Исследовать на локальный экстремум функцию

$$z = x^3 - 3x - (x + 1 + \operatorname{arctg} y)^2 .$$

Решение. Найдем стационарные точки, решив систему уравнений

$$\begin{cases} z'_x = 3x^2 - 3 - 2(x + 1 + \operatorname{arctg} y) = 0, \\ z'_y = -2(x + 1 + \operatorname{arctg} y)/(1 + y^2) = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения вытекает, что $x + 1 + \operatorname{arctg} y = 0$. Тогда из первого следует, что $3x^2 - 3 = 0$. Откуда $x = \pm 1$.

Так как $|\operatorname{arctg} y| < \pi/2 < 2$, то $(x+1+\operatorname{arctg} y) \neq 0$ в случае $x = 1$. Если же $x = -1$, то если $x + 1 + \operatorname{arctg} y = 0$, то и $y = 0$. Итак, имеется только одна стационарная точка M(–1; 0). Находим частные производные второго порядка: $z''_{xx}(M) = -8$; $z''_{yy}(M) = -2$; $z''_{xy}(M) = -2$. Поскольку z''_{xx} (M) < 0 и $\Delta = (-8) \times (-2) - (-2)^2 = 12 > 0$, то точка M является точкой локального максимума. Интересно отметить следующее: несмотря на то, что точка M является *единственной стационарной точкой всюду дифференцируемой функции z,* эта точка *не является точкой глобального максимума.* Действительно, $z(M) = 2$, однако существует точки, в которых значение z больше. Например, $z(10;0) = 849 > 2$