Пример выполнения задания

Условие

Рассмотрим гильбертово пространство квадратично интегрируемых функций на отрезке [0,1], то есть $L_2[0,1]$ со скалярным произведением $(u,v)=\int_0^1 u(x)\overline{v(x)}dx$.

Пусть оператор A действует по правилу

$$Au=-\frac{d^2u}{dx^2}+p(x)u, \qquad p(x)\geq 0,\ p(x)\not\equiv 0\ \ x\in[0,1],$$

на подмножестве D_A дважды непрерывно дифференцируемых функций на отрезке [0,1], удовлетворяющих граничным условиям

$$u(0)=u(1)=0.$$

Задание

Проверьте, является ли оператор A: 1) симметричным, 2) положительным, 3) положительно определенным

Решение

1) Проверим, является ли оператор A симметричным то есть выполняется ли

$$(Au, v) = (u, Av) \quad \forall u, v \in D_A$$

$$(Au,v)=\int_0^1(-u''+pu)\bar{v}\,dx=\boxed{\int_0^1 -u''\bar{v}\,dx}+\int_0^1 pu\bar{v}\,dx=\left\{\begin{array}{c} f=\bar{v} \\ dg=-u''dx \\ \Rightarrow g=-u' \end{array}\right\}=$$

$$\boxed{\int_a^b f\,dg=fg\Big|_a^b-\int_a^b g\,df}$$

$$=\underbrace{-\bar{v}u'\Big|_0^1}_{\equiv 0}+\int_0^1 u'\bar{v}'\,dx+\int_0^1 pu\bar{v}\,dx=$$

$$-\bar{v}u'\Big|_0^1=-\underline{\bar{v}(1)}u'(1)+\underline{\bar{v}(0)}u'(0)=\left\{\begin{array}{l} u,v\in D_A \\ v(0)=0\Rightarrow\bar{v}(0)=0, \\ v(1)=0\Rightarrow\bar{v}(1)=0. \end{array}\right\}=0$$

$$=\boxed{\int_0^1 u'\bar{v}'\,dx}+\int_0^1 pu\bar{v}\,dx=\left\{\begin{array}{c} f=\bar{v}' \\ dg=u'dx \\ \Rightarrow g=u \end{array}\right\}=\underbrace{\bar{v}'u\Big|_0^1}_{\equiv 0}-\int_0^1 u\bar{v}''\,dx+\int_0^1 pu\bar{v}\,dx=$$

$$\bar{v}'u\Big|_0^1=\bar{v}'(1)\underline{u(1)}-\bar{v}'(0)\underline{u(0)}=\left\{\begin{array}{l} u,v\in D_A \\ u(0)=0, \\ u(1)=0. \end{array}\right\}=0$$

$$=-\int_0^1 u\bar{v}''\,dx+\int_0^1 pu\bar{v}\,dx=$$

$$=\int_0^1 u(-\bar{v}''+p\bar{v})\,dx=(u,Av)\Rightarrow\underset{\forall u,v\in D_A}{(Au,v)=(u,Av)}\Rightarrow A\ \text{симметричный}$$

2) Проверим, является ли симметричный оператор A положительным.

По определению симметричный оператор A в гильбертовом пространстве H называется положительным, если $\forall u \in D_A$ имеет место $(Au, u) \geq 0$, причем $(Au, u) = 0$ только если $u = 0_H$.

Проверим, выполняется ли $(Au, u) \geq 0$ и следует ли из $(Au, u) = 0$ что $u = 0_H$

$$(Au,u) = \int_0^1 (-u'' + pu)\bar{u}\,dx = \boxed{\int_0^1 -u''\bar{u}\,dx} + \int_0^1 pu\bar{u}\,dx = \left\{\begin{matrix} f = \bar{u} \\ dg = -u''dx \\ \Rightarrow g = -u' \end{matrix}\right\} =$$

$$\boxed{\int_a^b f\,dg = fg\Big|_a^b - \int_a^b g\,df}$$

$$= \underbrace{-\bar{u}u'\Big|_0^1}_{\equiv 0} + \int_0^1 u'\bar{u}'\,dx + \int_0^1 p|u|^2\,dx =$$

$$-\bar{u}u'\Big|_0^1 = -\underline{\bar{u}(1)}u'(1) + \underline{\bar{u}(0)}u'(0) = \left\{\begin{matrix} u \in D_A \\ u(0) = 0 \Rightarrow \bar{u}(0) = 0, \\ u(1) = 0 \Rightarrow \bar{u}(1) = 0. \end{matrix}\right\} = 0$$

$$= \int_0^1 u'\bar{u}'\,dx + \int_0^1 p|u|^2\,dx = \int_0^1 |u'|^2\,dx + \int_0^1 p|u|^2\,dx = \int_0^1 \{\,|u'|^2 + p|u|^2\,\}\,dx \underset{\forall u \in D_A}{\geq} 0$$

$$\int_0^1 \{\,|u'|^2 + p|u|^2\,\}\,dx = 0 \quad \Rightarrow \underbrace{|u'|^2}_{\geq 0} + \underbrace{p|u|^2}_{\geq 0} \equiv 0 \quad \Rightarrow u \equiv 0 \quad \Rightarrow \text{оператор } A \text{ – положительный}$$

$$u' = 0 \Rightarrow u \equiv C$$

$$u \in D_A \Rightarrow u(0) = u(1) = 0 \Rightarrow C \equiv 0$$

3) Проверим, является ли положительный оператор A строго положительным.

По определению положительный оператор A называется строго положительным, если $\forall u \in D_A$ имеет место $(Au, u) \geq \gamma(u, u),\ \gamma > 0$.

Проверим, выполняется ли $(Au, u) \geq \gamma(u, u)$.

При проверке положительности A показано $(Au,u)=\int_0^1\{\,|u'|^2+p|u|^2\,\}dx$

$$(u,u)=\int_0^1 |u\,(x)|^2\,dx$$

Сформулируем оценку сверху для $|u\,(x)|^2$ с помощью $\int_0^1 |u'(x)|^2dx$

$$u(x)-u(0)=\int_0^x u'(s)ds \overset{u\in D_A}{\Longrightarrow} u(x)=\int_0^x u'(s)ds$$

$$\Rightarrow |u(x)|=\left|\int_0^x u'(s)ds\right|\le\int_0^x |u'(s)|ds \quad \Rightarrow |u|^2\le\left(\int_0^x |u'(s)|ds\right)^2=$$

$$=\underbrace{\left(\int_0^x 1\cdot|u'(s)|ds\right)^2\le\left(\int_0^x |1|^2ds\right)\cdot\left(\int_0^x |u'(s)|^2ds\right)}_{\text{Неравенство Коши-Буняковского}}=x\int_0^x |u'(s)|^2ds\le x\int_0^1 |u'|^2dx$$

Только что мы показали, что $\boxed{|u|^2 \le x \int_0^1 |u'|^2 dx}$

$$(u,u) = \int_0^1 |u|^2\,dx \le \int_0^1 x \underbrace{\left(\int_0^1 |u'|^2 ds\right)}_{\equiv\, Const} dx = \left(\int_0^1 |u'|^2 ds\right) \cdot \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}\int_0^1 |u'|^2 ds$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^1 |u'|^2 ds \ge 2\int_0^1 |u|^2\,dx} \qquad (Au,u) = \int_0^1 \{\,|u'|^2 + p|u|^2\,\} dx = \int_0^1 |u'|^2\,dx + \int_0^1 p|u|^2 dx \;\ge$$

$$\ge 2\int_0^1 |u|^2\,dx + \int_0^1 \underbrace{p|u|^2}_{\ge 0} dx \ge 2\int_0^1 |u|^2\,dx \equiv 2(u,u) \;\Rightarrow (Au,u) \ge 2(u,u)$$

$\Rightarrow$ оператор A строго положительный