{1}{5}$$

$$p_\eta(y)=\begin{cases}\frac{1}{5}, & y\in[-1;4]\\ 0, & y\notin[-1;4]\end{cases}.$$

$$F_\eta(y)=\int\limits_{-1}^{y}p_\eta(y)\,dy=\frac{y+1}{5},\qquad -1<y\le 4$$

$$F_\eta(y)=\begin{cases}0, & y\le -1\\ \frac{y+1}{5}, & -1<y\le 4\\ 1, & y>4\end{cases}$$

в) Условные функции распределения и условные плотности распределения случайной величины ξ при условии η, и случайной величины η при условии ξ. Проверьте, будут ли эти случайные величины независимыми

Условная плотность распределения

$$p_\xi(x|y)=\frac{p_{\xi\eta}(x,y)}{p_\eta(y)}=\frac{1}{5}\ \text{при}\ (x,y)\in D$$

Условная плотность распределения

$$p_\eta(y|x)=\frac{p_{\xi\eta}(x,y)}{p_\xi(x)}=\frac{1}{5}\ \text{при}\ (x,y)\in D$$

Для независимых случайных величин должно выполняться равенство:

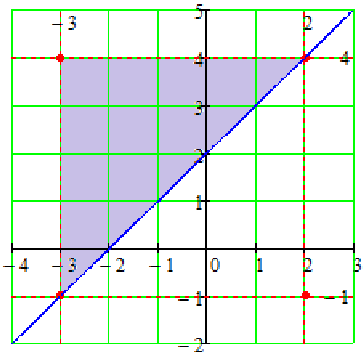
$$p_\xi(x|y)=p_\xi(x)-\text{верно}$$

Следовательно, случайные величины независимы. Условные функции распределения совпадают с одномерными:

$$F_\xi(x|y)=\begin{cases}0, & x\le -3\\ \frac{x+3}{5}, & -3<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases};$$

$$F_\eta(y|x)=\begin{cases}0, & y\le -1\\ \frac{y+1}{5}, & -1<y\le 4\\ 1, & y>4\end{cases}$$

г) Значение функции распределения случайной величины $\mu=\xi-\eta$ в точке $z=-2$.



$$F_\mu(-2) = P(\xi - \eta < -2) = P(\eta > \xi + 2) = \frac{S_D}{S} = \frac{\frac{5^2}{2}}{25} = \frac{1}{2}$$

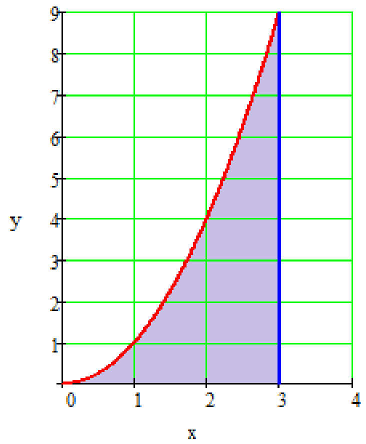
12. Совместная плотность распределения случайных величин ξ и η задана формулой

$$p_{\xi\eta}(x,y) = C(2x + 3y^2), (x,y) \in D,$$

где область D задана в варианте. Найдите:

$$D = \{(x;y): x = 3, y = 0, y = x^2\}$$

а) Постоянную C.



По закону нормировки

$$\iint_D p_{\xi\eta}(x,y)dxdy = 1,$$

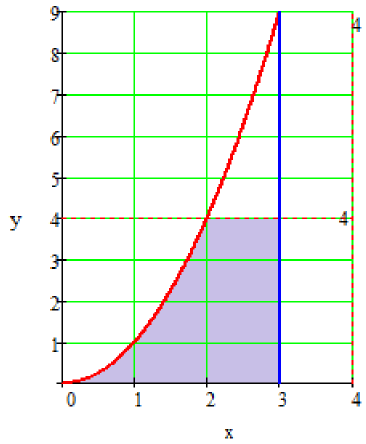
$$D: \begin{cases} 0 \le x \le 3 \\ 0 \le y \le x^2 \end{cases}$$

$$\int_0^3 dx \int_0^{x^2} C(2x + 3y^2)\, dy = C\int_0^3 (2xy + y^3)|_0^{x^2} dx =$$

$$= C\int_0^3 (2x^3 + x^6)dx = C\left(\frac{x^4}{2} + \frac{x^7}{7}\right)\Bigg|_0^3 = \frac{4941}{14}C$$

$$C = \frac{14}{4941}$$

б) Значения двумерной функции распределения $F_{\xi\eta}(x,y)$ в заданных точках $(x,y) = (4;4)$



$$F_{\xi\eta}(4,4) = P(\xi < 4, \eta < 4) = P(\eta < 4) = \frac{14}{4941}\int_0^4 dy \int_{\sqrt{y}}^3 (2x + 3y^2)\,dx$$

$$= \frac{14}{4941}\int_0^4 (x^2 + 3y^2x)|_{\sqrt{y}}^3 dy = \frac{14}{4941}\int_0^4 \left(9y^2 - y - 3y^{\frac{5}{2}} + 9\right)dy =$$

$$= \frac{14}{4941}\left(3y^3 - \frac{y^2}{2} - \frac{6}{7}y^{\frac{7}{2}} + 9y\right)\Big|_0^4 = \frac{14}{4941}\cdot\frac{772}{7} = \frac{1544}{4941}$$

в) Одномерные плотности и функции распределения случайных величин ξ и η.

$$p_\xi(x) = \int\limits_0^{x^2} p_{\xi\eta}(x,y)\,dy = \frac{14}{4941}\int\limits_0^{x^2} (2x + 3y^2)\,dy = \frac{14}{4941}(2xy + y^3)|_0^{x^2} =$$

$$= \frac{14(2x^3 + x^6)}{4941}$$

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{14(2x^3 + x^6)}{4941}, & x \in [0;3] \\ 0, & x \notin [0;3] \end{cases}.$$

$$F_\xi(x) = \frac{14}{4941}\int\limits_0^x (2x^3 + x^6)\,dx = \frac{14}{4941}\left(\frac{x^4}{2} + \frac{x^7}{7}\right)\Big|_0^x = \frac{7x^4 + 2x^7}{4941}$$

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \dfrac{7x^4 + 2x^7}{4941}, & 0 < x \le 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

$$y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$$

$$p_\eta(y) = \int_{\sqrt{y}}^{3} p_{\xi\eta}(x,y)\,dx = \frac{14}{4941}\int_{\sqrt{y}}^{3}(2x+3y^2)\,dx = \frac{14}{4941}(x^2+3y^2x)\Big|_{\sqrt{y}}^{3} =$$

$$= \frac{14(9y^2 - y - 3y^{\frac{5}{2}} + 9)}{4941}$$

$$p_\eta(y) = \begin{cases} \dfrac{14(9y^2 - y - 3y^{\frac{5}{2}} + 9)}{4941}, y \in [0;9]. \\ 0, y \notin [0;9] \end{cases}$$

$$F_\eta(y) = \int_0^y p_\eta(y)\,dy = \int_0^y \frac{14(9y^2 - y - 3y^{\frac{5}{2}} + 9)}{4941}dy =$$

$$= \frac{14}{4941}\left(3y^3 - \frac{y^2}{2} - \frac{6}{7}y^{\frac{7}{2}} + 9y\right)\Bigg|_0^y = \frac{14}{4941}\left(3y^3 - \frac{y^2}{2} - \frac{6}{7}y^{\frac{7}{2}} + 9y\right)$$

$$F_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ \dfrac{14}{4941}\left(3y^3 - \dfrac{y^2}{2} - \dfrac{6}{7}y^{\frac{7}{2}} + 9y\right), & 0 < y \le 9 \\ 1, & y > 9 \end{cases}$$

г) Условные функции распределения и условные плотности распределения случайной величины ξ при условии η, и случайной величины η при условии ξ. Проверьте, будут ли эти случайные величины независимыми

Условная плотность распределения

$$p_\xi(x|y) = \frac{p_{\xi\eta}(x,y)}{p_\eta(y)}$$

$$p_\xi(x|y) = \frac{\frac{14}{4941}(2x+3y^2)}{\frac{14(9y^2 - y - 3y^{\frac{5}{2}} + 9)}{4941}} = \frac{2x+3y^2}{9y^2 - y - 3y^{\frac{5}{2}} + 9} \text{ при } (x,y) \in D$$

Условная плотность распределения

$$p_\eta(y|x) = \frac{p_{\xi\eta}(x,y)}{p_\xi(x)}$$

$$p_\eta(y|x) = \frac{\frac{14}{4941}(2x+3y^2)}{\frac{14(2x^3+x^6)}{4941}} = \frac{2x+3y^2}{2x^3+x^6} \text{ при } (x,y) \in D$$

Для независимых случайных величин должно выполняться равенство:

$$p_\xi(x|y) = p_\xi(x) - \text{неверно}$$

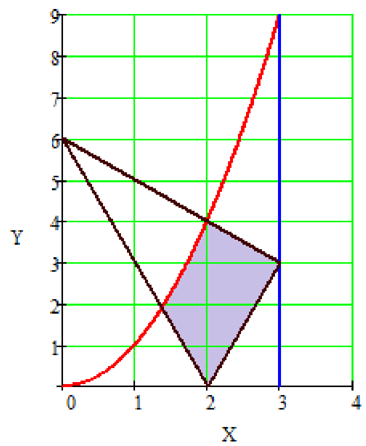
Следовательно, случайные величины зависимы.

$$F_\xi(x|y) = \frac{1}{9y^2 - y - 3y^{\frac{5}{2}} + 9} \int\limits_0^x \left(2x + 3y^2\right) dx = \frac{\left(x^2 + 3y^2 x\right)\Big|_0^x}{9y^2 - y - 3y^{\frac{5}{2}} + 9} =$$

$$= \frac{x^2 + 3y^2 x}{9y^2 - y - 3y^{\frac{5}{2}} + 9} \text{ при } (x, y) \in D$$

$$F_\eta(y|x) = \int\limits_0^y \frac{2x + 3y^2}{2x^3 + x^6} dy = \frac{\left(2xy + y^3\right)\Big|_0^y}{2x^3 + x^6} = \frac{2xy + y^3}{2x^3 + x^6} \text{ при } (x, y) \in D$$

д) Вычислите вероятность попадания вектора (ξ, η) в треугольник с вершинами в точках $(2; 0), (3; 3), (0; 6)$. (Записать интеграл, расставить пределы интегрирования, считать интеграл - не надо)



Стороны треугольника:

$$(0; 6), (3; 3): y = 6 - x$$

$$y = 6 - x = x^2 \Longrightarrow x = 2$$

$$(0; 6), (2; 0): y = 6 - 3x$$

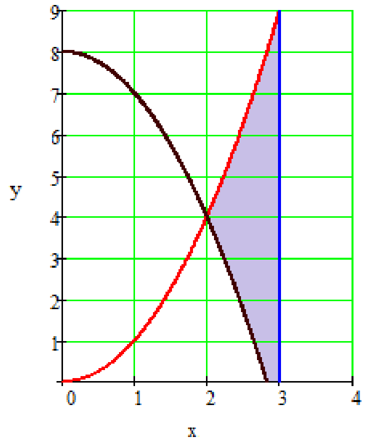
$$y = 6 - 3x = x^2 \Longrightarrow x = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2}$$

$$(2; 0), (3; 3): y = 3x - 6$$

$$P = \frac{14}{4941} \int_{\frac{-3+\sqrt{33}}{2}}^{2} dx \int_{6-3x}^{x^2} (2x + 3y^2)\, dy + \frac{14}{4941} \int_2^3 dx \int_{3x-6}^{6-x} (2x + 3y^2)\, dy$$

e) Значение функции распределения $F_{\mu}(z)$ новой случайной величины $\mu = 4 - \xi^2 - \eta$ в точке $z = -4$. (Записать интеграл, расставить пределы интегрирования, считать интеграл - не надо)

$$F_{\mu}(-4) = P(4 - \xi^2 - \eta \ < -4) = P(\eta > 8 - \xi^2)$$



$$y = 8 - x^2 = 0 \Longrightarrow x = 2\sqrt{2}$$

$$F_{\mu}(8) = \frac{14}{4941}\int_{2}^{2\sqrt{2}} dx \int_{8-x^2}^{x^2} (2x + 3y^2)\, dy + \frac{14}{4941}\int_{2\sqrt{2}}^{3} dx \int_{0}^{x^2} (2x + 3y^2)\, dy$$