

Федеральное агентство по образованию Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования

Кемеровский технологический институт пищевой
промышленности

Б.А. Федосенков, А.В. Шебуков

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

(линейные системы)

Учебное пособие

для студентов специальности 210200

«Автоматизация технологических процессов и производств»

Кемерово – 2005

Содержание

Введение.....	4
1. Исторические аспекты развития ТАУ (имена, события, факты)	6
2. Принципы автоматического регулирования	12
3. Основные понятия и определения курса ТАУ	18
3.1. Общая схема САР	21
3.2. Развернутая структурная схема САР по отклонению	22
3.3. Сведения об измерительных устройствах. Энтропия. Информация	23
3.3.1. Энтропия для дискретных систем	25
3.3.2. Энтропия для непрерывных систем	26
3.3.2.1. Расчет энтропии для непрерывной системы с нормальным распределением технологического параметра.....	27
3.3.2.2. Расчет энтропии для непрерывной системы с равновероятным законом распределения технологического параметра.....	27
4. Динамика элементов автоматики	28
4.1. Основные теоремы преобразования Лапласа	29
4.2. Типовые входные воздействия.....	31
4.3. Типовые выходные воздействия (реакции)	32
5. Дифференциальное уравнение динамики звеньев.....	34
6. Связь между передаточной функцией и временными выходными характеристиками.....	36
7. Передаточные функции и частотные характеристики	38
7.1. Частотные характеристики.....	40
7.2. Типовые логарифмические характеристики.....	43
8. Звенья автоматики.....	46
8.1. Алгоритм анализа функционирования динамических звеньев	47
8.2. Инерционное звено нулевого порядка	48
8.3. Аperiодическое звено первого порядка.....	49
8.4. Звенья второго порядка.....	52
8.5. Дифференцирующие звенья	62
8.6. Реальное интегрирующее звено (объект).....	64
8.7. Объект с чистым или транспортным запаздыванием.....	67
8.8. Неминимально-фазовые звенья	68
8.9. Звенья, формирующие законы регулирования.....	70
8.9.1. Пропорционально-интегрирующее звено.....	70
8.9.1.1. Идеальное ПИ-звено (идеальный изодром).....	70
8.9.1.2. Реальное ПИ-звено (реальный изодром).....	72
8.9.2. Пропорционально-интегро-дифференцирующее звено	74
8.9.2.1. Идеальное ПИД-звено.....	74
8.9.2.2. Реальное ПИД-звено.....	77
9. Топологический метод анализа	78

9.1. Основные положения теории сигнальных графов.....	78
9.2. Особенности топологического метода анализа.....	81
10. Преобразование структурных схем и сигнальных графов.....	83
11. Анализ динамических систем в пространстве состояний.....	92
12. Метод определения переходной функции по вещественной частотной характеристике	97
13. Анализ устойчивости линейных систем	103
13.1. Критерии устойчивости	106
13.1.1. Критерий Гурвица	108
13.1.2. Критерий Рауса	110
13.1.3. Критерий Михайлова	112
13.1.4. Критерий Найквиста	116
13.1.5. Определение устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам.....	124
13.2. Запас устойчивости	128
13.3. Выделение областей устойчивости	131
13.3.1. D -разбиение плоскости одного параметра	131
14. Оценка качества регулирования	135
14.1. Понятие и показатели качества регулирования	135
14.2. Влияние расположения нулей и полюсов передаточной функции на переходную характеристику	145
14.3. О взаимном расположении нулей и полюсов передаточной функции и изображения внешнего воздействия.....	145
14.4. Оценка качества переходной характеристики по частотным характеристикам.....	146
14.5. Интегральные показатели качества.....	148
Список основных аббревиатур	153
Список литературы	155

Введение

Теория автоматического управления (ТАУ) – научная дисциплина, предметом изучения которой являются информационные процессы, протекающие в автоматических системах управления. ТАУ выявляет общие закономерности функционирования, присущие автоматическим системам различной физической природы, и на основе этих закономерностей разрабатывает принципы построения высококачественных систем управления.

При изучении процессов управления в ТАУ абстрагируются от физических и конструктивных особенностей систем и вместо реальных систем рассматривают их адекватные математические модели, поэтому основным методом исследования в ТАУ является математическое моделирование. Кроме того, методологическую основу ТАУ образуют теория обыкновенных дифференциальных уравнений, операционное исчисление (преобразование Лапласа), гармонический анализ (преобразование Фурье), теория функций комплексного переменного, векторно-матричный анализ.

ТАУ вместе с теорией функционирования элементов систем управления (датчиков, регуляторов, исполнительных механизмов) образует более широкую отрасль науки - автоматика. Автоматика в свою очередь является одним из разделов технической кибернетики. Техническая кибернетика изучает сложные автоматизированные системы управления технологическими процессами (АСУТП) и предприятиями (АСУП), построенные с использованием управляющих вычислительных машин.

В настоящее время ТАУ наряду с новейшими разделами так называемой общей теории управления (исследование операций, системотехника, теория игр, теория массового обслуживания, теория информации) играет важную роль в совершенствовании и автоматизации управления производством.

Автоматизация является одним из главных направлений научно-технического прогресса и важным средством повышения эффективности общественного производства. Современное промышленное производство характеризуется ростом масштабов и усложнением технологических процессов, увеличением единичной мощности отдельных агрегатов и установок, применением интенсивных, высокоскоростных режимов, близких к критическим, повышением требований к качеству продукции, безопасности персонала, сохранности оборудования и окружающей среды. Экономичное, надёжное и безопасное функционирование сложных промышленных объектов может быть обеспечено с помощью лишь самых совершенных принципов и технических средств управления.

Современными тенденциями в автоматизации производства является широкое применение ЭВМ для управления, создание машин и оборудования со встроенными микропроцессорными средствами измерения, контроля и регулирования, переход на децентрализованные (распределённые) структуры управления с микроЭВМ, внедрение человеко-машинных систем, использование высоконадёжных технических средств, автоматизированное проектирование систем управления.

1. Исторические аспекты развития ТАУ (имена, события, факты)

Ползунов Иван Иванович (1765 г.) – автор *первого в мире автоматического регулятора уровня воды* в котле паровой машины.

Джеймс Уатт (1784 г.) – автор первого автоматического регулятора (АР) скорости вращения паровой турбины.

Принцип Ползунова-Уатта лежит в основе автоматического регулирования *по отклонению* (один из базовых принципов регулирования в автоматике).

Жан-Виктор Понселе (19 век) – автор принципа регулирования *по возмущению*.

Стодола А. (Словакия, конец 19 века) развил идею Понселе о системах *регулирования по возмущению*, применительно к вопросам регулирования турбин.

Вышнеградский И.А. (1877 г.) – *основатель теории автоматического регулирования*. Впервые описал решение дифференциального уравнения четвертой степени при анализе единой динамической системы, включающей паровую машину и регулятор.

Попов А.С. (Россия, 1895-1900 гг.) – совместно с учениками (Чиколев В. и др.) создал *дифференциальный регулятор* накаливания ртутных осветительных ламп.

Раус Э.Дж. (Англия, 1877 г.) – автор алгебраического *способа оценки устойчивости* систем автоматического управления (САУ).

Гурвиц А. (Австрия, 1895 г.) – автор другого алгебраического *способа оценки устойчивости* динамических систем. В дальнейшем работы Рауса и Гурвица были обобщены их последователями.

Оливер Хевисайд (Англия, 1915-1924 гг.) – электротехник, специалист в области теории и практики фильтрации; разрабатывал электротехнические фильтры с цепями регулирования по току и напряжению; автор при-

кладной теории операционного исчисления (*преобразования Лапласа*), являющейся математическим фундаментом теории (автоматического) управления; сформулировал процедуру определения оригиналов по их изображениям (*формула Хевисайда-Меллина*); открыл «*k*-слой» в ионосфере, позволивший впоследствии обосновать вопросы геоглобальной передачи радио- и телевизионных сигналов.

Максвелл Дж.К. (Англия конец 19 века) – впервые ввел термин «*кибернетика*» как понятие, обозначающее науку об управлении, передаче информации и связи в животном организме и в машине (технической системе). По сути, автоматика представляет собой техническую кибернетику.

Найквист Х. (США, 1932 год) – автор частотного критерия устойчивости САУ, специалист в области электронных фильтров и усилительных устройств.

Михайлов А.В. (СССР, 1936 г.) – автор другого частотного метода оценки устойчивости САУ, изложенного в научной работе «Гармонический метод в теории регулирования».

Неймарк Ю.И., Соколов А.А. (СССР – 1948 г.) – разработали так называемый метод *D*-разбиения пространства параметров динамической системы, позволяющий выделять области ее устойчивости.

Теодорчик (1948 г.) – предложил основы метода *корневых годографов*, дающего возможность рассматривать влияние параметров исследуемой системы на ее устойчивость путем анализа перемещения полюсов ПФ на комплексной плоскости. Метод разработан, теоретически обоснован и развит Удерманом Э.Г. в 1949 году и Эвансом (США) в 1950 году.

Клод Элвуд Шеннон (США – 1950 гг.) – основоположник математической теории информации и связи; автор теоремы отсчетов из теории выборочных временных рядов (так называемой *теоремы Уиттекера-Котельникова-Шеннона*).

Академики Кулебакин В.С., Лузин Н.Н., Петров Б.Н. (СССР – 1950-60 гг.) – специалисты, разработавшие *теорию инвариантности комбинированных систем управления*, в которой изучаются математические условия компенсации внешних воздействий средствами управления по возмущению.

Норберт Винер (США, 1948-1960 гг.) – лауреат Нобелевской премии, «отец» кибернетики; совместно с Хинчиным А.Я. (СССР), в частности, показал, что такие характеристики стационарного случайного сигнала, как автокорреляционная функция и спектральная плотность мощности сигнала, связаны между собой посредством преобразования Фурье (прямого и обратного).

Академики Колмогоров А.Н. и Пугачев В.С. (СССР – 1950 гг.) – внесли большой вклад в развитие одного из разделов общей теории управления – *статистической динамики (теории стохастических процессов)*.

Академики Андронов А.А., Воронов А.А., Поспелов Г.С., Емельянов С.В., члены – корреспонденты Красовский А.А., Петров Е.П., проф. Гольдфарб Л.С., Фельдбаум А.А., Солодовников В.В. (СССР – 1950-90 гг.) – внесли большой вклад в процесс становления *отечественной школы теории автоматического управления (ТАУ)* и ее развития на современном этапе.

Профессор Гольдфарб Л.С. (СССР – 1950 гг.) – один из авторов *гипотезы низкочастотной фильтрации*, используемой при исследовании нелинейных систем управления методом гармонической линеаризации.

Профессор Солодовников В.В. и академик Воронов А.А. (СССР – конец 1950 гг.) – авторы графо-аналитических методов определения временных характеристик по известным вещественным частотным передаточным функциям (соответственно *методов аппроксимирующих трапеций и треугольников*); авторы монографий и учебников по ТАУ.

Люенбергер (Швеция), Калман Р.(США) – в конце 1950-60 гг. создали *теорию формальных наблюдателей* (устройств для оценки стационарных случайных сигналов) и *теорию оптимальной фильтрации* (*фильтр Калмана Р.*) *стохастических процессов*.

Риккати (Италия – 1960-70 гг.) – автор подхода к исследованию систем оптимального управления, основанного на методе пространства состояний (*векторно-матричное уравнение Риккати*).

Ляпунов А.М. (Россия – 1892 г.) – публикация работы «Общая задача об устойчивости движения»; выдающийся русский математик; впервые сформулировал ряд правил, с помощью которых стало возможным на обобщенном формальном уровне оценивать *устойчивость динамических систем*.

Мэйсон С. (США – 1950 гг.) – опубликовал ряд статей по теории систем автоматического управления с обратной связью, в которых обосновал правомерность ряда *топологических процедур*, позволяющих без преобразования исходной сложной динамической структуры определить в количественной форме ее *произвольные скалярные передаточные функции*. Работы Мейсона С. получили свое новое развитие в 1970-80 гг., когда начали интенсивно внедряться цифровые электронно-вычислительные машины в промышленные и научно–исследовательские автоматизированные комплексы.

Летов А.М. (СССР – 1950-60 гг.) – совместно с Калманом Р. (США) разработал методику синтеза замкнутых линейных систем управления, оптимальных по квадратичным критериям качества (*аналитическое конструирование оптимальных регуляторов – АКОР*).

Крылов Н.М., Ляпунов А.М., Боголюбов Н.Н., Андронов А.А. – выдающиеся российские ученые, заложившие в период с 1892 по 1940 гг. *математические основы теории нелинейных систем управления*.

Булгаков Б.В., Гольдфарб Л.С., Попов Е.П. (СССР – 1950 гг.) – разработали ряд методов для исследования *нелинейных автоматических систем*.

Цыпкин Я.З. (СССР – 1950-70 гг.) – академик Российской Академии Наук (РАН РФ), крупнейший из современных специалистов в области автоматизации ученый, сотрудник Института проблем управления (г. Москва), внесший *большой вклад в различные области современной теории (автоматического) управления*; один из авторов *аналитической теории описания дискретных сигналов и систем управления* (релейных, импульсных, цифровых). В настоящее время ведет большую методическую и научную работу; автор многих монографий и учебных пособий по различным вопросам теории управления.

С начала 1950 гг. в США и Англии появляются *первые ЭВМ* (Атанасов, Дж. фон Нейман и другие), в СССР – с середины 1950 гг. (МЭСМ, «Стрела» и другие). ЭВМ стали применяться в исследовательских целях (моделирование устройств различной физической природы; использование в качестве устройств управления), позже – в промышленных.

1960 гг. – *первые мини- и микроЭВМ* в США и Англии, прототипы первых профессиональных персональных ЭВМ (ППЭВМ, компьютеров), ставшие исполнять *роль универсальных цифровых устройств управления (УУ) в составе САУ*; с внедрением подобных УУ эффективность САУ выросла на порядки.

С начала 1970 гг. в США и Западной Европе активно внедряются цифровые системы автоматизации технологических (и в целом, – производственных) процессов, где в качестве автоматических регуляторов (АР) используются ЦВМ и гибридные ЭВМ (ГВМ), что дает увеличение надежности, быстродействия, снижение габаритов, улучшение эргономических параметров, а также повышение функциональности, технологичности и экономичности при их использовании.

Начало 1980 гг. – возникновение универсальных быстродействующих персональных компьютеров фирм США (IBM, Apple, Dec и др.), которые стали стремительно внедряться во все сферы автоматизации процессов на промышленных предприятиях, в научно–исследовательских организациях и учебных заведениях. Специализированные типы этих ПК позволили перевести автоматизацию технических объектов и производственных систем на качественно новый, полномасштабный, уровень.

С конца 1970 гг. – внедрение международной (наднациональной) *сети Internet*; первые примеры использования глобальных информационных сетей для целей *автоматического и автоматизированного управления распределенными, удаленными и сверхудаленными* учебными, научными и производственными *объектами и системами*.

1980-90 гг. – ведется работа по созданию обобщенной математической теории анализа и синтеза систем управления различных типов и назначения, в основе которой лежат векторно-матричные методы исследования дифференциальных уравнений динамики и системные концепции реализации быстродействующих компьютерных алгоритмов, моделирующих поведение исследуемых систем управления.

2. Принципы автоматического регулирования

Задача управления заключается в следующем. Имеется объект управления (управляемый объект), т.е. некий механизм, агрегат или устройство, некий технологический, энергетический или транспортный процесс, желаемое поведение или протекание которого должно быть обеспечено.

Поведение объекта управления, результат его действия определяется некоторыми показателями. Чаще всего ими являются значения каких-то физических величин, которые называют выходными величинами объекта управления. Чем сложнее объект, тем большее число показателей характеризует его действие и тем труднее следить за всей их совокупностью. Поэтому к выходным величинам относят лишь наиболее важные для оценки поведения объекта и его практического использования.

В реальных условиях каждое техническое устройство, каждый технический процесс оказывается под влиянием многочисленных воздействий со стороны внешней среды. Все эти воздействия практически невозможно учесть, поэтому в поле зрения оставляют лишь те, которые оказывают наибольшее влияние на выходные величины, и называют их **входными воздействиями**.

Изменение во времени входных воздействий и выходных величин объекта управления характеризуют его поведение, его функционирование.

Входные воздействия, с точки зрения их влияния на действие объекта, на его выходные величины, разделяются на две основные группы. Некоторые из входных воздействий обеспечивают, как уже отмечалось, желаемое изменение поведения объекта, достижение поставленных целей. Такие входные воздействия называются **управляющими**, и при их отсутствии задача управления вообще не имеет решения. При ручном управлении такие воздействия на объект осуществляет оператор, при автоматическом - управляющее устройство. Другие входные воздействия, напротив, мешают

достижению цели, и изменить их, как правило, невозможно. Такие воздействия называют *возмущающими (возмущениями)* или *помехами* (рис. 2.1).

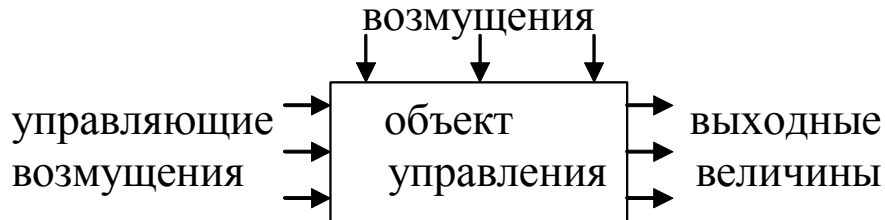


Рис. 2.1. Схематическое изображение объекта управления

Задача управления, по существу, заключается в формировании такого закона изменения управляющих воздействий, при котором достигается желаемое поведение объекта независимо от наличия возмущений.

Сложная и разносторонняя задача управления в подавляющем большинстве случаев включает более узкую задачу регулирования, которую и будем рассматривать в дальнейшем, так как автоматическое регулирование в настоящее время имеет наибольшее практическое значение.

Задача регулирования заключается в поддержании выходных величин объекта равными (или пропорциональными) некоторым эталонным функциям времени – задающим воздействия. Последние могут быть постоянными или изменяющимися как по заданному, так и по ранее неизвестному закону.

Методы решения задачи регулирования и принципы автоматического регулирования используются различные. Самый простой принцип, основывается на предположении, что влиянием всех возмущений можно пренебречь, и воздействовать на объект необходимо лишь в том случае, когда нужно изменить работу объекта, т.е. значение регулируемой величины.

Разомкнутая система регулирования (рис. 2.2) действует следующим образом. При изменении задающего воздействия g формирующий элемент 3 выбирает необходимое «указание» исполнительному механизму 2. По-

следний создает регулирующее воздействие z на объект регулирования 1. В результате регулируемая величина y приближается с той или иной точностью к требуемому значению.

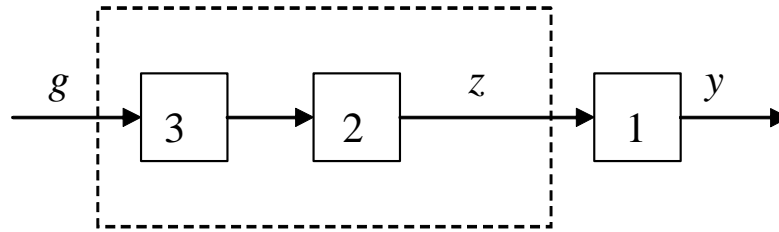


Рис. 2.2. Функциональная схема разомкнутой системы регулирования

Формирующий элемент и исполнительный механизм составляют регулятор. Регулятор и объект в совокупности образуют систему регулирования.

Заметим, что при конструировании регулятора рассмотренной системы необходимо знать все свойства объекта регулирования. Только при выполнении этого условия и отсутствия возмущений можно правильно предвидеть влияние задающего воздействия на регулируемую величину.

Область применения описанной простейшей системы регулирования ограничена тем, что нельзя пренебречь влиянием возмущений. При определенном задающем воздействии и различных возмущениях выходная величина объекта (регулируемая величина) будет иметь разные значения и, следовательно, задача регулирования не будет решена. В связи с этим возникает необходимость контроля возмущений или хотя бы основного из них – возмущения f . Это возмущение нужно измерять, и при его изменениях создавать дополнительное воздействие на объект, компенсирующее влияние возмущения. Таким образом, в состав регулятора необходимо включить элемент 4 (рис. 2.3), который через формирующий элемент 3 создает компенсирующее воздействие исполнительного механизма 2 на объект 1.

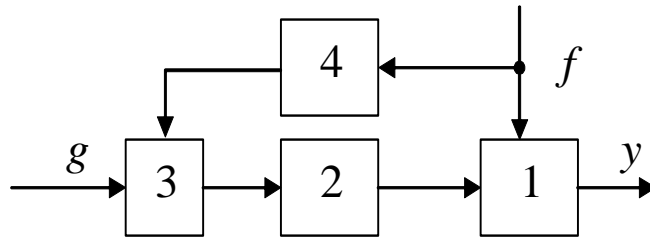


Рис.2.3. Функциональная схема разомкнутой системы регулирования с измерением основного возмущения

Рассмотренные системы являются **разомкнутыми**: в них регулируемая величина y не влияет на действие регулятора. Это означает, что характер регулирующих воздействий зависит от свойств объекта лишь в той степени, в какой это учтено при конструировании регулятора. Из-за изменений свойств объекта (и влияния второстепенных возмущений) действительное значение регулируемой величины может значительно отличаться от требуемого значения, при этом регулятор при создании регулирующего воздействия напоминает стрелка, который теряет возможность влиять на результат выстрела после наведения оружия и спуска курка. Разница между двумя системами (см. рис. 2.2 и 2.3) лишь в том, что в последней учитывается влияние возмущения подобно тому, как стрелок делает поправку на ветер. В реальных условиях часто отсутствует исчерпывающая и достоверная информация о свойствах объекта регулирования и о характере возмущений, и поэтому разомкнутые системы регулирования оказываются неэффективными. В связи с этим прибегают к созданию более сложных, но и значительно более совершенных **замкнутых систем** автоматического регулирования.

В замкнутой системе используется **принцип обратной связи**, возможно, самый мощный принцип автоматического регулирования и управления. Такая система в простейшем случае (рис. 2.4) состоит из объекта регулирования 1 и регулятора, который, кроме исполнительного элемента 2 и формирующего (или усилительно-преобразующего) элемента 3, имеет еще измерительный элемент 4 и элемент сравнения (сумматор) 5.

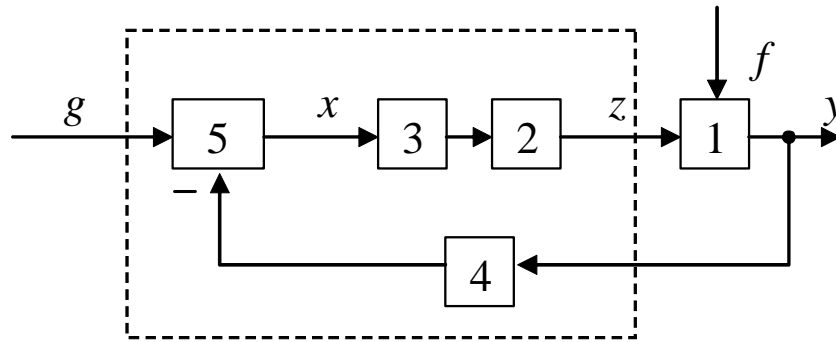


Рис.2.4. Функциональная схема замкнутой САР

Измерительный элемент 4 осуществляет обратную связь в системе обеспечивает влияние регулируемой величины y на вход системы. Сигнал y_o , пропорциональный регулируемой величине, сравнивается с задающим воздействием g . Если регулируемая величина отклонилась от требуемого значения, то изменяется **сигнал рассогласования (сигнал ошибки)** $x = g - y_o$, который воздействует на элемент 3. Затем воздействие передается на исполнительный элемент 2 и на объект 1, в итоге отклонение регулируемой величины от требуемого значения устраняется (с определенной степенью точности).

Таким образом, в замкнутой системе воздействие на объект формируется не только в зависимости от задающего воздействия, как в замкнутой системе (рис. 2.2), но и от состояния объекта и наличия возмущения. Точнее, регулирующее воздействие определяется отклонением регулируемой величины от заданного значения. Поэтому принцип обратной связи позволяет успешно решать задачу регулирования, несмотря на некоторую неопределенность или неточность в характеристиках объекта регулирования и исполнительного механизма, а также сведениях о возмущениях.

Можно видеть, что в замкнутой системе автоматического регулирования по отклонению нет необходимости получать информацию непосредственно о задающем воздействии, которое используется лишь для сравнения с сигналом обратной связи, и о возмущениях, однако это допустимо не всегда. В некоторых случаях качество такого регулирования оказывается

неприемлемо низким. Тогда обеспечивается **комбинированное регулирование** при котором сочетаются принципы замкнутой и разомкнутой систем.

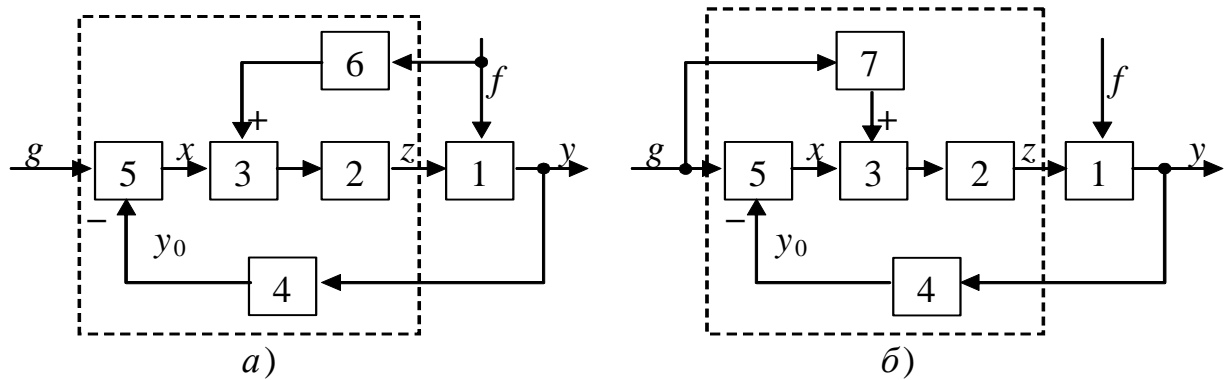


Рис. 2.5. Функциональная схема замкнутой САР с дополнительной связью
а – по возмущению, б – по задающему воздействию

При комбинированном регулировании создается дополнительная связь 6 по возмущению (рис. 2.5, а), которая компенсирует влияние возмущения «в основном», а замкнутый контур устраняет рассогласование, возникающее при изменениях задающего воздействия и вследствие неточности действия дополнительной связи 6. Используются также комбинированные системы с дополнительной связью 7 по задающему воздействию (рис. 2.5, б), которая и обеспечивает «в основном» его воспроизведение регулируемой величиной. Замкнутый контур в этом случае устраняет рассогласование, возникшее из-за неточности действия дополнительной связи 7 и вследствие воздействия возмущений.

3. Основные понятия и определения курса ТАУ

ТАУ изучает вопросы, связанные с *управлением* техническими системами, включающими объект и устройства управления, другие функциональные элементы, *в результате которого* выходной сигнал объекта изменяется по определенному закону, задаваемому устройством управления. Изменение выходного сигнала определяется функцией цели (целевой функцией).

Система автоматического управления (САУ) отличается от САР тем, что в последней осуществляется процесс регулирования, но не управления, т.е. выходной сигнал $x_{вых}$ в САР должен соответствовать (в идеале быть равным) заданному значению этого $x_{вых}(t)$.

Существуют три основных принципа регулирования:

1. принцип регулирования по отклонению (принцип Ползунова-Уатта);
2. принцип регулирования по возмущению (принцип Понселе).
3. принцип комбинированного регулирования.

Первый метод отличается наличием в системе *обратной связи (ОС)*, следовательно, при этом система (система автоматического регулирования) (САР) является *замкнутой*. Вторым методом отличается наличием *устройства компенсации возмущения*, ОС отсутствует, т.е. система является *разомкнутой*. При третьем методе одновременно используются оба основных принципа регулирования – по отклонению и возмущению.

С целью анализа и синтеза систем (САР и САУ) используются так называемые *структурные схемы (СС)*. СС – это условное графическое изображение реальной САУ, показывающее тип звеньев, а также наличие и характер взаимосвязей элементов автоматики (ЭА). На СС показывается вход и выход САУ (рис. 3.1).



Рис. 3.1. Структурная схема САУ

Различают СС двух типов:

1. Блочная СС (БСС). В ней элементы автоматики (ЭА) обозначаются прямоугольниками (блоками), а сигналы (воздействия), отражающие связи между ЭА, обозначаются стрелками.

2. Графовые СС (ГСС) или сигнальные графы, просто «графы», или графы Мэйсона. В них ЭА обозначаются дугами (стрелками), а сигналы воздействия – точками, называемыми узлами графа или вершинами дуг графа.

На БСС и ГСС рядом с обозначением каждого ЭА указывается: передаточная функция (ПФ) для БСС и оператор дуги графа для ГСС.

Рассмотрим следующую СС (рис. 3.2).

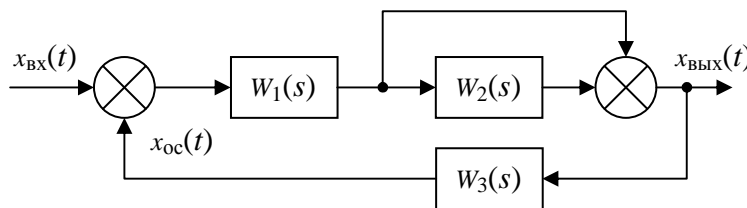


Рис. 3.2. Блочная структурная схема САУ

На рис. 3.2 используются следующие обозначения: $W_i(s)$ – передаточная функция i -го звена; $i = \overline{1,3}$ – номер звена. Индекс i – это вектор целых чисел (рис. 3.3).

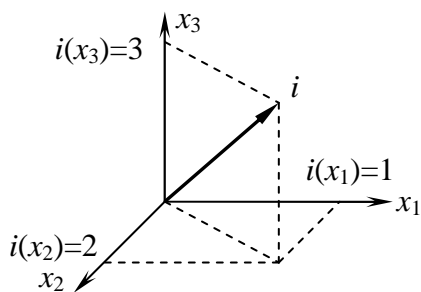


Рис. 3.3.

На листе бумаги можно изобразить четыре типа векторов в пространстве R^k , где k – размерность векторного пространства; $k = 0, 3$: 0 – мерный; 1 – мерный; 2 – мерный; 3 – мерный векторы; R^0 – нульмерное; R^1 – одномерное; R^2 – двухмерное; R^3 – трехмерное пространство.

В памяти компьютера можно зафиксировать вектор размерности R^n , где $n > 4$; R^n – гиперпространство.

Соответственно поверхность в нем называется гиперповерхностью. Гиперповерхность с линейными координатами является гиперплоскостью. При этом в уравнении этой поверхности все координаты x_i (где $i=\overline{1,n}$) являются переменными в первой степени.

Уравнение гиперплоскости:

$$y = Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + Dx_4 + \dots + Mx_i + \dots \quad (3.1)$$

Понятие гиперплоскости используется в теории оптимальных систем.

Структурная схема, имеющая один вход и один выход, называется *скалярной СС*. Соответственно такая САУ называется скалярной. СС, имеющая более одного входа и/или более одного выхода, называется *векторной СС*, а САУ – векторной САУ.

Изобразим приведенную на рис. 3.2 БСС в виде сигнального графа (рис. 3.4).

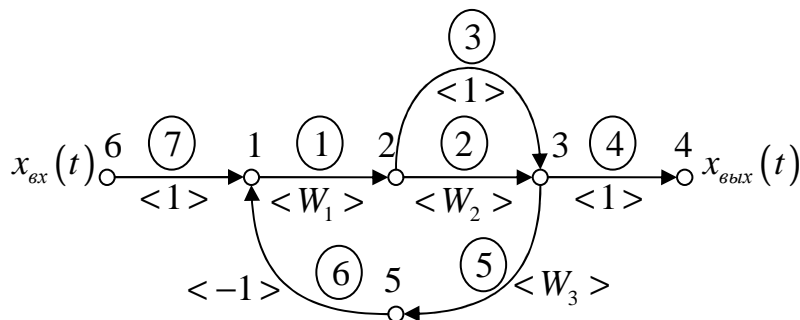


Рис. 3.4. Сигнальный граф САУ

Путь на графе от узла 3 к узлу 1 через узел 5 является отрицательной обратной связью (ООС). ООС – цепь, по которой сигнал с выхода САУ подается через элемент обратной связи на вход САУ со знаком «минус» относительно $x_{\text{вх}}(t)$. Входной / выходной сигналы принято обозначать либо в виде двойной стрелки (рис. 3.5, а), либо через единичную дугу (рис. 3.5, б):

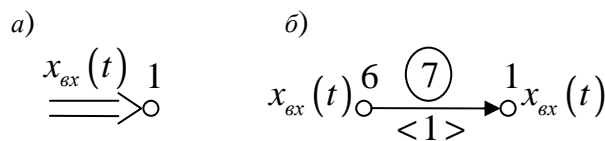


Рис. 3.5. Обозначение входного / выходного сигналов:

а – двойная стрелка; б – единичная дуга

Оператор дуги графа (т.е. ПФ звена, представленного дугой) обычно указывается в угловых скобках.

3.1. Общая схема САУ

Изобразим схему САУ в свернутом (обобщенном) виде (рис. 3.6).

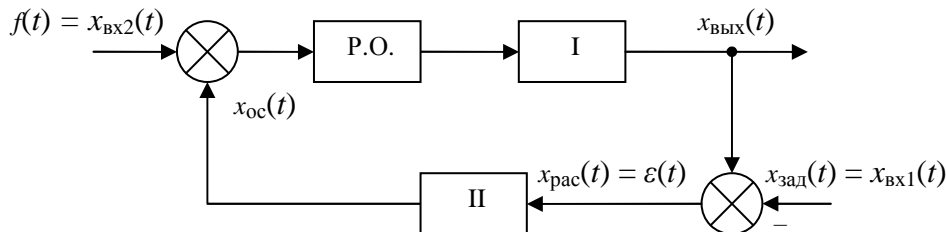


Рис. 3.6. Схема САУ в общем виде

Объект I управления ОУ (объект регулирования ОР) – это машина, аппарат или технологический процесс, который необходимо автоматизировать, т.е. заставить выходной сигнал $x_{вых}$ измениться определенным образом под действием управляющего устройства (УУ) или автоматического регулятора (АР) Π .

РО (регулирующий орган) – это вентиль, задвижка, заслонка, дверь и т.д., т.е. определенный запорно-регулирующий элемент. $F(t)$ – внешнее возмущающее воздействие; мешающий фактор; сигнал, стремящийся вывести ОР из нормального режима, т.е. исказить изменение $x_{вых}(t)$. Например, $f(t)$ – температура окружающей среды (цеха, отделения) для холодильника, величина нагрузки. Это также может быть величина загрузочной порции в электрическую мясорубку, нагрузка на валу асинхронного двигателя, расход насоса охлаждающего агента – рассола. $F(t)$ – это также разные шумы и помехи. $X_{зад}$ – сигнал задания (задающее воздействие), т.е. сигнал от специального устройства – задатчика, который устанавливает (задает) в системе САУ требуемое значение выходного сигнала $x_{вых}$. Здесь $x_{зад}$ является полезным сигналом; получив его, САУ должна установить в системе $x_{вых} = x_{зад}$. Сигнал задания должен быть отработан системой и на

выходе САР должна установиться выходная координата $x_{вых}=x_{зад}$. Поэтому канал, по которому происходит эта обработка, называется каналом управления (регулирования) или каналом задающего воздействия. Внешнее возмущающее воздействие $f(t)$ создает искажение режима регулирования в САР, и, в конечном счете, его действие на ОР должно быть устранено; поэтому канал, по которому возмущение влияет на ОР, называется каналом возмущения.

Вывод: в каждой реальной САР есть как минимум 2 канала:

1. Канал управления;
2. Канал возмущения.

X_y – сигнал управления (управляющий сигнал); формируется посредством АР с целью воздействия на ОР; $x_{рас}$ – сигнал рассогласования или ошибка $[\varepsilon(t)]$ рассогласования (ошибка отклонения):

$$x_{рас}(t) = \varepsilon(t) = x_{зад}(t) - x_{вых}(t) \quad (3.2)$$

3.2. Развернутая структурная схема САР по отклонению

Развернутая СС САУ (рис. 3.7), в которой реализуется принцип регулирования по отклонению, состоит из 7 обязательных элементов – звеньев автоматики.

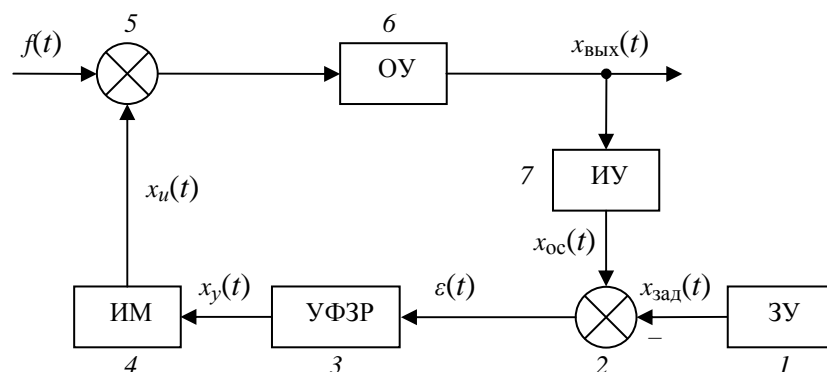


Рис. 3.7. Развернутая структурная схема САУ

ЗУ – задающее устройство (задатчик); задает сигнал, равный требуемому значению $x_{вых}(t)$.

УФЗР – устройство формирования закона регулирования; формирует управляющий сигнал x_y (на выходе); на вход УФЗР поступает сигнал ошибки $\varepsilon(t)$ с выхода сумматора 2.

ИМ – исполнительный механизм (серводвигатель), управляющий регулирующим органом (РО) 5, который перераспределяет поток энергии или вещества, поступающий в объект управления (ОУ) 6.

ИУ – измерительное устройство; служит для непрерывного снятия информации о состоянии ОР; является элементом цепи отрицательной обратной связи (ООС).

3.3. Сведения об измерительных устройствах. Энтропия. Информация

Нормальная работа САУ обеспечивается текущим контролем за режимом ее работы, и сводится к своевременному и качественному управлению технологическими параметрами объекта управления.

Существует 4 уровня автоматизации:

1. Регулирование;
2. контроль;
3. сигнализация, защита, блокировка;
4. полуавтоматическое (ручное) управление силовыми механизмами и РО.

Регулирование в САУ невозможно без контроля выходной координаты ($x_{вых}$), т.к. для поддержания $x_{вых}$ в рамках изменения $x_{зад}(t)$ необходимо иметь

$$\varepsilon(t) = x_{зад}(t) - x_{oc}(t) = 0, \quad (3.3.)$$

т.е. ошибка рассогласования между x_{oc} и $x_{зад}$ должна быть равна нулю. Однако в силу инерционности элементов САУ условие $\varepsilon=0$ не сохраняется долгое время. Реальная зависимость $x_{вых}$ представлена на рис. 3.8.

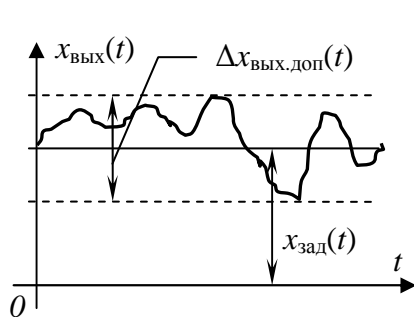


Рис. 3.8. Зависимость выходного сигнала САУ

$\Delta x_{вых.доп}$ – допустимый диапазон изменения $x_{вых}$ по технологическому регламенту; x_{oc} несет информацию об $x_{вых}(t)$.

Таким образом, при $\varepsilon=0$ в САУ обеспечивается $x_{вых}=x_{зад}$ (в соответствии с технологическим регламентом), т.е. на выходе САУ устанавливается заданное значение технологического

параметра (например, t° , давление, уровень, расход, влажность, рН и т.д.).

Существует три разновидности систем автоматики:

1. Системы стабилизации ($x_{вых}=x_{зад}=const$);
2. Следящие САУ ($x_{зад}(t)$ – функции времени);
3. Системы программного типа;

В состав систем последнего класса входит программный регулятор, который по заданной («защитой» в него) программе (алгоритму) реализует изменение во времени $x_{вых}$; без знания информации о выходной координате нельзя выполнить точное регулирование; чем больше информации будет получать система о регулируемом технологическом параметре, тем эффективнее будет осуществляться регулирование в системе. Иными словами, ОУ будет становиться более определенным. С более определенного объекта ИУ снимает более точную информацию и подает ее в систему. Из этого следует, что процесс управления способствует накоплению информации, а последняя – уточняет процесс управления.

3.3.1. Энтропия для дискретных систем

Информацию можно выразить в количественной форме. Интегральной оценкой неопределенности системы (хаотичности) является энтропия; которая для дискретных систем рассчитывается по формуле Шеннона К.Э.:

$$H(x) = - \sum_{i=1}^n p_k \cdot \log_a p_k, \quad (3.4)$$

где: p_k – вероятность k -го состояния системы; $a = 2; 10; e$ – основание логарифма; определяет единицы измерения энтропии (соответственно, бит – двоичная единица; дит – десятичная единица; нит – натуральная единица); n – общее число возможных состояний в системе.

Энтропия (неопределенность системы) с 2-мя равновероятными состояниями (в этом случае для снятия неопределенности в системе необходимо в нее ввести информацию, равную 1 биту, т.е. задать 1 вопрос, ответ на который сделает систему полностью определенной, детерминированной) равна

$$H(s) = - \sum_{k=1}^{n=2} p_k \log_2 p_k = - \sum_{k=1}^2 \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} = 1 \text{ бит.}$$

Если система имеет n равновероятных состояний, т.е. вероятность k -го состояния $P_k = 1/n$, где $k = \overline{1, n}$, то энтропия такой системы:

$$H(x) = - \sum_{i=1}^n P_k \log_a P_k = - \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \log_a \frac{1}{n} = -n \frac{1}{n} \log_a \frac{1}{n} = -(\log_a) - \log_a n = \log_2 n, \quad (3.5)$$

где $a=2$.

Реальная система непрерывного типа всегда может быть сведена к системе дискретного типа. Для этого надо весь диапазон ТП разбить на ряд поддиапазонов и каждый поддиапазон рассматривать в качестве некоторого дискретного состояния. Если число n велико и номер состояния можно выразить двоичным числом вида $n=2^m$; то $H(x) = \log_2 2^m = m$, бит.

Следовательно, в дискретной системе энтропия определяется числом состояний: чем больше n , тем больше $H(x)$ и наоборот, т.е. система становится более определенной, если число n мало.

3.3.2. Энтропия для непрерывных систем

Реальные системы в основном – непрерывны, поэтому для оценки $H(x)$ в формуле Шеннона К.Э. вместо P_k нужно использовать плотность распределения вероятностей $f(x)$ технологического параметра x .

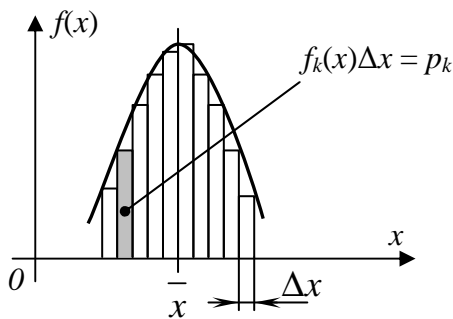


Рис. 3.9. Плотность распределения технологического параметра

В общем виде зависимость плотности распределения ТП представлена на рис. 3.9.

При дискретизации непрерывного закона распределения $f(x)$ последний заменяется гистограммой, т.е. дискретным распределением, площадь ступеньки которого определяет вероятность p_k получения какого-либо результата измерения в диапазоне ТП, равного Δx .

Тогда при подстановке в формулу Шеннона К.Э. вместо p_k выражения $f_k(x)\Delta x$ получим:

$$H(x)^* \cong - \sum_{k=1}^n f(x)_k \Delta x \log[f(x)_k \Delta x], \quad (3.6)$$

или:

$$H(x) \cong H(x)^* - \log \Delta x, \quad (3.7)$$

где $H(x)^*$ – приведенная энтропия (энтропия непрерывной системы); $\log \Delta x = \text{const}$.

$$H(x)^* = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log f(x) dx. \quad (3.8)$$

3.3.2.1. Расчет энтропии для непрерывной системы с нормальным распределением технологического параметра

При нормальном законе

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), \quad (3.9)$$

где $M(x) = \bar{x} = 0$.

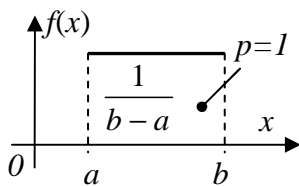
Тогда:

$$H(x)^* = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \ln\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right) dx \cong \log_e(4.13\sigma) = \ln 4.13\sigma \text{ нит.} \quad (3.10)$$

Здесь «нит» – единица измерения энтропии (натуральная цифровая единица) при основании логарифма $a = e = 2,718$.

Вывод: Энтропия $H(x)^*$ тем больше, чем больше σ (среднеквадратичное отклонение ТП).

3.3.2.2. Расчет энтропии для непрерывной системы с равновероятным законом распределения технологического параметра



В такой системе закон распределения имеет вид,

представленный на рис. 3.10. Подставим $f(x) = \frac{1}{b-a}$

Рис. 3.10. Плотность распределения ТП

в формулу для приведенной энтропии:

$$H(x)^* = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{b-a} \log_a \frac{1}{b-a} dx = - \frac{1}{b-a} \log_a \frac{1}{b-a} \int_a^b dx = \log_a(b-a), \text{ бит.} \quad (3.11)$$

Вывод: Энтропия тем больше, чем больше диапазон возможного изменения ТП (x).

4. Динамика элементов автоматики

Задачи анализа и синтеза систем управления решаются с помощью такого мощного математического аппарата, каким является *операционное исчисление (преобразование) Лапласа*.

В соответствии с основной концепцией преобразования Лапласа, любой временной зависимости (внешним воздействиям, выходным координатам, промежуточным внутренним сигналам, виртуальным ненаблюдаемым переменным) ставится в соответствии так называемое *изображение* по Лапласу этой временной зависимости.

Таким образом, формально задаются два пространства (области): пространство оригиналов, к которому условно относят все временные зависимости-оригиналы, и пространство изображений (по Лапласу), в котором формируются соответствующие этим оригиналам изображения (рис. 4.1).

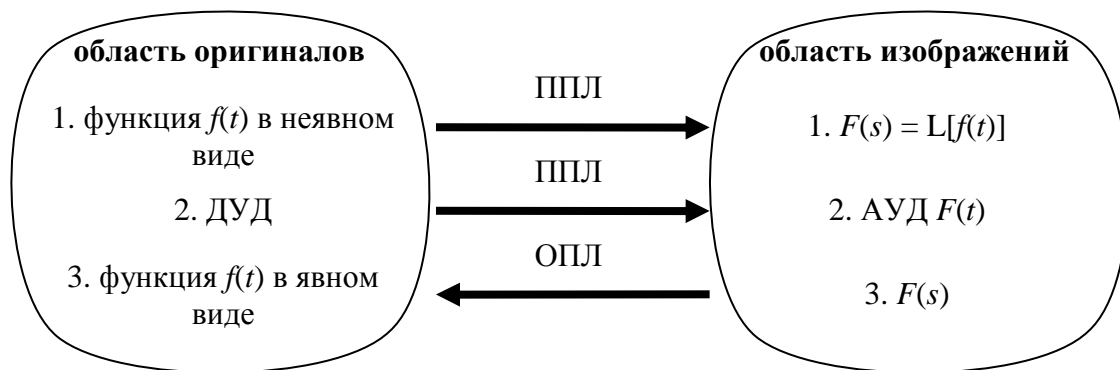


Рис. 4.1. Пространство оригиналов и изображений

ДУД – дифференциальное уравнение динамики системы; АУД – алгебраическое уравнение динамики в изображениях; ППЛ – прямое преобразование Лапласа; ОПЛ – обратное преобразование Лапласа.

Здесь изображение $F(s)$ для соответствующего оригинала, $f(t)$ находится по интегральной формуле Эйлера:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-st) dt. \quad (4.1)$$

Данное выражение описывает так называемое прямое преобразование Лапласа, т.е. операцию перехода от оригинала к изображению. Обратный переход от изображения к оригиналу, соответствующий обратному преобразованию Лапласа, совершается несколькими способами, эффективность которых при решении конкретных задач – различна. Наиболее универсальным способом отыскания оригинала по заданному изображению является использование предельной формулы Хевисайда-Меллина:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{k=q} \frac{1}{(n_k - 1)!} \lim_{s \rightarrow s_k} \left[(s - s_k)^{n_k} L\{f(t)\} e^{st} \right]^{(n_k - 1)} = L^{-1}\{F(s)\}, \quad (4.2)$$

где $[\dots]^{(n_k - 1)} = \frac{d^{(n_k - 1)}}{ds^{(n_k - 1)}} [\dots]$; $(n_k - 1)$ – $(n_k - 1)$ -я производная выражения $[\dots]$ по

s ; s – переменная Лапласа; s_k , $k = \overline{1, n}$ – полюсы с номером k ;

$$L\{f(t)\} = \frac{G(s)}{D(s)} = \frac{g_0 s^m + g_1 s^{m-1} + \dots + g_m}{d_0 s^n + d_1 s^{n-1} + \dots + d_n} = \sum_{i=1}^m g_i s^{m-i} \bigg/ \sum_{j=1}^n d_j s^{n-j}.$$

Корни полинома $D(s)$ знаменателя изображения $L\{f(t)\}$ являются полюсами этого изображения; k – номер полюса; n – общее число полюсов; n_k – количество одинаковых полюсов с номером k ; q – число разных полюсов изображения.

Корни полиномов могут быть: нулевыми; вещественными (отрицательными, положительными); мнимыми (всегда парными, сопряженными) и комплексными сопряженными.

4.1. Основные теоремы преобразования Лапласа

1. Теорема линейности

$$f(t) = Af_1(t) + Bf_2(t) + Cf_3(t) + \dots = AF_1(s) + BF_2(s) + CF_3(s) + \dots \quad (4.3)$$

где A, B, C – постоянные; $F_1(s) = L\{f_1(t)\}$ и т.д.

3. Теорема масштабирования

$$f(\alpha t) = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right), \quad (4.4)$$

где α – коэффициент масштабирования аргумента t оригинала; α – вещественная константа.

4. Теорема о дифференцировании оригинала

$$f'(t) = sF(s) - f(0),$$

где $f(0)$ – начальное значение оригинала $f(t)$;

$$f''(t) = s^2 F(s) - sf(0) - f(0)',$$

$f(0)'$ – начальное значение первой производной оригинала;

.....

$$\begin{aligned} f^{(\nu)}(t) &= s^\nu F(s) - s^{\nu-1} f(0) - s^{\nu-2} f(0)' - \dots - sf(0)^{\nu-2} - f(0)^{\nu-1} = \\ &= s^\nu F(s) - \sum_{i=1}^{\nu} s^{\nu-i} F(0)^{(i-1)} \end{aligned} \quad (4.5)$$

где $f(0)^{(i-1)}$ начальное значение $(i-1)$ -й производной оригинала.

При $f(0)^{(i)} = 0, i = \overline{0, \nu-1}$, $f^{(\nu)}(t) = s^\nu F(s)$.

5. Теорема об интегрировании оригинала

$$\int_0^t f(\tau) d\tau = \frac{F(s)}{s}. \quad (4.6)$$

6. Теорема о смещении оригинала (по аргументу t)

$$f(t \pm \lambda) = F(s)e^{\pm \lambda s}, \quad (4.7)$$

где λ – вещественная постоянная (положительная или отрицательная).

7. Теорема о смещении изображения (по переменной Лапласа s)

$$F(s \pm a) = f(t)e^{\pm at}, \quad (4.8)$$

где a – комплексное число.

8. Теорема о свертке двух оригиналов

Если $x(t) = X(s)$ и $w(t) = W(s)$, то

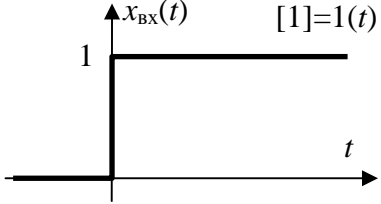
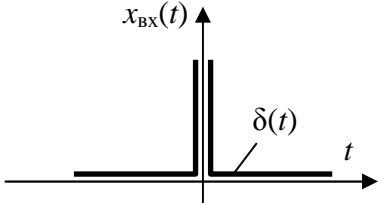
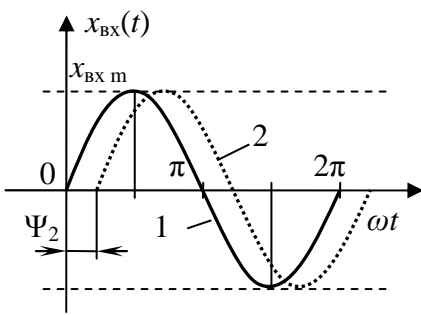
$$x(t) \otimes w(t) = \int_0^{\infty} x(\theta)w(t - \theta)d\theta = y(t) = X(s)W(s) \doteq Y(s), \quad (4.9)$$

где $x(t)$ – входное воздействие; $W(s)$ – передаточная функция; $y(t)$ – реакция системы на воздействие вида $x(t)$; $w(t)$ – импульсная переходная функция.

4.2. Типовые входные воздействия

Для удобства исследования динамики звеньев и систем используются стандартные (типовые) испытательные входные воздействия $x_{\text{вх}}(t)$. $x_{\text{вых}}(t)$ – реакция САУ на входной сигнал.

Рассмотрим пять основных входных воздействий.

1	Единичное ступенчатое воздействие (функция Хевисайда)		$1(t) = [1] = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$
2	Единичное импульсное воздействие (функция Дирака, дельта-функция)		$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases}$ $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$ Свойства: $d[1]/dt = \{1(t)\}' = \delta(t)$ $\int_0^{\infty} \delta(t)dt = [1]$
3	Синусоидальное воздействие		$x_{\text{вх}}(t) = x_{\text{вх}m} (\sin \omega t + \Psi)$ $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ $x_{\text{вх}1}(t) = x_{\text{вх}m1} (\sin \omega_1 t + 0)$ $x_{\text{вх}2}(t) = x_{\text{вх}m2} (\sin \omega_2 t + \Psi_2)$ $x_{\text{вх}m1} = x_{\text{вх}m2}; \quad \omega_1 = \omega_2.$
f – линейная частота (Гц); T – период (с); ω – угловая частота (рад/с);			

	Ψ – фаза (град); $x_{\text{BX m}}(t)$ – амплитуда сигнала. Из графика волновых функций видно, что $x_{\text{BX2}}(t)$ отстает по фазе от $x_{\text{BX1}}(t)$ на угол Ψ_2 .		
4	Возрастающее единичное экспоненциальное воздействие		$x_{\text{BX}}(t) = 1 - \exp(-t/T)$
	T – постоянная времени (постоянная экспоненты) – время, за которое экспонента достигнет max при изменении с постоянной скоростью, равной начальной в точке 0		
5	Убывающее единичное экспоненциальное воздействие		$x_{\text{BX}}(t) = \exp(-t/T)$
	Т.к. $x_{\text{BX}}(t = T) = \exp(-T/T) = \exp(-1) = 1/e = x_{\text{BX}}/e$, то T – время, за которое экспонента уменьшается в 2,718 раз		

4.3. Типовые выходные воздействия (реакции)

1. Реакция системы на единичное ступенчатое воздействие называется *переходной функцией* и обозначается $h(t)$.
2. Реакция системы на единичное импульсное воздействие $\delta(t)$ называется *импульсной переходной функцией* (функцией веса, весовой функцией) и обозначается $w(t)$.

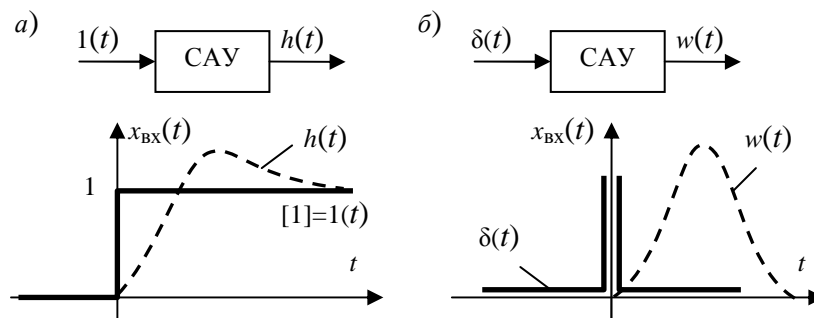


Рис. 4.2. Выходные характеристики:
 а – переходная характеристика; б – функция веса

Временные выходные характеристики зависят от типа САУ. Они изучаются во временном анализе. Временной анализ изучает динамику звеньев и систем, т.е. изменение их реакций во времени.

5. Дифференциальное уравнение динамики звеньев

Общий вид ДУД в классической форме записи в пространстве оригиналов:

$$\begin{aligned} d_0 \frac{d^{(n)} x_{\text{вых}}(t)}{dt^{(n)}} + d_1 \frac{d^{(n-1)} x_{\text{вых}}(t)}{dt^{(n-1)}} + \dots + d_{n-1} \frac{dx_{\text{вых}}(t)}{dt} + d_n x_{\text{вых}}(t) = \\ g_0 \frac{d^{(m)} x_{\text{вх}}(t)}{dt^{(m)}} + g_1 \frac{d^{(m-1)} x_{\text{вх}}(t)}{dt^{(m-1)}} + \dots + g_{m-1} \frac{dx_{\text{вх}}(t)}{dt} + g_m x_{\text{вх}}(t) \end{aligned} \quad (5.1)$$

В левой части уравнения записываются выходной сигнал и его производные до n -го порядка включительно, справа – входной сигнал и его производные до m -го порядка.

В свернутой форме ДУД имеет вид:

$$\sum_{j=0}^n d_j \frac{d^{(n-j)} x_{\text{вых}}(t)}{dt^{(n-j)}} = \sum_{i=0}^m g_i \frac{d^{(m-i)} x_{\text{вх}}(t)}{dt^{(m-i)}}, \quad (5.2)$$

где d_j и g_i – постоянные коэффициенты полиномов выходного и входного воздействий. Коэффициенты d_j и g_i являются функциями реальных параметров всех составляющих систему звеньев. Этими параметрами могут быть, например, коэффициенты передачи отдельных звеньев, их постоянные времени, запаздывания и так далее. Здесь j и i – номер слагаемых соответственно полиномов выходного и входного воздействий; $j = \overline{0, n}$, $i = \overline{0, m}$, n – порядок (степень) системы, определяющий ее сложность.

При $m \leq n$ система с подобным ДУД может быть технически реализована. Другими словами, в такой системе выходной сигнал всегда отстает по фазе от входного воздействия (условие технической реализуемости).

ДУД в операторной форме имеет такую запись:

$$\begin{aligned} d_0 p^n x_{\text{вых}}(t) + d_1 p^{n-1} x_{\text{вых}}(t) + \dots + d_{n-1} p x_{\text{вых}}(t) + d_n x_{\text{вых}}(t) = \\ = g_0 p^m x_{\text{вх}}(t) + g_1 p^{m-1} x_{\text{вх}}(t) + \dots + g_{m-1} p x_{\text{вх}}(t) + g_m x_{\text{вх}}(t) \end{aligned}, \quad (5.3)$$

где $p = d/dt$ – оператор дифференцирования (оператор Лапласа).

При нулевых начальных условиях (т.е. при $p^{n-j}x_{\text{вх}}(t)=0; j=\overline{0,n}$, и при $p^{m-i}x_{\text{вх}}(t)=0; i=\overline{0,m}$) ДУД в пространстве изображений:

$$\begin{aligned} (d_0s^n + d_1s^{n-1} + \dots + d_{n-1}s + d_n)x_{\text{вх}}(s) = \\ = (g_0s^m + g_1s^{m-1} + \dots + g_{m-1}s + g_m)x_{\text{вх}}(s), \end{aligned} \quad (5.4)$$

или с помощью рядов:

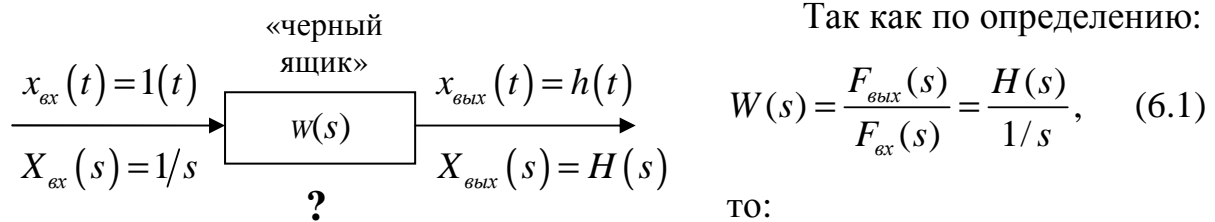
$$\left(\sum_{j=0}^n d_j s^{n-j} \right) x_{\text{вх}} = \left(\sum_{i=0}^m g_i s^{m-i} \right) x_{\text{вх}}(s), \quad (5.5)$$

где s – переменная Лапласа; $\left(\sum_{j=0}^n d_j s^{n-j} \right) = D(s^n)$ – характеристический полином системы в виде изображения; $\left(\sum_{i=0}^m g_i s^{m-i} \right) = G(s^m)$ – полином при входном воздействии.

6. Связь между передаточной функцией и временными выходными характеристиками

Установим связь между ПФ $W(s)$ звена (системы) и типовыми выходными характеристиками – переходной $h(t)$ и весовой $w(t)$ (импульсной переходной) функциями.

Задача 1.



$$W(s) = sH(s), \quad (6.2)$$

значит:

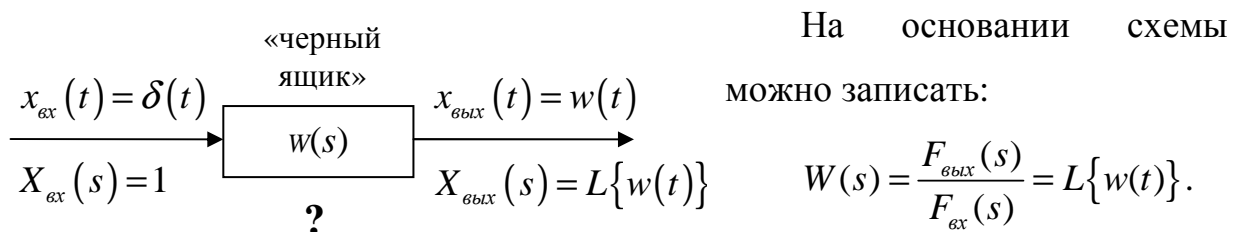
$$W(s) = s \int_0^{\infty} h(t) \exp(-st) dt. \quad (6.3)$$

Отсюда, зная переходную функцию в аналитической форме, можно определить структуру звена (системы) в виде ПФ $W(s) = f_1(s) = f_1\{h(t)\}$ (в кибернетике такая задача именуется задачей «выбеливания» *черного ящика*).

Обратно, при известной ПФ задача определения $h(t)$ решается с помощью обратного преобразования Лапласа (например, с использованием формулы Хевисайда-Меллина):

$$h(t) = L^{-1}\{H(s)\} = L^{-1}\{W(s)s^{-1}\}. \quad (6.4)$$

Задача 2.



Поэтому искомая связь $W(s) = f_2(s) = f_2\{w(t)\}$ запишется так:

$$W(s) = \int_0^{\infty} w(t) \exp(-st) dt, \quad (6.5)$$

откуда видно, что ПФ является изображением (лапласианом) весовой (импульсной переходной) функции.

Иными словами, $W(s) = L\{w(t)\}$, т.е. $W(s)$.

Задача определения импульсной переходной функции $w(t)$ при известной ПФ $W(s)$ решается просто:

$$w(t) = L^{-1}\{w(t)\} = L\{\delta(t)\}W(s) = W(s), \quad (6.6)$$

откуда любыми методами обратного преобразования определяется искомая функция.

7. Передаточные функции и частотные характеристики

Прохождение (передача) сигнала через линейную динамическую систему (ЛДС) характеризуется *передаточными функциями (ПФ)*:

временной ПФ:

$$W(t) = \frac{x_{\text{вых}}(t)}{x_{\text{вх}}(t)}; \quad (7.1)$$

передаточной функцией (ПФ):

$$W(s) = \frac{x_{\text{вых}}(s)}{x_{\text{вх}}(s)} = \frac{G(s)}{D(s)} = \frac{G(s^m)}{D(s^n)}; \quad (7.2)$$

частотной передаточной функцией (ЧПФ):

$$W(j\omega) = \frac{x_{\text{вых}}(j\omega)}{x_{\text{вх}}(j\omega)} = \frac{G(j\omega)}{D(j\omega)}, \quad (7.3)$$

где $s = j\omega$, $j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица; ω – частота сигнала, проходящего через звено ЛДС; следует учитывать, что при прохождении сигнала через линейную систему частота сигнала не меняется, т.е. $\omega = idem$.

ЧПФ иначе именуется комплексным коэффициентом передачи или амплитудно-фазовой характеристикой (АФХ) или амплитудно-фазо-частотной характеристикой (АФЧХ) (рис. 7.1).

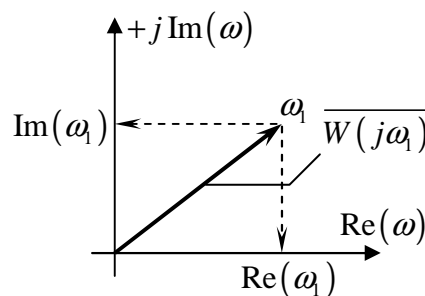


Рис. 7.1. Вектор ЧПФ при $\omega = \omega_1$

Здесь вектор на комплексной плоскости определяет частотную ПФ при частоте, равной ω_1 :

$$W(j\omega = j\omega_1) = W(j\omega_1) = Re(\omega_1) + jIm(\omega_1), \quad (7.4)$$

где $Re(\omega_1)$ – вещественная составляющая ЧПФ при $\omega=\omega_1$; $Im(\omega_1)$ – мнимая составляющая ЧПФ при $\omega=\omega_1$.

Кривая, соединяющая концы векторов ЧПФ, изображенных на комплексной плоскости при $\omega=\omega_1$, где $\omega=\omega_1 = \text{var} = 0 \dots \infty$, называется *годографом ЧПФ* (годографом системы):

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= Re(\omega) + j Im(\omega) = A(\omega) e^{j\Psi(\omega)} = \\ &= \left[\sqrt{Re^2(\omega) + Im^2(\omega)} \right] \cdot \exp \left(j \cdot \arctg \left(\frac{Im(\omega)}{Re(\omega)} \right) \right), \end{aligned} \quad (7.5)$$

где $A(\omega)$ – АЧХ системы; $\Psi(\omega)$ – ФЧХ системы.

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) системы определяет ее усилительные свойства. Физически $A(\omega_1)$ равна отношению амплитуды выходного синусоидального сигнала $x_{\text{вых.m}}$ к амплитуде входного синусоидального сигнала на определенной частоте ω_1 :

$$A(\omega_1) = \frac{x_{\text{вых.m}}(\omega_1)}{x_{\text{вх.m}}(\omega_1)}. \quad (7.6)$$

Фазо-частотная характеристика $\Psi(\omega)$ (ФЧХ) системы определяет ее инерционные свойства. Физически $\Psi(\omega_1)$ равна разности начальных фаз выходного и входного синусоидальных сигналов на частоте ω_1 :

$$\Psi(\omega_1) = \Psi_{0\text{вых}}(\omega_1) - \Psi_{0\text{вх}}(\omega_1). \quad (7.7)$$

Проиллюстрируем усиление и инерционность системы, выраженные посредством АЧХ и ФЧХ (рис. 7.2).

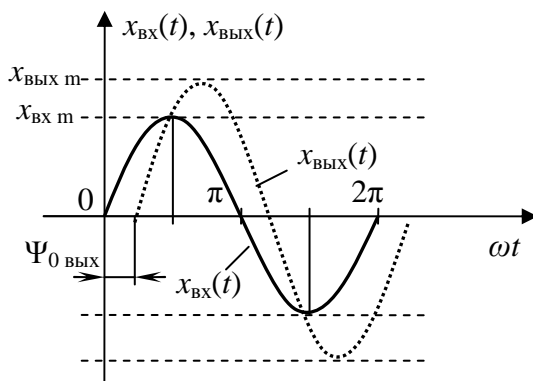


Рис. 7.2.

$$x_{\text{вх}}(t) = x_{\text{вх.m}} \sin(\omega t - \Psi_{0\text{вх}})$$

$$x_{\text{вых}}(t) = x_{\text{вых.m}} \sin(\omega t - \Psi_{0\text{вых}})$$

Далее рассмотрим частотные характеристики (ЧХ) подробнее.

7.1. Частотные характеристики

Частотная передаточная функция (ЧПФ/АФХ)

ЧПФ (рис. 7.3) – $W(j\omega)$ – является параметрической комплексной функцией, т.к.

$$W(j\omega) = \text{Re}(\omega) + j \text{Im}(\omega)$$

где: ω – угловая частота сигнала, параметр годографа (рад/с, с^{-1}); $\text{Re}(\omega)$ и $\text{Im}(\omega)$ – частотные функции, проекции вектора ЧПФ на вещественную и мнимую оси соответственно.

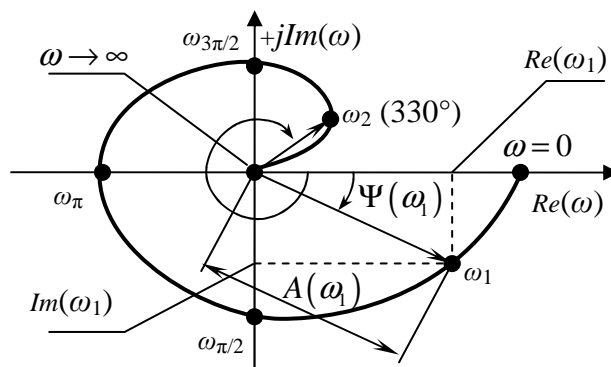


Рис. 7.3. График ЧПФ

На годографе показаны:

- 1) Амплитуда (относительная) выходного сигнала $A(\omega_1)$ при частоте $\omega_1 > 0$;

$$A(\omega_1) = \text{mod}[W(j\omega)] = \sqrt{\text{Re}^2(\omega_1) + \text{Im}^2(\omega_1)}.$$

- 2) Фаза (как разность начальных фаз выходного и входного сигналов) выходного сигнала $\Psi(\omega_1)$ при частоте ω_1 ;

$$\Psi(\omega_1) = \arg[W(j\omega_1)] = \text{arctg}(\text{Im}(\omega_1)/\text{Re}(\omega_1)).$$

- 3) $\text{Re}(\omega_1)$ – вещественная составляющая ЧПФ на частоте ω_1 ;

- 4) $\text{Im}(\omega_1)$ – мнимая составляющая ЧПФ на частоте ω_1 ;

- 5) Характерные частоты:

- ω_1 – некоторая текущая частота $\omega > 0$;
- $\omega_{\pi/2}$ – частота сигнала, на которой выходной сигнал *отстает* от входного на угол $\pi/2$, т.е. $\Psi(\omega_{\pi/2}) = -90^\circ$;

- ω_π и $\omega_{3\pi/2}$ – то же, но углы сдвига $x_{\text{вых}}(t)$ относительно $x_{\text{вх}}(t)$ в сторону отставания составляют соответственно -180° и -270° (здесь знак «–» указывает на отставание $x_{\text{вых}}(t)$ от $x_{\text{вх}}(t)$);
- ω_2 – частота сигнала, при которой в диапазоне $\Delta\omega = \omega_{3\pi/2} \dots \infty$ вещественная ЧПФ (ВЧПФ) $\text{Re}(\omega = \omega_2) = \max$.

ЧПФ является основной и всеобъемлющей ЧХ системы. Она характеризует одновременно и усилительные, и инерционные свойства САУ. Как уже было сказано, усилительные свойства – это изменение амплитуды выходного сигнала по сравнению с амплитудой входного:

$$\frac{x_{\text{вых}m}}{x_{\text{вх}m}} = A(\omega).$$

Инерционные свойства – это изменение сдвига фаз выходного сигнала относительно входного, а именно $\Psi(\omega) = \Psi_{0\text{вых}} - \Psi_{0\text{вх}}$.

ЧПФ не является функцией ω , а является совокупностью 2-х функций одного и того же аргумента ω , т.е. либо совокупностью $\text{Re}(\omega)$ и $\text{Im}(\omega)$, либо $A(\omega)$ и $\Psi(\omega)$.

Вещественная ЧПФ (ВЧПФ)

ВЧПФ (рис. 7.4) – $\text{Re}(\omega)$ – является функцией частоты ω . Характер ее изменения легко усматривается из формы годографа ЧПФ.

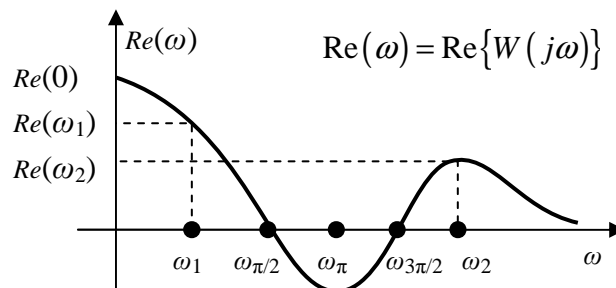


Рис. 7.4. График ВЧПФ

Мнимая ЧПФ (МЧПФ)

МЧПФ (рис. 7.5) – $\text{Im}(\omega)$ – также функция частоты ω .

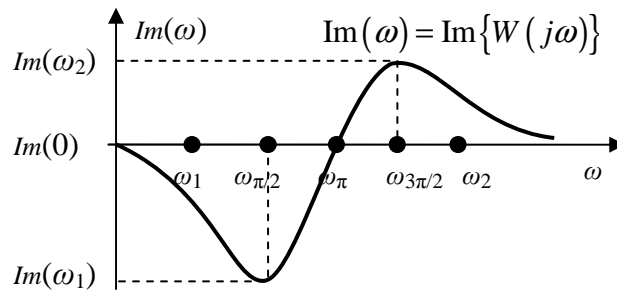


Рис. 7.5. График МЧПФ

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ)

АЧХ (рис. 7.6) – $A(\omega)$ – частотная функция, характеризующая усиленные свойства системы.

$$A(\omega) = \text{mod}[W(j\omega)] = \sqrt{\text{Re}^2(\omega) + \text{Im}^2(\omega)}, \quad A(\omega) \geq 0.$$

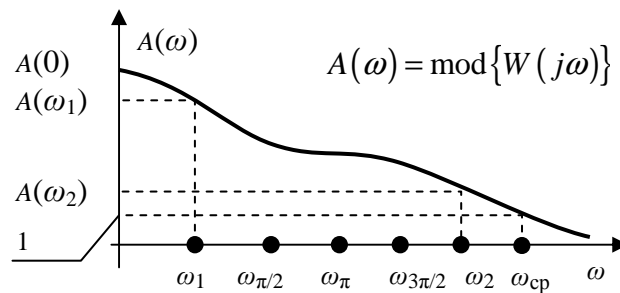


Рис. 7.6. График АЧХ

Фазо-частотная характеристика (ФЧХ)

ФЧХ (рис. 7.7) – $\Psi(\omega)$ – частотная функция, характеризует инерционные свойства системы.

$$\Psi(\omega) = \arg[W(j\omega)] = \arctg(\text{Im}(\omega)/\text{Re}(\omega)) + k\pi; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

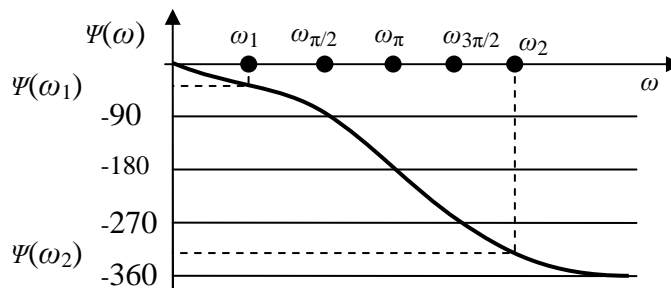


Рис. 7.7. График ФЧХ

Логарифмическая АЧХ (ЛАЧХ)

ЛАЧХ (рис. 7.8) – $L(\omega)$ – частотная функция; также как и АЧХ характеризует усилительные свойства.

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega).$$

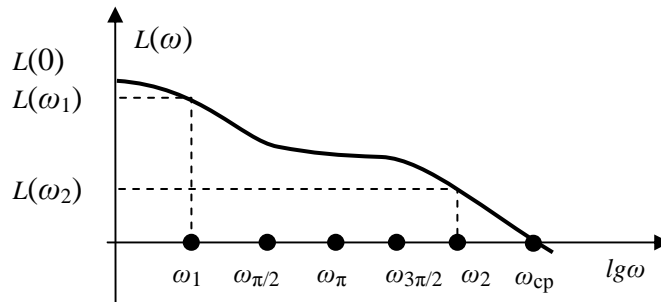


Рис. 7.8. График ЛАЧХ

Здесь $\omega_{ср}$, – *частота среза*, т.е. частота, на которой $L(\omega)=0$, т.е. $A(\omega_{ср})=1,0$.

Единица измерения ЛАЧХ (т.е. уровня сигнала) – децибел (дБ). Поскольку: $1дБ = 20 \lg A(\omega)$, то:

$$\lg A(\omega) = \lg \frac{x_{вх\ m}}{x_{вх\ m}} = \frac{1}{20}; \quad x_{вх\ m} = \left(\sqrt[20]{10} \right) x_{вх\ m} \cong 1,12 x_{вх\ m}.$$

Другими словами, 1дБ соответствует *изменению сигнала* (увеличению или уменьшению) в 1,12 раза; 20дБ – в 10 раз; 40дБ – в 100 раз; 60дБ – в 10^3 и так далее.

Следует заметить, что ось $L(\omega)$ – нефиксированная; для практических расчетов эта ось располагается всегда левее минимальной рассматриваемой в решаемой задаче частоты.

7.2. Типовые логарифмические характеристики

Рассмотрим четыре типовые АЧХ:

1. $A_1(\omega)=k_1$
2. $A_2(\omega)=k_2/\omega$

3. $A_3(\omega) = k_3 / \omega^2$

4. $A_4(\omega) = k_4 \omega$

где k_1, \dots, k_4 – коэффициент передачи системы; характеризует усиление выходного сигнала при подаче на вход САУ ступенчатого сигнала при $t \rightarrow \infty$.

- Для АЧХ $A_1(\omega)$ усиление инвариантно (не меняется) относительно частоты ω и всегда равно k_1 .
- Для АЧХ $A_2(\omega)$ усиление синусоидального сигнала с ростом ω падает по гиперболе.
- Для АЧХ $A_3(\omega)$ усиление падает по гиперболе второго порядка.
- Для АЧХ $A_4(\omega)$ усиление возрастает линейно.

Построим соответствующие ЛАЧХ систем (рис. 7.9).

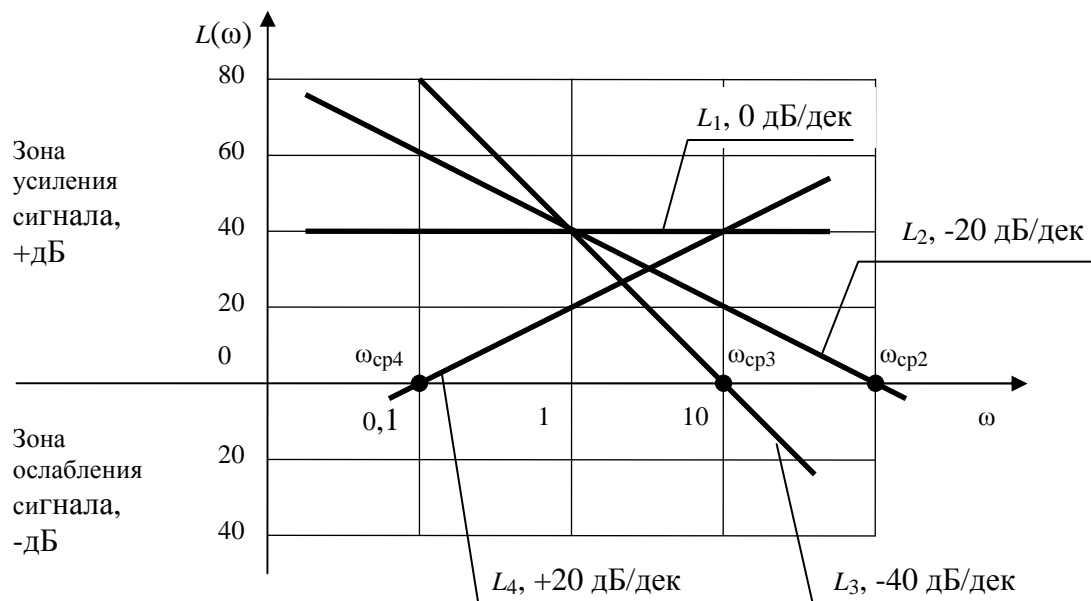


Рис. 7.9. Типовые логарифмические характеристики

1) $A_1(\omega) = k_1$

$L_1(\omega) = 20 \lg A_1(\omega) = 20 \lg k_1$; пусть $k_1 = 100$, тогда $L_1(\omega) = f_1(\omega)$;

$L_1(\omega) = 20 \lg 100 = 40 \text{ дБ}.$

2) $A_2(\omega) = \frac{k_2}{\omega}$, где $k_2 = 100$

$$L_2(\omega) = 20\lg A_2(\omega) = 20\lg \frac{k_2}{\omega} = 20\lg k_2 - 20\lg \omega.$$

Отсюда видно, что ЛАЧХ представляет собой прямую, падающую при увеличении ω , причем коэффициент наклона прямой составляет -20дБ на диапазоне частот в 1 декаду (единичный отрицательный наклон ЛАЧХ). Декада представляет собой диапазон частот ω , границы которого отличаются в 10 раз. Построим ЛАЧХ $L_2(\omega)$ по двум точкам: при $\omega=0,1 \text{ с}^{-1}$ и $\omega=1,0 \text{ с}^{-1}$; $k_2=100 \text{ о.е.}$

$$L_2(\omega) = L_2(\omega = 0,1) = 20\lg k_2 - 20\lg 0,1 = 40 + 20 = 60 \text{ дБ.}$$

$$L_2(\omega = 1) = 40 \text{ дБ.}$$

Наклон ЛАЧХ равен -20 дБ/дек. Определим частоту среза ω_{cp2} :

$$L_2(\omega) = 0 = 20\lg k_2 - 20\lg \omega, \Rightarrow \omega_{cp2} = k_2 = 100 \text{ рад/с.}$$

$$3) A_3(\omega) = \frac{k_3}{\omega^2}$$

$$L_3(\omega) = 20\lg k_3 - 20\lg \omega^2 = 20\lg k_3 - 40\lg \omega.$$

Видно, что ЛАЧХ – прямая с наклоном -40дБ/дек (двойной отрицательный наклон). Построим ее по двум точкам.

$$L_3(\omega = 0,1) = 80 \text{ дБ}; L_3(\omega = 1) = 40 \text{ дБ.}$$

Наклон равен -40 дБ/дек. Найдем частоту среза ω_{cp3} :

$$L_3(\omega) = 0 = 20\lg k_3 - 20\lg \omega^2.$$

$$\omega_{cp3}^2 = k_3; \quad \omega_{cp3} = \sqrt{k_3} = 10 \text{ рад/с.}$$

$$4) A_4(\omega) = k_4 \omega.$$

$$L_4(\omega) = 20\lg k_4 + 20\lg \omega.$$

ЛАЧХ – прямая с наклоном +20дБ/дек (положительный единичный наклон).

$$k_4 = 10; L_4(\omega = 0,1) = 0 \text{ дБ}; L_4(\omega = 1) = 20 \text{ дБ}; \omega_{cp4} = k_4^{-1} = 0,1 \text{ рад/с.}$$

8. Звенья автоматики

Динамические звенья могут быть разделены на четыре группы:

- 1) Позиционные звенья.
- 2) Дифференцирующие звенья.
- 3) Интегрирующие звенья.
- 4) Специальные звенья.

Первая группа объединяет звенья, у которых между входным воздействием и выходной координатой существует *функциональная связь*. В этих звеньях после окончания переходного процесса, вызванного действием на звено ступенчатого сигнала, выходная координата становится равной постоянному значению.

У звеньев второй и третьей группы отсутствует такая связь, и выходная координата связана с входной либо интегральной зависимостью, либо через производные.

К звеньям четвертой группы можно отнести те, передаточные функции которых имеют вид трансцендентных функций (экспоненциальных, логарифмических, специальных и прочих).

Выделим звенья, имеющие первоочередное значение в курсе ТАУ.

Позиционные звенья

1. Идеальное статическое звено (иначе – инерционное звено нулевого порядка; безынерционное звено; идеальное усилительное звено; П-звено).
2. Апериодическое звено первого порядка (инерционное звено первого порядка; реальное усилительное звено; реальное статическое звено; минимально-фазовое звено первого порядка).
3. Апериодическое звено второго порядка.
4. Колебательное звено.

Дифференцирующие звенья

1. Идеальное дифференцирующее звено.
2. Реальное дифференцирующее звено.

Интегрирующие звенья

1. Идеальное интегрирующее звено.
2. Реальное интегрирующее звено.
3. Идеальный изодром (идеальное ПИ-звено).
4. Реальный изодром.
5. Идеальное пропорционально-интегро-дифференцирующее звено (ПИД-звено).
6. Реальное ПИД-звено.

Специальные звенья

1. Звено чистого (транспортного) запаздывания.
2. Инерционное звено 1-го порядка с чистым запаздыванием.
3. Идеальный интегратор с чистым запаздыванием.

8.1. Алгоритм анализа функционирования динамических звеньев

1. Записывается дифференциальное уравнение динамики звена – в виде оригинала или изображения.
2. По ДУД записывается ПФ звена.
3. Временной анализ (ВА):

Расчет переходной характеристики $h(t)$

Расчет весовой функции $w(t)$

Определение реакции звена на задающее входное воздействие произвольной формы (при расчетах ВХ используется формула

Хевисайда или другие выражения обратного преобразования Лапласа).

4. Частотный анализ:

Определение частотной передаточной функции (комплексного коэффициента передачи; амплитудно-фазовой характеристики), $W(j\omega)$

Расчет вещественной ЧПФ, $\text{Re}(\omega)$

Расчет мнимой ЧПФ, $\text{Im}(\omega)$

Расчет АЧХ, $A(\omega)$

Расчет ФЧХ, $\Psi(\omega)$

Определение логарифмической АЧХ, $L(\omega)$.

8.2. Инерционное звено нулевого порядка

1. ДУД звена: $x_{\text{вых}}(t) = kx_{\text{вх}}(t)$, где k – коэффициент передачи звена.

2. ПФ: $W(s) = \frac{L\{x_{\text{вых}}(t)\}}{L\{x_{\text{вх}}(t)\}} = k$.

3. Временной анализ:

$$3.1. h(t) = H(s) = W(s)L\{[1(t)]\} = k \frac{1}{s} = k[1(t)]$$

$$3.2. w(t) = W(s)k = k\delta(t).$$

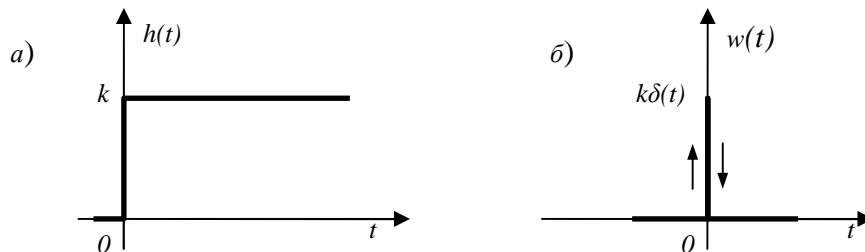


Рис. 8.1. Временные характеристики безынерционного звена:
а – переходная характеристика; б – весовая функция

4. Частотный анализ:

$$4.1. W(j\omega) = \text{Re}(\omega) + j\text{Im}(\omega) = k \neq f(\omega)$$

$$4.2. \operatorname{Re}(\omega) = k$$

$$4.3. \operatorname{Im}(\omega) = 0$$

$$4.4. A(\omega) = \sqrt{\operatorname{Re}^2(\omega) + \operatorname{Im}^2(\omega)} = k$$

$$4.5. \Psi(\omega) = \arctg\left(\frac{\operatorname{Im}(\omega)}{\operatorname{Re}(\omega)}\right) = \arctg 0 = 0$$

$$4.6.. L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k$$

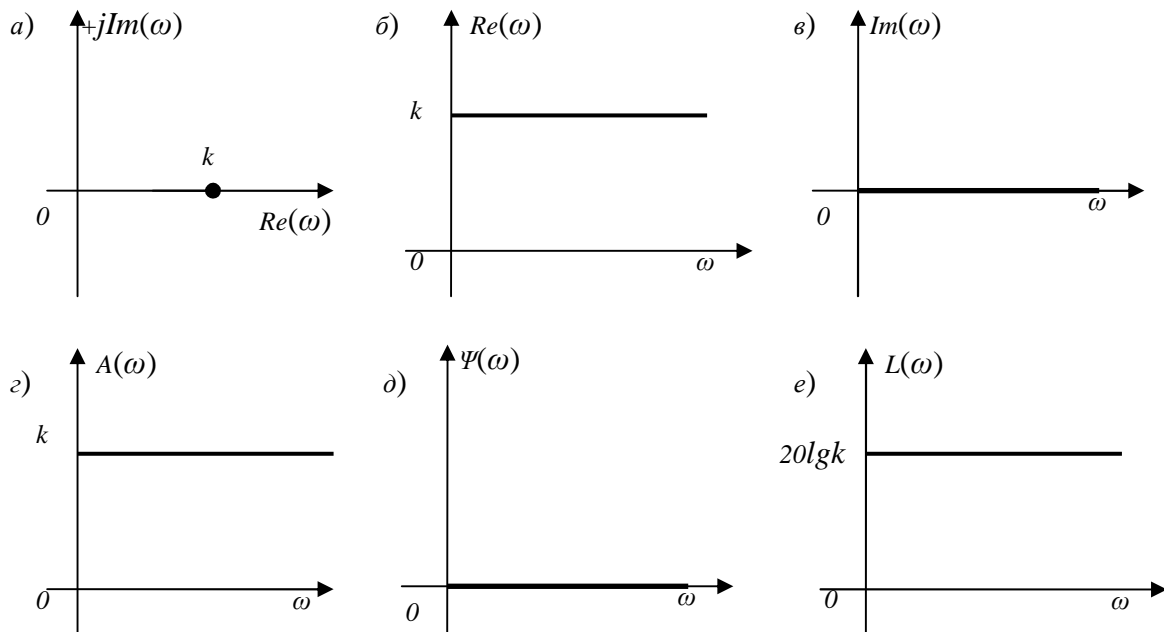


Рис. 8.2. Частотные характеристики безынерционного звена:
 а – АФХ; б – ВЧПФ; в – МЧПФ; г – АЧХ; д – ФЧХ; е – ЛАЧХ

8.3. Аperiodическое звено первого порядка

1. $T(dx_{\text{блх}}(t)/dt) + x_{\text{блх}}(t) = kx_{\text{вх}}(t)$ – ДУД в классической форме;
 $(Ts + 1)x_{\text{блх}}(s) = kx_{\text{вх}}(s)$ – ДУД в изображениях при нулевых начальных условиях по $x_{\text{вх}}(t)$ и $x_{\text{блх}}(t)$.
2. $W(s) = \frac{k}{Ts + 1}$, где T и k – постоянная времени и коэффициент передачи соответственно.
3. Временной анализ:

$$3.1. H(s) = \frac{k}{s(Ts + 1)} = \frac{k}{sT(s + 1/T)}$$

$$h(t) \doteq \lim_{s_1 \rightarrow 0} \left[\frac{(s - 0)ke^{st}}{sT(s + 1/T)} \right]^{(0)} + \lim_{s_2 \rightarrow -1/T} \left[\frac{(s + 1/T)ke^{st}}{sT(s + 1/T)} \right]^{(0)} = k(1 - e^{-t/T}).$$

$$3.2. w(t) = h'(t) = \frac{k}{T} \cdot e^{-t/T}.$$

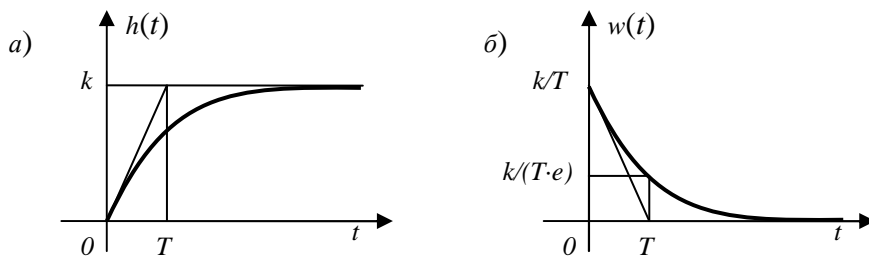


Рис. 8.3. Временные характеристики инерционного звена:
а – переходная характеристика; б – весовая функция

4. Частотный анализ:

$$4.1. W(j\omega) = \frac{k}{j\omega T + 1} = \frac{k(1 - j\omega T)}{1 + \omega^2 T^2}.$$

АФХ при изменении частоты в интервале $\omega=0 \dots \infty$ представляет собой полуокружность с центром в точке $(k/2; 0)$ и радиусом, равным $k/2$ (рис. 8.4, а).

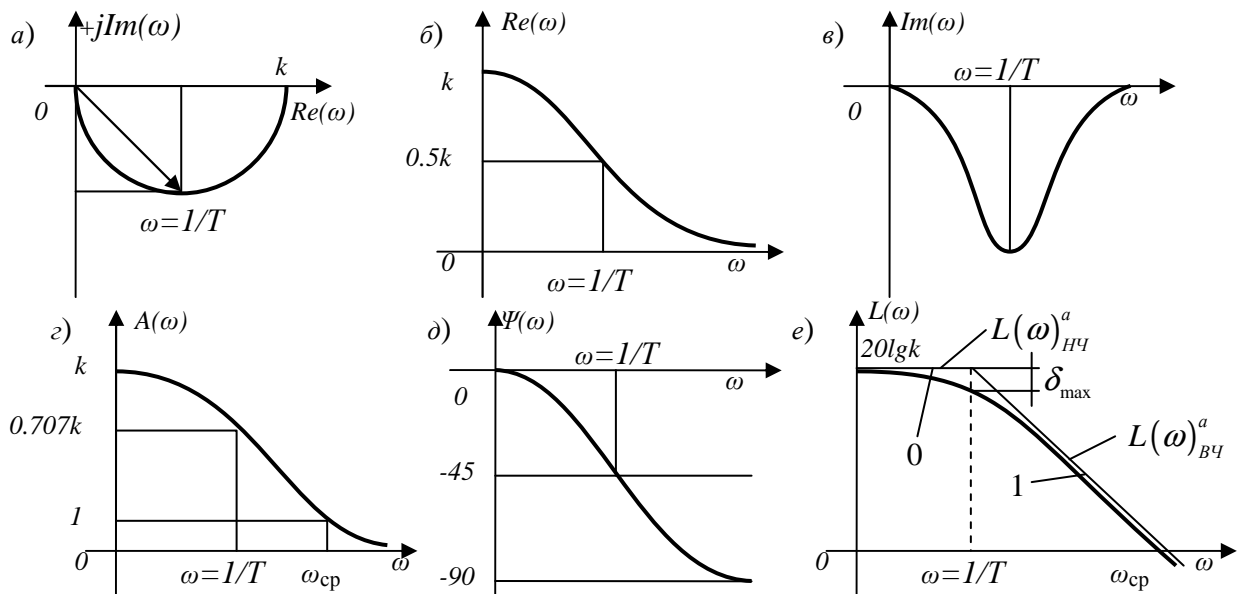


Рис. 8.4. Частотные характеристики инерционного звена:
а – АФХ; б – ВЧПФ; в – МЧПФ; г – АЧХ; д – ФЧХ; е – ЛАЧХ

$$4.2. \operatorname{Re}(\omega) = \frac{k}{1 + \omega^2 T^2}.$$

$$4.3. \operatorname{Im}(\omega) = \frac{-k\omega T}{1 + \omega^2 T^2}.$$

$$4.4. A(\omega) = \sqrt{\operatorname{Re}^2(\omega) + \operatorname{Im}^2(\omega)} = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}.$$

$$4.5. \Psi(\omega) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{Im}(\omega)}{\operatorname{Re}(\omega)}\right) = \operatorname{arctg}(-\omega T).$$

$$4.6. L(\omega) = 20\lg\left(\frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}\right) = 20\lg k - 10\lg(1 + \omega^2 T^2).$$

Найдем приближенные характеристики в виде двух линейных аппроксимант, построенных в зонах низких (НЧ) и высоких (ВЧ) частот:

1) в зоне НЧ: $0 \leq \omega < \frac{1}{T} = \omega_c$ – частота сопряжения; тогда $\omega T < 1$; $\omega^2 T^2 \ll 1$,

следовательно $L(\omega)_{НЧ}^a \cong 20\lg k$.

2) в зоне ВЧ: $\frac{1}{T} < \omega \leq \infty$; $\omega^2 T^2 \gg 1 \cong 0$, тогда: $L(\omega)_{ВЧ}^a \cong 20\lg \frac{k}{T} - 20\lg \omega$.

Частота среза $\omega_{ср}$ для аппроксиманты $L(\omega)_{ВЧ}^a$ равна $\frac{k}{T}$.

Здесь 0 и 1 – наклоны аппроксимант, соответствующие 0 дБ/дек и -20 дБ/дек; δ_{max} – максимальное значение ошибки аппроксимации ЛАЧХ. Найдем δ_{max} как разность между аппроксимантой ЛАЧХ в зоне НЧ и реальной точной ЛАЧХ на частоте сигнала $\omega = \omega_c = 1/T$.

$$\delta_{max} = 20\lg k - 20\lg k + 20\lg \sqrt{1 + \omega_c^2 T^2} = 20\lg \sqrt{2} \cong 3 \text{ дБ}.$$

8.4. Звенья второго порядка

Динамику звеньев апериодического 2-го порядка и колебательного рассмотрим на единой математической основе.

Поведение обоих звеньев описывается неоднородным дифференциальным уравнением 2-го порядка в операторной форме:

$$(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1)x_{\text{вых}}(t) = kx_{\text{вх}}(t),$$

где $p = \frac{d}{dt}$ – оператор Лапласа; T_1 и T_2 – постоянные времени; имеющие особый физический смысл для того и другого звена; k – коэффициент передачи; k, T_1, T_2 – параметры звеньев.

ДУД можно записать в иной форме:

$$(T_3 p + 1)(T_4 p + 1)x_{\text{вых}}(t) = kx_{\text{вх}}(t),$$

откуда, раскрывая скобки, можно видеть, что:

$$T_2^2 = T_3 T_4; T_1 = T_3 + T_4.$$

Корни характеристического полинома $D(p)$:

$$p_{1,2} = \frac{-T_1 \pm \sqrt{T_1^2 - 4T_2^2}}{2T_2^2}.$$

Разница между звеньями устанавливается на основании так называемого относительного коэффициента демпфирования $\xi = \frac{T_1}{2T_2}$, равного отношению постоянных времени. При этом, если $\xi \geq 1$, т.е. при $T_1 \geq 2T_2$, то данное ДУД описывает *апериодическое звено 2-го порядка*; если $\xi < 1$ ($T_1 < 2T_2$), то уравнение описывает *колебательное звено*.

При нулевых начальных условиях ПФ звеньев следующая:

$$W(s) = \frac{k}{T_2^2 s^2 + T_1 s + 1} \text{ или иначе: } W(s) = \frac{k}{(T_3 s + 1)(T_4 s + 1)}.$$

Полюсы ПФ (корни знаменателя ПФ – полинома $D(S)$) равны:

- для апериодического звена:

$$s_{1,2} = \frac{-T_1 \pm \sqrt{T_1 - 4T_2^2}}{2T_2^2} = f_1(T_1, T_2) = \frac{-(T_3 + T_4) \pm \sqrt{(T_3 + T_4)^2 - 4T_3T_4}}{2T_3T_4} = -\frac{1}{T_{3,4}} = f_2(T_3; T_4),$$

где $T_3 > T_4$ (индексация постоянных устанавливается экспериментально).

- для колебательного звена:

$$s_{1,2} = \frac{-T_1 \pm \sqrt{T_1 - 4T_2^2}}{2T_2^2} = \begin{cases} \frac{-2\xi T \pm \sqrt{4\xi^2 T^2 - 4T_2^2}}{2T^2} \\ T = T_2 \quad T_1 = 2\xi T \end{cases} = \frac{-\xi}{T} \pm j \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} = -\xi q \pm jq\sqrt{1-\xi^2} = -\alpha \pm j\omega,$$

где $q = \frac{1}{T}$ – частота собственных колебаний

(колебаний, которые возникают на выходе звена при отсутствии демпфирования, т.е. в режиме отсутствия условий для гашения колебаний); T – период собственных колебаний; α – параметр затухания колебаний; $\alpha = \xi \cdot q$, с^{-1} ; ω – частота колебаний, развивающихся в звене (точнее, на его выходе) при наличии демпфирования; $m = \frac{\alpha}{\omega}$, где m – декремент затухания.

Таким образом, демпфирование (гашение) колебаний можно охарактеризовать параметрами ξ , α и m . Из них ξ и m – безразмерные, а α имеет размерность частоты.

Информация о полюсах апериодического (АП-2) и колебательного (КЗ) звеньев позволяет рассчитать временные выходные характеристики $h(t)$ и $w(t)$. Так, для АП-2 по формуле Хевисайда имеем:

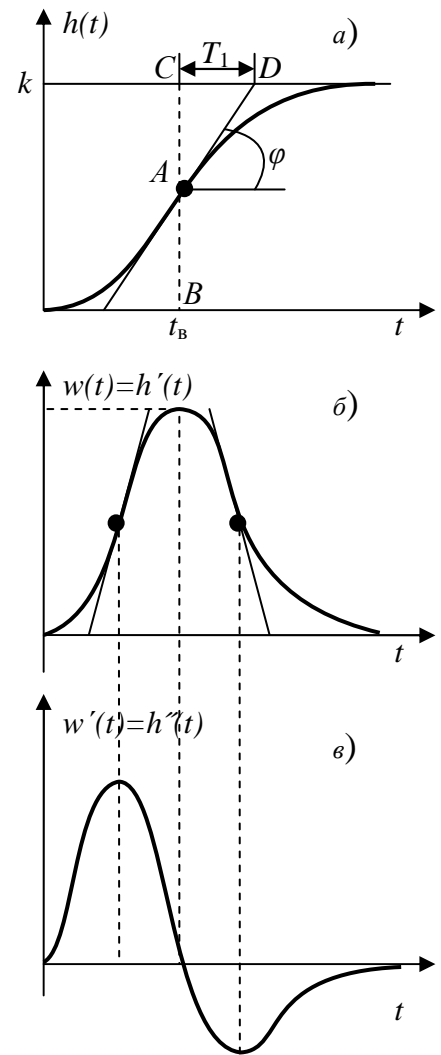


Рис. 8.5. Временные характеристики звена АП-2:
а – переходная характеристика;
б – функция веса;
в – производная функции веса

$$h(t) = H(s) = \frac{k}{T_3 T_4 s \left(s + \frac{1}{T_3} \right) \left(s + \frac{1}{T_4} \right)} = \sum_{k=1}^{q=3} \frac{1}{(n_k - 1)!} \lim_{s \rightarrow s_k} \left[(s - s_k)^{n_k} H(s) e^{st} \right]^{(n_{k-1})} =$$

$$= k \left[1 - \frac{T_3}{T_3 - T_4} \exp(-t/T_3) + \frac{T_4}{T_3 - T_4} \exp(-t/T_4) \right].$$

Анализ уравнения переходной характеристики показывает, что последняя описывает монотонно изменяющийся во времени процесс выходной координаты, стремящийся к новому устойчивому состоянию, которое достигается в новом установившемся режиме (рис. 8.5, а).

Координату t_B точки перегиба A переходной функции $h(t)$ определим из условия анализа функции на наличие экстремума:

$$h''(t) = w'(t) = 0,$$

т.е. в явном виде имеем однородное уравнение:

$$\frac{k}{T_3 - T_4} \left[\frac{e^{-\frac{t}{T_4}}}{T_4} - \frac{e^{-\frac{t}{T_3}}}{T_3} \right] = 0,$$

решая которое относительно $t=t_B$, получим:

$$t_B = \frac{T_3 T_4}{T_3 - T_4} \ln \frac{T_3}{T_4}.$$

Анализ графика $h(t)$ показывает, что при наличии экспериментально полученной переходной функции все 3 параметра (k , T_1 , T_2 или k , T_3 , T_4) определяются графо-аналитическим способом:

- k и $T_1 = T_3 + T_4$ – графическим;
- T_2 , T_3 и T_4 – аналитическим.

Для КЗ, используя данные о полюсах изображения $H(s)$, найдем переходную характеристику:

$$h(t) = \sum_{k=1}^{q=3} \frac{1}{(n_k - 1)!} \lim_{s \rightarrow s_k} \left[\frac{(s - s_k)^{n_k} k e^{st}}{T^2 (s + \alpha - \omega)(s + \alpha + \omega)s} \right] = k \left[1 - (\cos \omega t + m \sin \omega t) e^{-\alpha t} \right].$$

Здесь динамика характеризуется тремя независимыми параметрами: k , α , ω .

Так как частота демпфированных колебаний $\omega = q\sqrt{1 - \xi^2}$, то $\omega_1 > \omega_2$, при этом $\omega < q$ для обоих звеньев. Оба этих обстоятельства (гашение по амплитуде и разные частоты) хорошо показаны на рис. 8.6.

В расчетах часто используется еще один показатель затухания колебаний θ (степень затухания). Он равен относительной разности двух смежных по времени амплитуд переменной составляющей (амплитуд перерегулирования) a_1 и a_2 :

$$\theta = \frac{a_1 - a_2}{a_1} = 1 - \frac{a_2}{a_1} = 1 - \frac{a_1 \exp[-\alpha(t_2 - t_1)]}{a_1},$$

$$\theta = 1 - \exp\left(-\frac{2\pi\alpha}{\omega}\right) = 1 - \exp(-2\pi m).$$

Параметры КЗ в виде набора k , α , ω можно легко найти, если имеется снятая экспериментально переходная функция $h(t)$ (рис. 8.6).

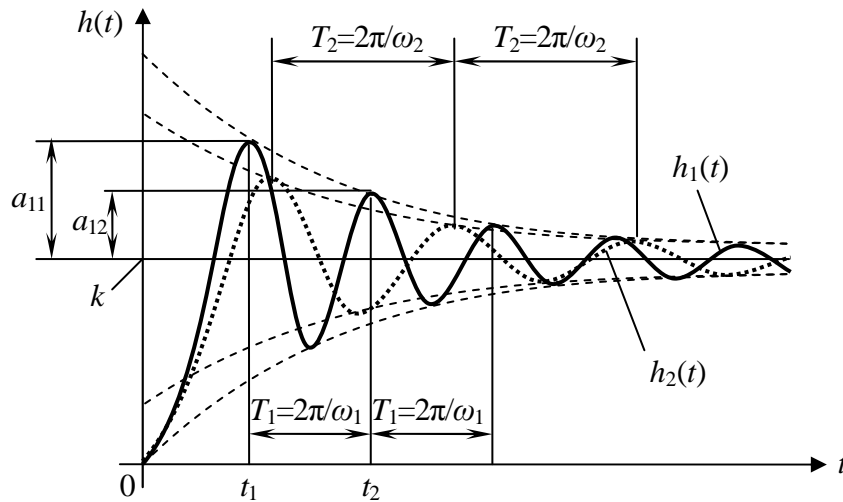


Рис. 8.6. Переходные функции двух колебательных звеньев:
т.к. $\xi_1 < \xi_2$, то колебания 1-го звена гасятся по амплитуде меньше, чем 2-го

Поскольку $a_{11} = a_{12} \exp[\alpha(t_2 - t_1)]$, то $\ln \frac{a_1}{a_2} = \alpha(t_2 - t_1)$; отсюда:

$$\alpha = \left(\ln \frac{a_1}{a_2} \right) / (t_2 - t_1); \quad \omega = \frac{2\pi}{(t_2 - t_1)}; \quad k = 0k \cdot \mu_h,$$

где μ_h – масштаб $h(t)$.

Частотный анализ аperiodического звена производится на основе записи ПФ в частотной форме:

$$W(j\omega) = \frac{k}{(T_3 j\omega + 1)(T_4 j\omega + 1)} = \frac{k[(1 - j\omega^2 T_3 T_4) - j\omega(T_3 + T_4)]}{(1 + \omega^2 T_3^2)(1 + \omega^2 T_4^2)}.$$

Полученную таким образом в аналитическом виде ЧПФ строим на комплексной плоскости (рис. 8.7, а) при условии $\omega = \text{var} = 0 \dots \infty$. Годограф ЧПФ представляет собой кривую, расположенную в 4-м и 3-м квадрантах (местоположение годографа и его характерных точек легко устанавливается из анализа знаков $\text{Re}(\omega)$ и $\text{Im}(\omega)$ и их аналитических записей; в частности, из условия $1 - \omega^2 T_3 T_4 = 0$ определяется частота перехода годографа из 4-й четверти в 3-ю; $\omega_{\text{пер}} = \frac{1}{\sqrt{T_4 T_3}} = \frac{1}{T_2}$). Проекции годографа на вещественную и мнимую оси в функциональном виде представлены на рис. 8.7, б, в.

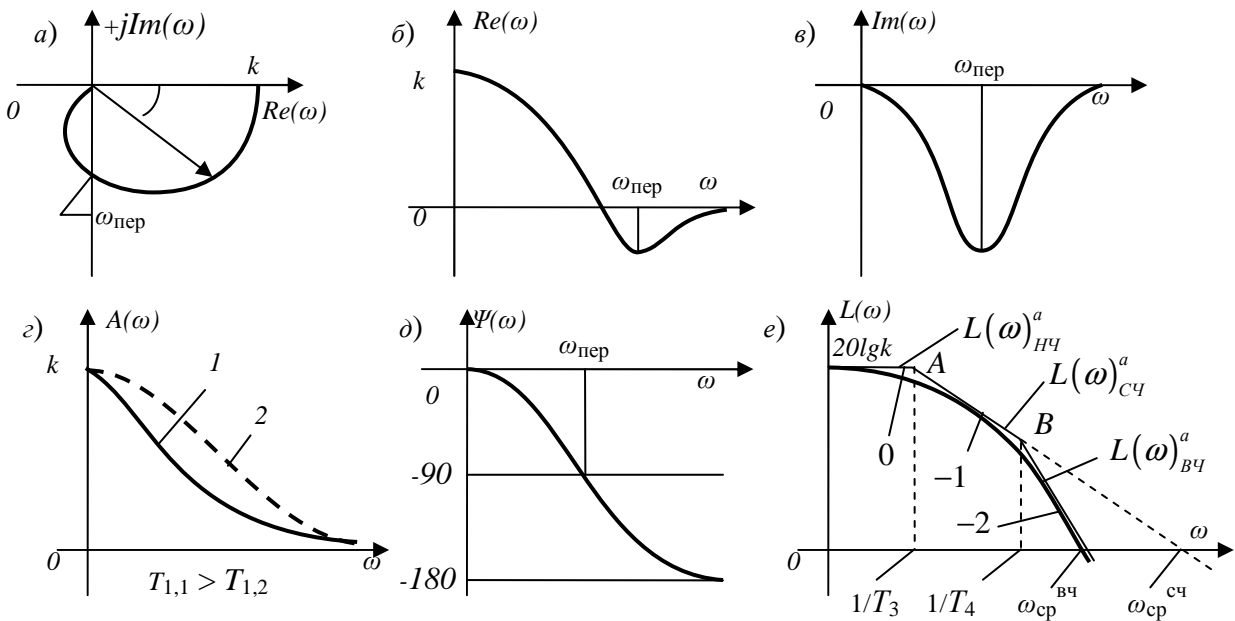


Рис. 8.7. Частотные характеристики аperiodического звена 2-го порядка:
а – АФХ; б – ВЧПФ; в – МЧПФ; г – АЧХ; д – ФЧХ; е – ЛАЧХ

По виду годографа (в англоязычной литературе используется понятие «локус») можно заключить, что при увеличении ω вектор $W(j\omega)$ поворачивается по часовой стрелке до максимального угла -180° (такое изменение угла определяет ФЧХ звена), при этом его модуль (АЧХ) плавно уменьшается от k до 0 (при $\omega \rightarrow \infty$).

Изменения относительной амплитуды выходного синусоидального сигнала (т.е. $A(\omega)$) и сдвига фазы $x_{вых}(t)$ относительно $x_{вх}(t)$ (т.е. $\Psi(\omega)$) при $\omega = \text{var}$ показаны на рис. 8.7, з, д.

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1 + \omega^2 T_3^2)(1 + \omega^2 T_4^2)}}.$$

$$\Psi(\omega) = \arctg \left(-\frac{\omega(T_3 + T_4)}{1 - \omega^2 T_3 T_4} \right) = \arctg \left(-\frac{\omega T_1}{1 - \omega^2 T_2^2} \right).$$

АЧХ говорит о том, что апериодическое звено 2-го (также как и 1-го) порядка обладает свойствами низкочастотного фильтра, т.к. хорошо пропускает низкие частоты и плохо – высокие (эффективно их гасит).

На весьма высоких частотах (рис. 8.7, д) звено сдвигает выходной сигнал относительно входного примерно на полпериода (-180°), таким образом, звено на этих частотах работает в режиме *инвертора* (в режиме смены знака сигнала, в режиме противофазы).

Точная логарифмическая АЧХ (ЛАЧХ) звена имеет выражение:

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T_3^2} - 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T_4^2}.$$

Аппроксимируем ЛАЧХ, т.е. найдем характеристики – аппроксиманты в виде прямых линий с типовыми наклонами (0, -20 и -40 дБ/дек) в зонах низких, средних и высоких частот (в зонах НЧ, СЧ и ВЧ):

– при $0 \leq \omega < \frac{1}{T_3} \ll \frac{1}{T_4}$ имеем $\omega^2 T_3^2 \ll 1$ и $\omega^2 T_4^2 \ll \ll 1$, поэтому

$$L(\omega)_{НЧ}^a \cong 20 \lg k \text{ (нулевой наклон);}$$

- при $\frac{1}{T_3} < \omega < \frac{1}{T_4}$ получаем $\omega^2 T_3^2 \gg 1 \cong 0$ и $\omega^2 T_4^2 \ll 1$, поэтому

$$L(\omega)_{CЧ}^a = 20 \lg \frac{k}{T_3} - 20 \lg \omega \text{ (одинарный отрицательный наклон);}$$

при этом частота среза $\omega_{cp}^{CЧ} \cong \frac{k}{T_3}$ лежит в зоне ВЧ – при $k > 1$

(т.е. $L(\omega) > 0$) и в зоне НЧ – при $k < 1$ (т.е. $L(\omega) < 0$);

- при $\frac{1}{T_3} \ll \frac{1}{T_4} < \omega \leq \infty$: $\omega^2 T_4^2 \gg 1 \cong 0$ и $\omega^2 T_3^2 \gg 1 \cong 0$, таким об-

$$\text{разом, } L(\omega)_{BЧ}^a = 20 \lg \frac{k}{T_3 T_4} - 40 \lg \omega = 20 \lg \frac{k}{T_3 T_4} - 20 \lg \omega^2 \text{ (двой-}$$

ной отрицательный наклон, т.е. -40 дБ/дек); при этом частота

$$\text{среза } \omega_{cp}^{BЧ} = \sqrt{\frac{k}{T_3 T_4}}.$$

Точная ЛАЧХ и ее аппроксиманты изображены на рис. 8.4, *е*. Максимальные ошибки аппроксимации будут в точках *A* и *B*; их величины могут быть легко рассчитаны при частотах сопряжения $\omega_{c1} = 1/T_3$ и $\omega_{c2} = 1/T_4$.

Неточность определения значений частот среза $\omega_{cp}^{CЧ}$ и особенно $\omega_{cp}^{BЧ}$ необходимо иметь в виду при оценке устойчивости систем по логарифмическим частотным характеристикам.

Частотные характеристики **колебательного звена** определяются из передаточной функции, записанной в форме:

$$W(s) = \frac{k}{\frac{s^2}{q^2} + 2\xi \frac{s}{q} + 1}.$$

Таким образом, ЧПФ звена запишется так (при этом $s = j\omega$):

$$W(j\omega) = \frac{k}{\left(1 - \frac{\omega^2}{q^2}\right) + j2\xi\frac{\omega}{q}} = \frac{k\left(1 - \frac{\omega^2}{q^2}\right) + j\left(-2k\xi\frac{\omega}{q}\right)}{\left(1 - \frac{\omega^2}{q^2}\right)^2 + 4\xi^2\frac{\omega^2}{q^2}}.$$

Годограф (рис. 8.8, а) расположен в нижней полуплоскости при частоте перехода из 4-й четверти в 3-ю, частота перехода – $\omega_{\text{пер}}=q$.

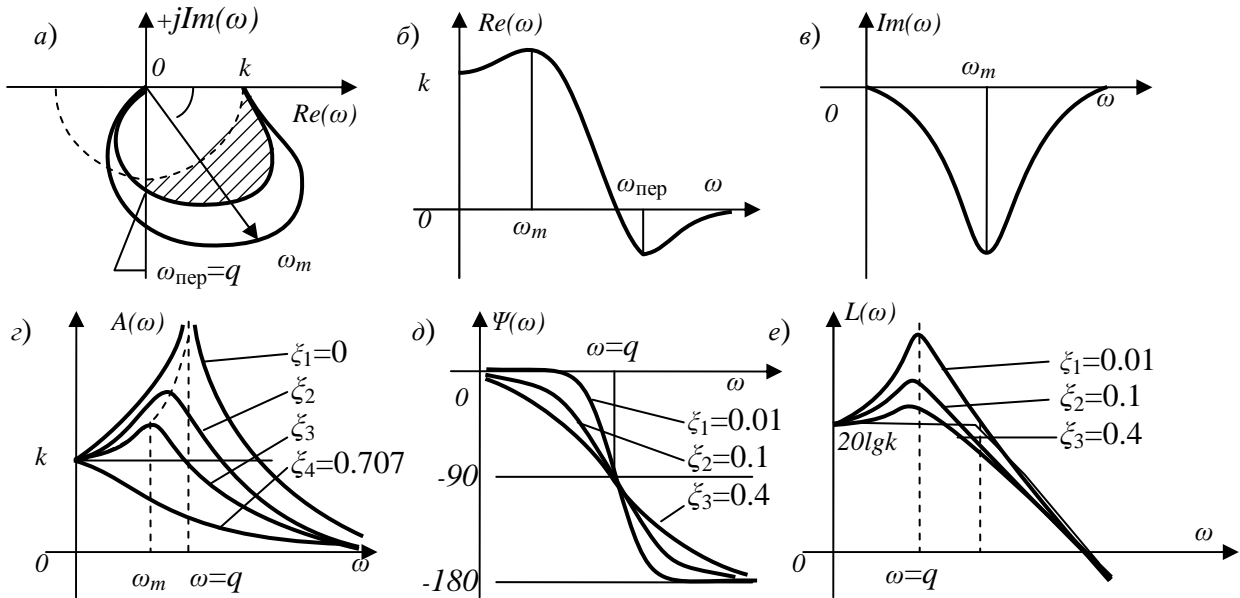


Рис. 8.8. Частотные характеристики колебательного звена:
а – АФХ; б – ВЧПФ; в – МЧПФ; г – АЧХ; д – ФЧХ; е – ЛАЧХ

На рис. 8.8, а изображены годографы КЗ при 2-х режимах его работы: при ξ_1 и $\xi_2 < \xi_1$. В первом случае степень демпфирования больше, поэтому относительная амплитуда синусоидального сигнала на выходе в первом случае меньше, чем во втором. Заштрихованная область показывает диапазон частот, в котором относительные амплитуды выходной координаты превышают уровень k .

Годограф имеет экстремальный характер, так как на частоте ω_m модуль вектора $W(j\omega)$ максимален. Изменение этого максимума в зависимости от частоты сигнала хорошо прослеживается по АЧХ звена (рис. 8.8, г).

$$A(\omega) = \sqrt{\operatorname{Re}^2(\omega) + \operatorname{Im}^2(\omega)} = \frac{k}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{q^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{q^2}}}.$$

Из условия $\frac{dA(\omega)}{d\omega} = 0$ определим частоту, на которой АЧХ имеет максимум: $\omega_m = q\sqrt{1 - 2\xi^2}$, откуда можно найти наибольшее значение относительного коэффициента демпфирования ξ , при котором экстремум в АЧХ исчезает, а частота ω_m стремится к нулю.

$$1 - 2\xi^2 = 0 \Rightarrow \xi = \sqrt{0.5} \approx 0.707.$$

Следовательно, в колебательном звене может возникнуть один из 2-х режимов при $\omega = \text{var}$:

- 1) режим квазирезонанса (с максимумом), при $0 < \xi < 0.707$;
- 2) безрезонансный режим (без максимума), при $0.707 < \xi < 1$.

Диапазоны коэффициента демпфирования, обеспечивающие различные режимы работы звена 2-го порядка, представлены на рис. 8.9.

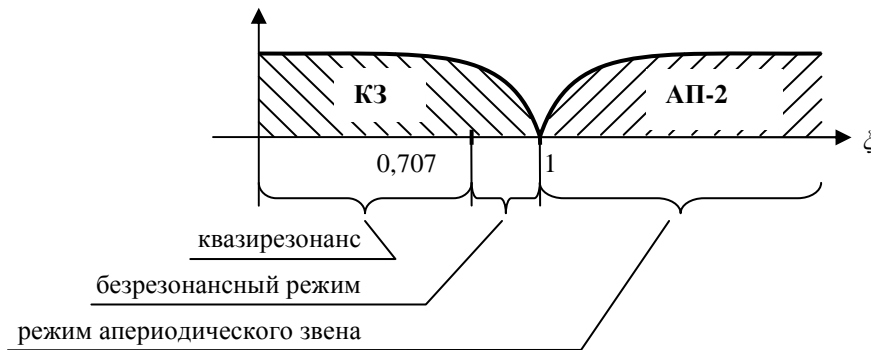


Рис. 8.9. Диапазоны коэффициента демпфирования

Амплитуду (относительную) колебаний на выходе звена в режиме квазирезонанса определим путем подстановки $\omega_m = q\sqrt{1 - 2\xi^2}$ в $A(\omega)$:

$$A(\omega_m) = \frac{k}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}.$$

Данное выражение является важным с точки зрения возможности определения максимального выходного сигнала – для решения вопроса согласования выхода звена с его нагрузкой.

Фазо-частотная характеристика колебательного звена (рис. 8.8, *д*) рассчитывается по формуле:

$$\Psi(\omega) = \arctg\left(\frac{\text{Im}(\omega)}{\text{Re}(\omega)}\right) = \arctg\left(\frac{2\xi\frac{\omega}{q}}{1 - \frac{\omega^2}{q^2}}\right).$$

ФЧХ плавно возрастает с ростом ω до -180° , т.е. на высоких частотах выходная координата находится в противофазе по отношению к входному сигналу (инвертируется).

ЛАЧХ колебательного звена (рис. 8.8, *е*) описывается зависимостью:

$$L(\omega) = 20\lg k - 20\lg\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{q^2}\right)^2 - 4\xi^2\frac{\omega^2}{q^2}}.$$

Результаты временного и частотного анализа звеньев 2-го порядка позволяют выделить некоторые особенности этих позиционных звеньев. Так, они являются устойчивыми, т.е., будучи выведенными из равновесия, стремятся вновь его восстановить. В случае апериодического звена это восстановление происходит без инерционного заброса за уровень установившегося режима (равного k), т.е. монотонно; в случае же колебательного звена восстановление сопровождается колебаниями. В обоих случаях значения выходных координат отличаются от своих первоначальных значений. Это обстоятельство обуславливает возникновение статических (позиционных) ошибок, зависящих от величины входного воздействия и являющихся откликом на него.

8.5. Дифференцирующие звенья

К числу дифференцируемых звеньев относятся звенья, у которых выходная координата зависит от скорости изменения входного параметра. На рис. 8.10 приведены две электрических схемы, в которых напряжения на входе и выходе связаны такой зависимостью.

- Для первой схемы имеем:

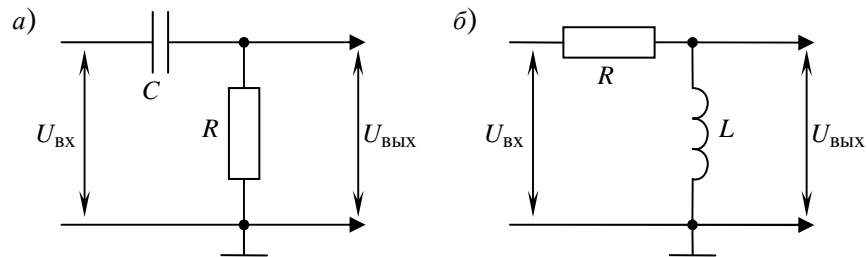


Рис. 8.10. Дифференцирующие электрические схемы

$$\frac{U_{\text{вых}}}{U_{\text{вх}}} = \frac{R}{R + \frac{1}{Cp}} = \frac{RCp}{RCp + 1} = \frac{Tp}{Tp + 1}, \quad \text{где: } T = RC.$$

- для второй схемы

$$\frac{U_{\text{вых}}}{U_{\text{вх}}} = \frac{Lp}{R + Lp} = \frac{\frac{L}{R}p}{\frac{L}{R}p + 1} = \frac{Tp}{Tp + 1}, \quad \text{где: } T = L/R.$$

В общем виде уравнение динамики реального дифференцирующего звена имеет вид:

$$(Ts + 1)x_{\text{вых}} = ksx_{\text{вх}}.$$

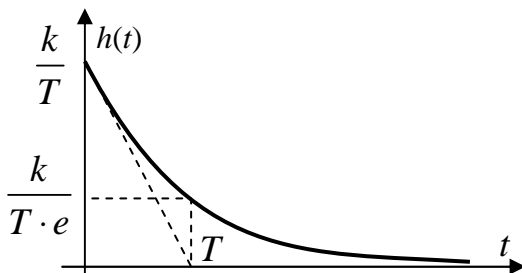


Рис. 8.11. Переходная функция реального дифференцирующего звена

Временная характеристика, представляющая собой переходную функцию (рис. 8.11), описывается уравнением: $h(t) = \frac{k}{T} e^{-t/T}$.

Частотные характеристики (рис. 8.12) находятся из передаточ-

ной функции $W(s) = \frac{ks}{Ts + 1}$ путем замены переменной s на $j\omega$.

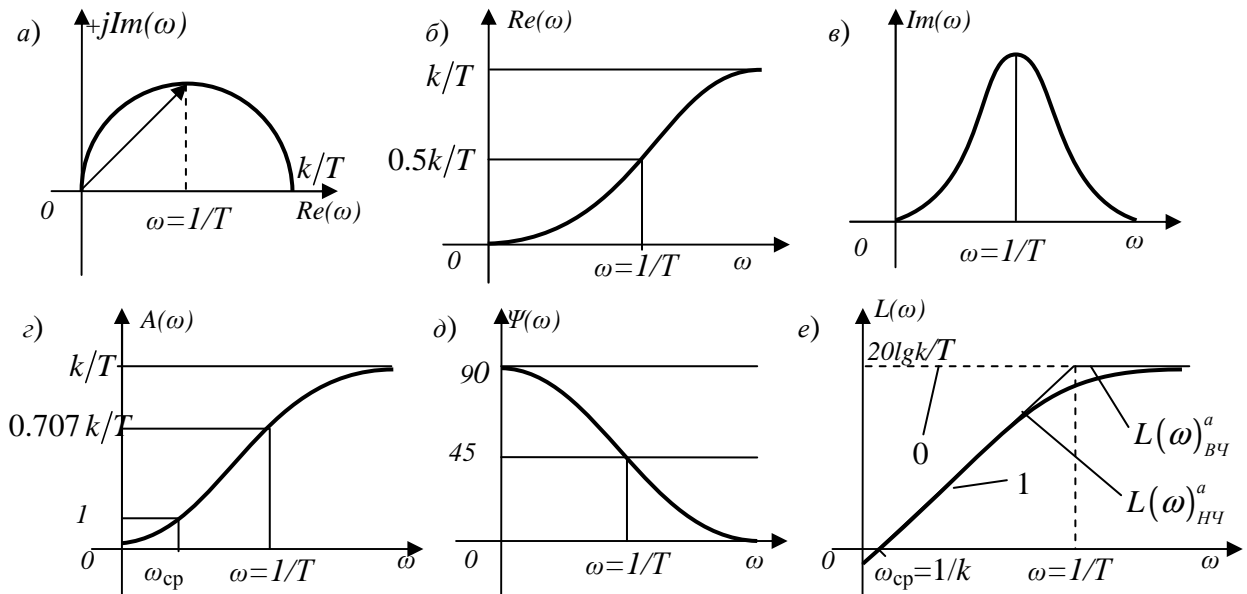


Рис. 8.12. Частотные характеристики реального дифференцирующего звена:
а – АФХ; б – ВЧПФ; в – МЧПФ; г – АЧХ; д – ФЧХ; е – ЛАЧХ

Тогда, амплитудно-фазовая характеристика (рис. 8.12, а) описывается уравнением:

$$W(j\omega) = \frac{kj\omega T}{1 + j\omega T} = \frac{k\omega^2 T + jk\omega}{1 + \omega^2 T^2}.$$

Амплитудно-частотная характеристика (рис. 8.12, г):

$$A(\omega) = \frac{k\omega}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}.$$

Фазо-частотная характеристика (рис. 8.12, д):

$$\Psi = \arctg\left(\frac{1}{\omega T}\right).$$

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (рис. 8.12, е) строится согласно уравнению:

$$L(\omega) = 20\lg k + 20\lg \omega - 20\lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$$

Изменение частоты в диапазоне $\omega < 1/T$ позволяет упростить расчетное уравнение до вида:

$$L(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg \omega,$$

ЛАЧХ реального дифференциатора представляет собой прямую с положительным наклоном в 20дБ/дек, при частоте среза $\omega_{cp} = 1/k$.

Если частота меняется в пределах $\omega > 1/T$, то $L(\omega) = 20 \lg \frac{k}{T}$ – прямая с нулевым наклоном.

Анализ временных и частотных характеристик реального дифференцирующего звена подтверждает важнейшую особенность этого типа звеньев – способность реагировать на скорость изменения выходного параметра. Такие звенья в настоящее время получили широкое распространение при создании самонастраивающихся систем регулирования, систем, в которых поддерживаются экстремальные значения контролируемого параметра.

Равенство нулю скорости изменения регулируемой координаты в точках максимума и минимума целевой функции позволяет осуществить процесс регулирования, если даже неизвестны вид, форма и описание этой функции.

8.6. Реальное интегрирующее звено (объект)

Реальные интегрирующие звенья (однородные астатические объекты) относятся к тем звеньям, у которых отсутствует какая-либо связь между входными и выходными координатами, т.е. у них нет статических характеристик. В качестве примера однородного астатического объекта можно представить емкость, в которую через одну трубу наливается жидкость, а через другую – выливается.

Динамика таких объектов описывается уравнением:

$$(Tp + 1)x_{вых} = \frac{1}{T_u} x_{вх},$$

где: T – постоянная времени реального интегрирующего звена, характеризующая его инерционность; T_u – время разгона (время интегрирования), характеризующее емкость объекта; $1/T_u$ – скорость разгона – установившаяся скорость изменения регулируемой координаты.

Решение уравнения динамики имеет вид:

$$h(t) = \frac{1}{T_u} \left[t - T \left(1 - e^{-t/T} \right) \right].$$

Весовая функция:

$$w(t) = h'(t) = \left(\frac{1}{T_u} t - \frac{T}{T_u} + \frac{T}{T_u} e^{-t/T} \right)' = \frac{1}{T_u} \left(1 - e^{-t/T} \right).$$

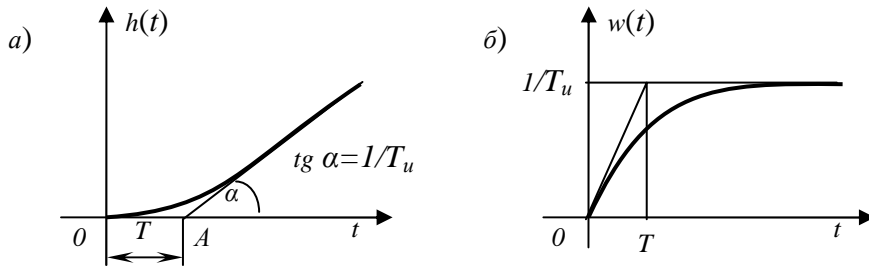


Рис. 8.13. Временные характеристики реального интегрирующего звена:
а – переходная характеристика; б – весовая функция

Постоянные коэффициенты уравнений динамики и временной характеристики T и T_u определяются как:

$$OA = T, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{T_u}.$$

Передаточная функция имеет вид:

$$W(s) = \frac{1}{sT_u(1 + sT)}.$$

Следовательно, частотная передаточная функция находится как:

$$W(j\omega) = \frac{1}{j\omega T_u(1 + j\omega T)} = \frac{-TT_u\omega^2 + j(-T_u\omega)}{\omega^2 T_u^2(1 + \omega^2 T^2)},$$

откуда, в свою очередь, уравнениями АЧХ и ФЧХ будут:

$$A(\omega) = \frac{1}{\omega T_u \sqrt{1 + \omega^2 T^2}}; \quad \Psi = \arctg\left(\frac{1}{\omega T}\right).$$

На рис. 8.14 приведены частотные характеристики одноемкостного астатического объекта.

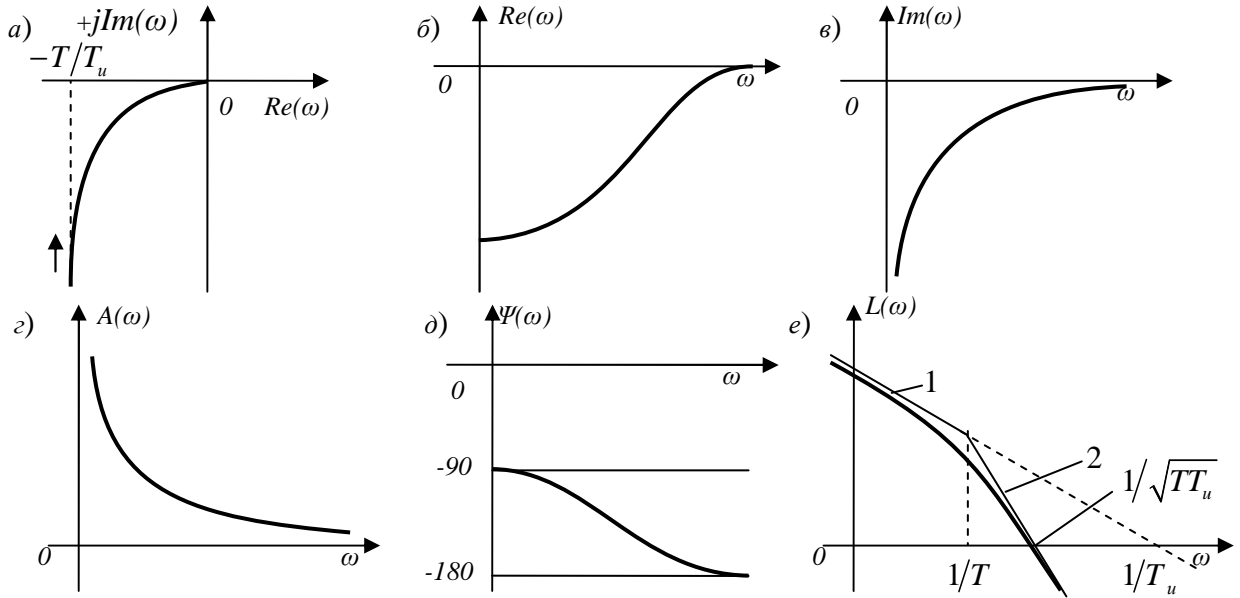


Рис. 8.14. Частотные характеристики реального интегрирующего звена:
а – АФХ; б – ВЧПФ; в – МЧПФ; г – АЧХ; д – ФЧХ; е – ЛАЧХ

Расчетным уравнением логарифмической амплитудно-частотной характеристики является уравнение вида:

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{1}{T_u} - 20 \lg \omega - 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2}.$$

При изменении частоты, как это показано на рис. 8.14, е в пределах $0 \leq \omega \leq 1/T$ расчетное уравнение упрощается.

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{1}{T_u} - 20 \lg \omega,$$

откуда частота среза $\omega_{cp} = 1/T_u$.

Если частота меняется в интервале $1/T < \omega < \infty$, то:

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{1}{TT_u} - 20 \lg \omega^2, \quad \omega_{cp} = \sqrt{\frac{1}{TT_u}}.$$

8.7. Объект с чистым или транспортным запаздыванием

Зачастую это ковшовые и ленточные транспортеры, пневмопроводы значительной протяженности, т.е. объекты, у которых выходная координата точно копирует входную, но с отставанием во времени. Груз, перемещаемый транспортером с одного места в другое в течение определенного отрезка времени без изменения массы.

Временная характеристика такого объекта показана на рис. 8.15 и описывается уравнением:

$$x_{\text{вых}}(t) = h(t) = 1(t - \tau),$$

где $h(t) = 0$ при $0 \leq t < \tau$.

Передаточная функция такого объекта имеет вид:

$$W(s) = e^{-\tau s}.$$

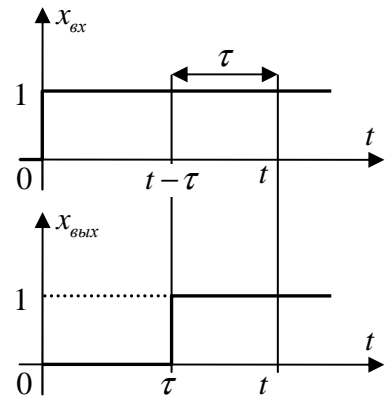


Рис. 8.15. Временные характеристики объекта с чистым запаздыванием

Поэтому, частотные характеристики (рис. 8.16) будут описываться уравнениями:

АФХ $W(j\omega) = e^{-j\omega\tau},$

АЧХ $A(\omega) = 1,$

ФЧХ $\Psi(\omega) = -\omega\tau.$

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика будет совпадать с осью частот, так как

$$L(\omega) = 20 \lg 1 = 0.$$

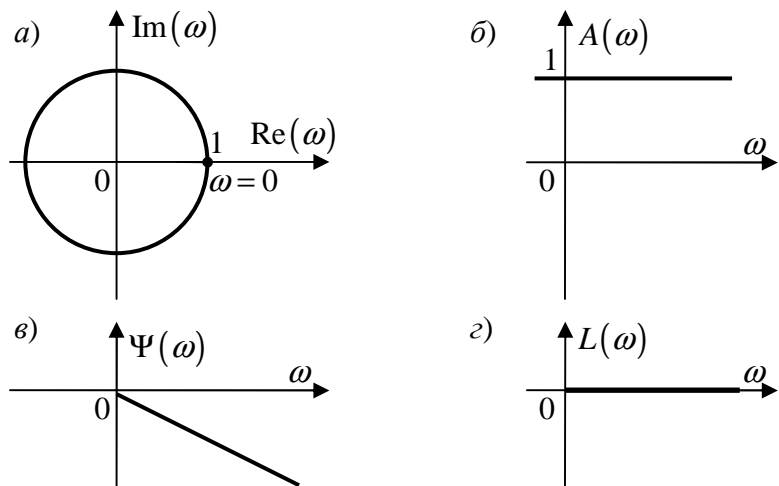


Рис. 8.16. Частотные характеристики объекта с чистым запаздыванием: а – АФХ; б – АЧХ; в – ФЧХ; г – ЛАЧХ

8.8. Неминимально-фазовые звенья

Линейная система может содержать неминимально-фазовые звенья, передаточные функции которых имеют положительные нули или полюсы. Неминимально-фазовое или минимально-фазовое звенья с одинаковыми амплитудно-частотными характеристиками имеют различные фазо-частотные характеристики. Это обстоятельство и необходимо учитывать при построении логарифмических частотных характеристик цепи с неминимально-фазовыми звеньями.

Основные сведения об элементарных неминимально-фазовых звеньях даны в табл. Для каждого звена показано, в частности, расположение ФЧХ относительно его сопрягающей частоты. У неминимально-фазовых звеньев те же ЛАЧХ, что и у звеньев, передаточные функции которых отличаются отсутствием отрицательных знаков.

Таблица 8 – Элементарные неминимально-фазовые звенья ($0 < \xi < 1$; $0 < \zeta < 1$)

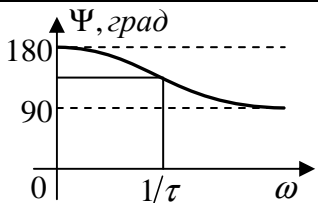
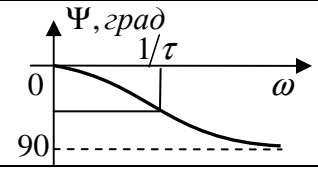
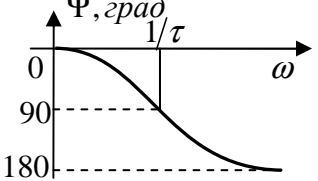
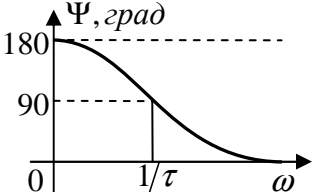
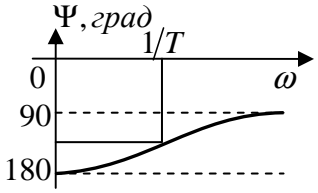
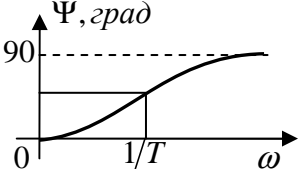
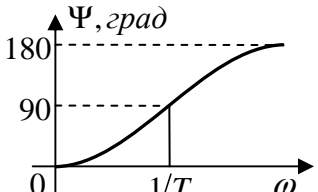
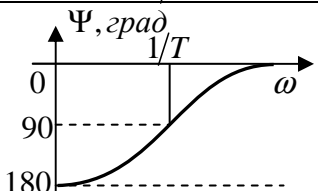
Передаточная функция W	Фазо-частотная характеристика Ψ	Логарифмическая фазо-частотная характеристика
$\tau s - 1$	$180^\circ - \arctg(\tau\omega)$	
$1 - \tau s$	$-\arctg(\tau\omega)$	
$\tau^2 s^2 - 2\zeta\tau s + 1$	$-\arctg \frac{2\zeta\tau\omega}{1 - \tau^2\omega^2}$	
$-\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s - 1$	$180^\circ - \arctg \frac{2\zeta\tau\omega}{1 - \tau^2\omega^2}$	

Таблица 8 (продолжение)

$\frac{1}{Ts - 1}$	$-180^\circ + \operatorname{arctg}(T\omega)$	
$\frac{1}{1 - Ts}$	$\operatorname{arctg}(T\omega)$	
$\frac{1}{T^2 s^2 - 2\xi\tau s + 1}$	$\operatorname{arctg} \frac{2\xi T\omega}{1 - T^2\omega^2}$	
$\frac{1}{-T^2 s^2 + 2\xi\tau s - 1}$	$-180^\circ + \operatorname{arctg} \frac{2\xi T\omega}{1 - T^2\omega^2}$	

Некоторые полиномы второго порядка с корнем, имеющим положительную вещественную часть, могут быть разложены на произведение полиномов первой степени:

$$T^2 s^2 + 2\alpha s - 1 = (T_1 s + 1)(T_2 s - 1);$$

$$-T^2 s^2 - 2\alpha s + 1 = -(T_1 s + 1)(T_2 s - 1),$$

где $0 < \alpha < 1$; $T_1 = T(\sqrt{\alpha^2 + 1} - \alpha)$ и $T_2 = T(\sqrt{\alpha^2 + 1} + \alpha)$.

$$T^2 s^2 - 2\alpha s - 1 = (T_1 s + 1)(T_2 s - 1);$$

$$-T^2 s^2 + 2\alpha s + 1 = -(T_1 s + 1)(T_2 s - 1),$$

где $0 < \alpha < 1$; $T_1 = T(\sqrt{\alpha^2 + 1} + 1)$ и $T_2 = T(\sqrt{\alpha^2 + 1} - 1)$.

Следовательно, неминимально-фазовое звено, ПФ которого содержит какой-либо из перечисленных полиномов, следует рассматривать как последовательное соединение двух звеньев первого порядка, лишь одно из которых неминимально-фазовое.

8.9. Звенья, формирующие законы регулирования

8.9.1. Пропорционально-интегрирующее звено

8.9.1.1. Идеальное ПИ-звено (идеальный изодром)

Реализацию пропорционально-интегрального закона (ПИ-закона) регулирования проследим на работе шестикамерного пневмоблока. Как видно из рис. 8.17, условием равновесия общей оси мембран будет равенство нулю давлений:

$$\sum P = P_{ex} - P_{зад} + P_1 - P_{вых} = 0$$

Так как $P_{вых} = (T_u s + 1)P_1$, $P_{ex} - P_{зад} = P_{рас}$ то:

$$P_{рас} - P_{вых} + \frac{P_{вых}}{T_u s + 1} = 0.$$

$$\text{Откуда: } P_{вых} = \frac{T_u s + 1}{T_u s} P_{рас} = \left(1 + \frac{1}{T_u s}\right) P_{рас}.$$

Тот же результат можно получить при рассмотрении блок-схемы этого устройства: $W(s) = \frac{1}{1 - W} = 1 + \frac{1}{T_u s}.$

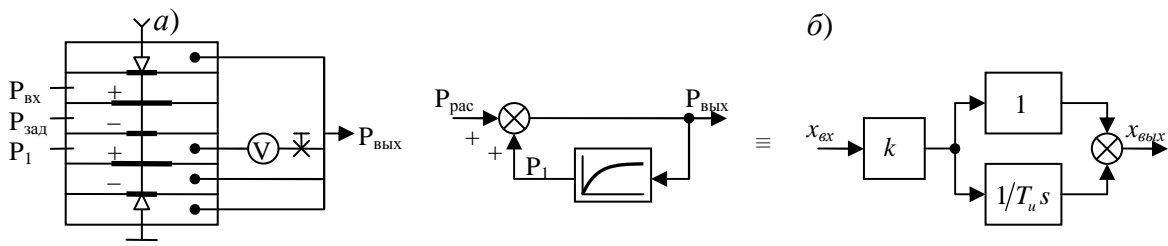


Рис. 8.17. Пропорционально-интегрирующее звено:
а – принципиальная схема; б – блок-схема

Переходная функция рассматриваемого ПИ-звена находится путем решения его уравнения динамики:

$$x_{вых} = k \frac{T_u s + 1}{T_u s} x_{ex}, \quad x_{вых} = k \left(1 + \frac{1}{T_u s}\right) x_{ex}$$

Результатом решения является уравнение вида:

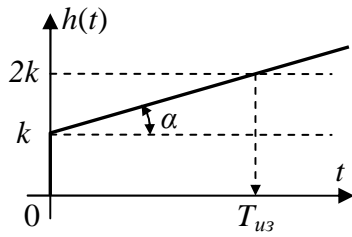


Рис. 8.18. Переходная функция идеального ПИ-звена
 $T_{из}$ – время изодрома

$$h(t) = k \left(1 + \frac{t}{T_u} \right).$$

Если временная характеристика подобного вида получена опытным путем, то значения постоянных коэффициентов в этих уравнениях находятся как:

$$k = 0K, \quad \operatorname{tg} \alpha = k/T_u.$$

Частотные характеристики (рис. 8.19) находятся по передаточной функции, которая в данном случае равна:

$$W(s) = \frac{k}{T_u} \cdot \frac{1 + sT_u}{s}.$$

После замены переменной s на $j\omega$ имеем:

$$W(j\omega) = k \left(1 - \frac{j}{\omega T_u} \right),$$

$$A(\omega) = \frac{k}{\omega T_u} \sqrt{1 + \omega^2 T_u^2},$$

$$\Psi(\omega) = \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{\omega T_u} \right).$$

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика описывается уравнением:

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{k}{T_u} - 20 \lg \omega + 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T_u^2}.$$

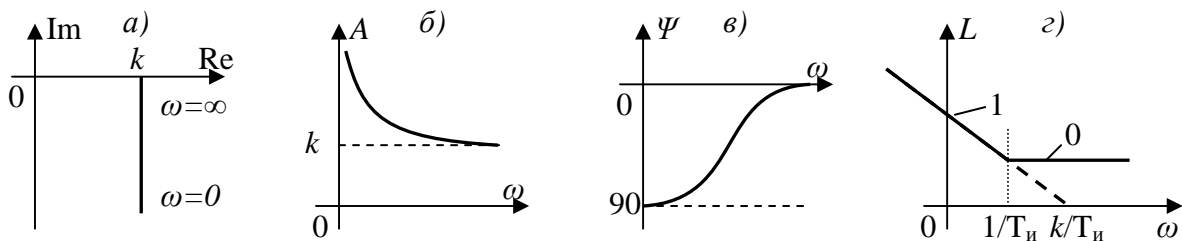


Рис. 8.19. Частотные характеристики идеального ПИ-звена:
 a – АФХ; b – АЧХ; c – ФЧХ; d – ЛАЧХ

Рассмотрим эффективность применения ПИ-закона регулирования при управлении одноемкостными объектами.

Если объектом управления является одноемкостное астатическое звено, то:

$$W(s)_{зам} = \frac{W_o}{1 - W_o W_p} = \frac{Ts}{T_o Ts^2 + Ts + 1},$$

откуда находим уравнение динамики:

$$(T_o Ts^2 + Ts + 1)x_{вых} = Ts \cdot x_{вх}.$$

Анализ последнего уравнения показывает, что система становится устойчивой, а ее статическая ошибка равна нулю.

Если объектом управления является одноемкостное статическое звено, то:

$$W(s)_{зам} = \frac{W_o}{1 - W_o W_p} = \frac{Ts}{T_2^2 s^2 + T_1 s + 1},$$

а уравнение динамики системы становится уравнение вида:

$$(T_2^2 s^2 + T_1 s + 1)x_{вых} = Ts \cdot x_{вх}$$

В данном случае применение ПИ-закона регулирования приводит к исчезновению статической ошибки за счет некоторого уменьшения устойчивости системы.

8.9.1.2. Реальное ПИ-звено (реальный изодром)

Выходная координата звена зависит от самой входной координаты и от ее интеграла.

Уравнение динамики имеет вид:

$$(Ts + 1)x_{вых} = k \left(1 + \frac{1}{T_u s} \right) x_{вх}$$

где T, T_u – постоянные времени, причем $T_u > T$, k – коэффициент передачи.

Решением уравнения динамики при $x_{ex} = [1]$ будет уравнение переходной функции:

$$h(t) = \frac{k}{T_u} \left(t + (T_u - T) \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \right).$$

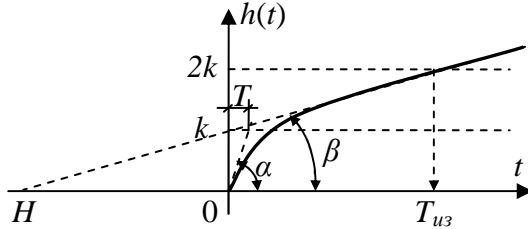


Рис. 8.20. Переходная функция реального ПИ-звена
 $T_{уз}$ – время изодрома

Переходная функция показана на рис. 8.20. Существующая связь между геометрическими характеристиками переходной функции и коэффициентами в уравнении динамики и ее временной характеристики позволяет, в случае получения кривой эксперимен-

тальным путем, описать ее в аналитической форме, т.е.:

$$\operatorname{tg} \alpha = h'(t)|_{t=0} = \frac{k}{T}, \quad \operatorname{tg} \beta = h'(t)|_{t=\infty} = \frac{k}{T_u}, \quad H = T_u - T.$$

Передаточная функция реального изодрома имеет вид:

$$W(s) = \frac{k(T_u s + 1)}{s T_u (T s + 1)}.$$

Следовательно, частотная передаточная функция равна:

$$W(j\omega) = \frac{k}{\omega T_u (1 + \omega^2 T_u^2)} \left[\omega(T_u - T) - j(1 + \omega^2 T_u T) \right],$$

откуда АЧХ и ФЧХ определяются, как:

$$A(\omega) = \frac{k}{\omega T_u} \sqrt{\frac{1 + \omega^2 T_u^2}{1 + \omega^2 T^2}}, \quad \Psi(\omega) = \operatorname{arctg} \left[-\frac{1 + \omega^2 T_u T}{\omega(T_u - T)} \right].$$

Частотные характеристики реального ПИ-звена приведены на рис. 8.21.

ЛАЧХ рассматриваемого звена строится согласно уравнению:

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{k}{T_u} - 20 \lg \omega + 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T_u^2} - 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2}.$$

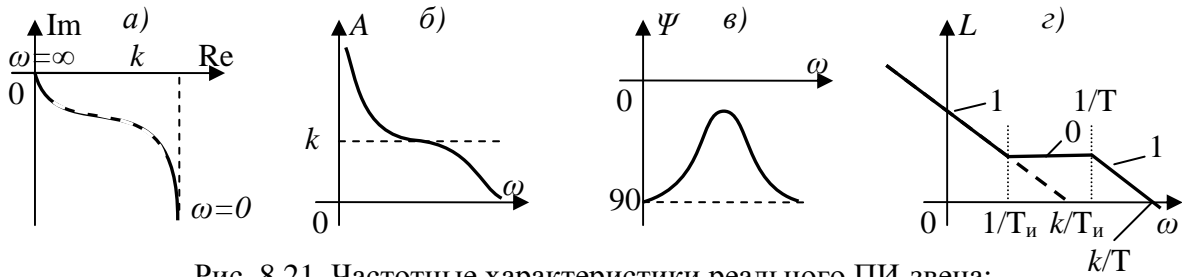


Рис. 8.21. Частотные характеристики реального ПИ-звена:
а – АФХ; б – АЧХ; в – ФЧХ; г – ЛАЧХ

Если частоту менять в пределах $1/T_u < \omega < 1/T$, то расчетное уравнение примет вид: $L(\omega) = 20 \lg \frac{k}{T_u} - 20 \lg \omega$, что соответствует прямой 1, имеющей единичный наклон (20дБ/дек) и частоту среза $\omega_{cp} = k/T_u$.

8.9.2. Пропорционально-интегро-дифференцирующее звено

8.9.2.1. Идеальное ПИД-звено

Это звено, в котором выходная координата зависит от отклонения, интеграла и производной входного сигнала, относится к числу наиболее сложных и универсальных устройств, суммирующее достоинства рассмотренных выше устройств и исключаяющее большинство их недостатков.

В качестве примера такого устройства может служить суммирующий блок (рис. 8.22, а), состоящий из шести камер, отделенных друг от друга пятью мембранами с одной общей жесткой осью. Эффективная площадь мембран различна. В зависимости от положения, которое принимает общая ось мембран, выходная координата принимает значения, равные $P_{вых}$ или 0 (условный нуль). Если сигнал ошибки рассогласования $P_{рас} = P_{зад} - P_{вх} < 0$, то в камере «В» создается избыточное давление, которое перемещает ось мембран в нижнее положение и тем самым перекрывает сопло «сброс в атмосферу» и открывает сопло «питание». На выходе устройства устанавливается давление $P_{вых}$, которое создает в камерах «Е» и «Д» давления P_1 и P_2 .

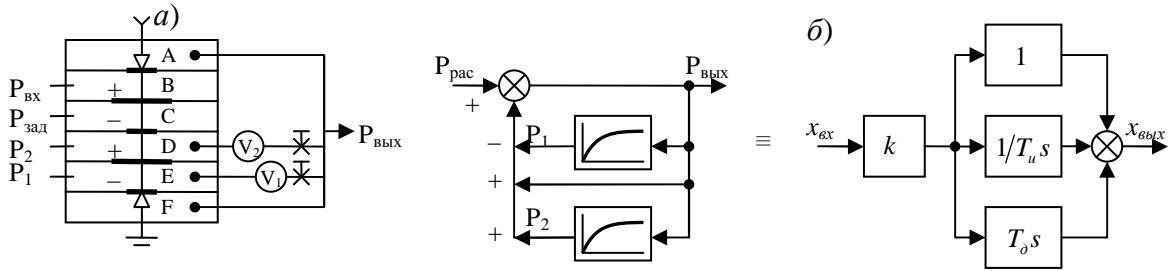


Рис. 8.22. Идеальное пропорционально-интегро-дифференцирующее звено:
а – принципиальная схема; б – блок-схема

Условием равновесия оси мембран в этом случае будет:

$$\sum P = P_{\text{рас}} - P_1 + P_2 = 0.$$

Так как $P_{\text{вых}} = (T_1 s + 1) P_1$, и $P_{\text{вых}} = (T_1 s + 1) P_1$ то:

$$P_{\text{рас}} = P_{\text{вых}} + \left[\frac{1}{T_1 s + 1} - \frac{1}{T_2 s + 1} \right] P_{\text{вых}} = \frac{(T_2 - T_1) s}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 T_2) s + 1} P_{\text{вых}}.$$

$$\text{Откуда: } P_{\text{вых}} = \frac{T_1 T_2 s^2 + (T_1 T_2) s + 1}{(T_2 - T_1) s} \cdot P_{\text{рас}} \quad (T_2 > T_1).$$

$$\text{Иначе: } P_{\text{вых}} = k \left[1 + T_\theta s + \frac{1}{T_u s} \right] \cdot P_{\text{рас}},$$

$$\text{где } k = \frac{T_2 + T_1}{T_2 - T_1} > 1, \quad T_\theta = \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1}, \quad T_u = T_1 + T_2.$$

То же уравнение динамики получается из передаточной функции, составленной в соответствии с блок-схемой устройства (рис. 8.22, б):

$$W(s) = \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{(T_2 - T_1) s}.$$

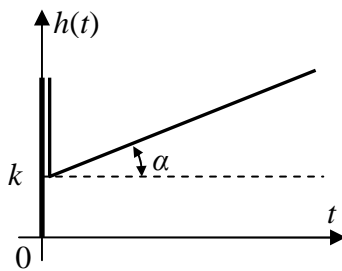


Рис. 8.23. Переходная функция идеального ПИД-звена

Решение уравнения динамики идеального ПИД-звена имеет вид:

$$h(t) = k \left(1 + \frac{t}{T_u} \right) + k \delta(t).$$

Характерной особенностью переходной функции этого звена (рис. 8.23) является мгновен-

венное, резкое увеличение выходной координаты в начальный момент времени, что представляет собой реакцию дифференцирующей составляющей на единичное ступенчатое изменение входного параметра. Когда входной сигнал принимает постоянное значение, действие дифференциальной составляющей прекращается и звено работает по ПИ-закону регулирования.

Частотные характеристики, показанные на рис. 8.24, описываются уравнениями:

$$\text{АФХ} \quad W(j\omega) = \frac{k}{\omega T_u} \left(\omega T_u + j(\omega^2 T_d T_u - 1) \right),$$

$$\text{АЧХ} \quad A(\omega) = \frac{k}{\omega T_u} \sqrt{\omega^2 T_u^2 + (\omega^2 T_d T_u - 1)^2},$$

$$\text{ФЧХ} \quad \Psi(\omega) = \arctg \left(\frac{\omega^2 T_d T_u - 1}{\omega T_u} \right),$$

$$\text{ЛАЧХ} \quad L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega T_u + 10 \lg \left(\omega^2 T_u^2 + (\omega^2 T_d T_u - 1)^2 \right).$$

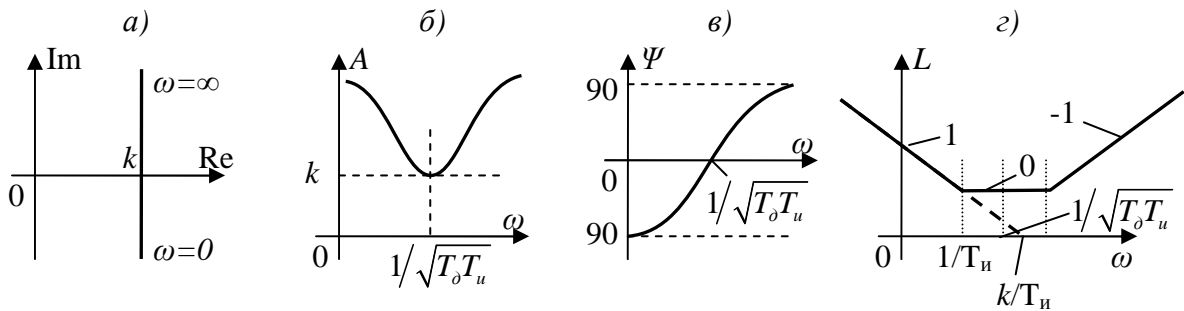


Рис. 8.24. Частотные характеристики идеального ПИД-звена:

a – АФХ; b – АЧХ; c – ФЧХ; d – ЛАЧХ

При рассмотрении частотных характеристик ПИД-звена легко заметить, что в диапазоне частот $\omega \in \left[0; 1/\sqrt{T_d T_u} \right]$ оно работает по ПИ-закону; при $\omega = 1/\sqrt{T_d T_u}$ – как пропорциональное (усилительное) звено; когда частота меняется в пределах $\omega \in \left[1/\sqrt{T_d T_u}; \infty \right]$ – в строгом соответствии с работой ПД-составляющей.

8.9.2.2. Реальное ПИД-звено

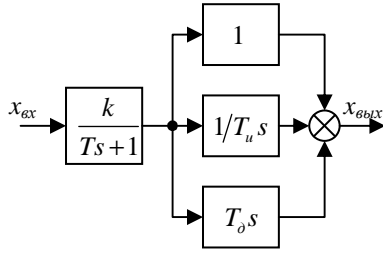


Рис. 8.25. Блок-схема реального ПИД-звена

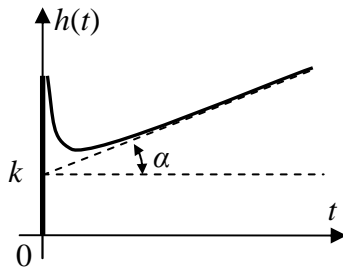


Рис. 8.26. Переходная функция реального ПИД-звена

Передаточная функция этого звена в соответствии с блок-схемой (рис. 8.25) имеет вид:

$$W(s) = \frac{k}{Ts+1} \left(1 + \frac{1}{T_u s} + T_d s \right) = \frac{k(T_u T_d s^2 + T_u s + 1)}{T_u s(Ts+1)}.$$

Уравнение динамики соответственно:

$$(Ts+1)x_{\text{вых}} = k \left(1 + \frac{1}{T_u s} + T_d s \right) x_{\text{вх}}.$$

Переходная функция для реального ПИД-звена (рис. 8.26) записывается как:

$$h(t) = \frac{k}{T_u} \left(t + T_u - T_d + e^{\frac{-t}{T_d}} \left(\frac{TT_u}{T_d} + T_d - T_u \right) \right).$$

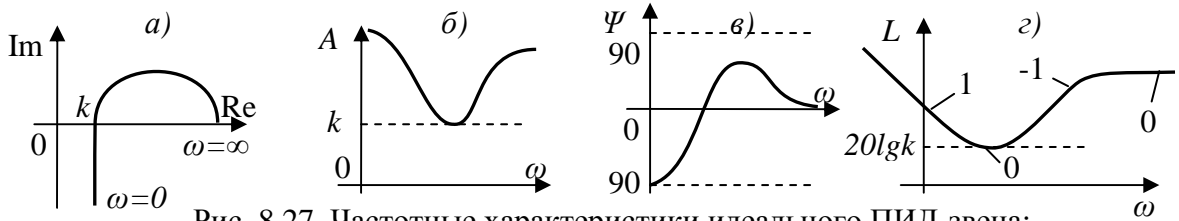


Рис. 8.27. Частотные характеристики идеального ПИД-звена:
а – АФХ; б – АЧХ; в – ФЧХ; г – ЛАЧХ

Частотные характеристики (рис. 8.27), описываются уравнениями:

$$\text{АФХ} \quad W(j\omega) = \frac{k}{T_u \omega} \cdot \frac{(TT_u T_d \omega^3 + \omega(T_u - T) + j(T_u T_d \omega^2 - TT_u \omega^2 - 1))}{(T^2 \omega^2 + 1)},$$

$$\text{АЧХ} \quad A(\omega) = \frac{k}{\omega T_u (T^2 \omega^2 + 1)} \sqrt{(TT_u T_d \omega^3 + \omega(T_u - T))^2 + (T_u \omega^2 (T_d - T) - 1)^2},$$

$$\text{ФЧХ} \quad \Psi(\omega) = \arctg \left(\frac{T_u \omega^2 (T_d - T) - 1}{TT_u T_d \omega^3 + \omega(T_u - T)} \right),$$

$$\text{ЛАЧХ} \quad L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega T_u - 20 \lg (T^2 \omega^2 + 1) + 10 \lg \left((TT_u T_d \omega^3 + \omega(T_u - T))^2 + (T_u \omega^2 (T_d - T) - 1)^2 \right).$$

9. Топологический метод анализа

9.1. Основные положения теории сигнальных графов

Структурную схему САУ можно рассматривать как один из видов сигнальных графов, и для определения передаточных функций пользоваться так называемой топологической формулой Мейсона (9.1). Используя эту формулу, можно рассчитать передаточную функцию (ПФ) между двумя любыми точками (X и Y) динамической системы (ДС) (рис. 9.1).

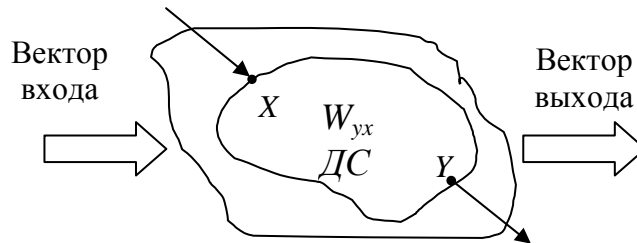


рис. 9.1.

Итак, выражение для произвольной ПФ $W_{yx}(s)$ выглядит так:

$$W_{yx}(s) = \frac{f_1(\text{кан})}{f_2(\text{кон})} = \frac{\sum_{i=1}^{i=r} H_i(s) \cdot \Phi_i(s)}{\Phi(s)}, \quad (9.1)$$

где: $f_1(\text{кан})$ и $f_2(\text{кон})$ – функции-изображения, определяемые соответственно конфигурациями каналов (прямых цепей от входа X к выходу Y) и контуров графа; $\Phi(s)$ – определитель графа (графа Мейсона) или блочной структурной схемы (БСС); $\Phi_i(s)$ – вырожденный i -й определитель графа.

$$\Phi(s) = 1 - \sum_{j=1}^{r_1} H_{1j}(s) + \sum_{k=1}^{r_2} H_{2k}(s) - \sum_{l=1}^{r_3} H_{3l}(s) + \dots, \quad (9.2)$$

где: $\Phi(s)$ – некоторое изображение, определяющее структуру графа системы; определитель графа; $H_{1j}(s)$ – ПФ j -го одиночного контура в разомкнутом состоянии, равная произведению ПФ звеньев контура; j – номер одиночного контура; $j = \overline{1, r_1}$; r_1 – количество одиночных контуров; H_{2k} – ПФ пары одиночных несоприкасающихся контуров, равная произведению ПФ

одинокных контуров, составляющих k -ю пару (несоприкасающиеся контуры – одиночные контуры, не имеющие общих узлов и/или дуг); k – номер пары одиночных неоприкасающихся контуров; $k = \overline{1, r_2}$; r_2 – количество пар (двоек) таких контуров.

Аналогично, $H_{3l}(s)$, l и r_3 – то же, но для тройки неоприкасающихся контуров. Контур – фрагмент системы («ячейка» по типу рамы окна), на всех участках которого сигналы направлены в одну сторону (по часовой стрелке или против).

$H_i(s)$ – ПФ i -го канала со входа X на выход Y ; равна произведению ПФ звеньев, формирующих данный канал; $\Phi_i(s)$ – вырожденный определитель графа для i -го канала.

Чтобы найти $\Phi_i(s)$, нужно занулить в формуле $\Phi(s)$ все слагаемые, соответствующие одиночным контурам и их сочетаниям (двойкам, тройкам и т.д.), соприкасающимся с i -м каналом. Таким образом, если все контуры и их сочетания соприкасаются с i -м каналом, то $\Phi_i(s) = 1$.

Рассмотрим пример использования формулы Мейсона. Требуется определить в заданной БСС системы (рис. 9.2) ПФ $W_{yx}(s)$.

Сформируем эквивалентный сигнальный граф (рис. 9.3). Графовая структурная схема (ГСС, граф Мейсона, М-граф) – это совокупность дуг (стрелок) и точек (узлов, вершин дуг). Дугой обозначается звено, а узлом – сигнал. Сигналы суммируются, как токи в узле электрической схемы. Дуга характеризуется оператором, т.е. ПФ звена. Сумматор (в БСС) заменяется на узел в ГСС. Узлы маркируются цифрами, проставляемыми рядом с узлами. Дуги маркируются также цифрами, но в окружностях над соответствующими дугами. Оператор указывается под дугой в угловых скобках.

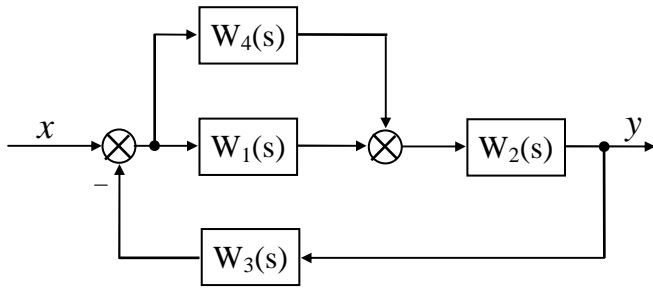


Рис. 9.2. Блочная структурная схема системы (S-граф)

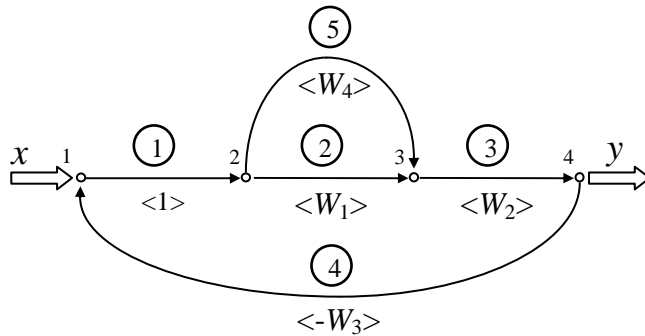


Рис. 9.3. Графовая структурная схема системы (M-граф)

Дуга 1 – единичная дуга – имеет вспомогательное назначение. Она позволяет более четко разграничить структуру графа. Рекомендуется стоящие подряд узел и сумматор (или сумматор и узел), изображать на графе в виде дуги с ПФ, равной $\langle 1 \rangle$, т.е. в виде единичной дуги.

Анализ графа показывает, что в его составе:

1. два одиночных контура ($j = 1, \overline{r_1} = 2$);
2. два канала ($i = 1, \overline{r} = 2$);
3. отсутствуют пары, тройки и т.д. контуров ($r_2 = r_3 = \dots = 0$).

Следовательно, ПФ одиночных контуров:

$$j = 1 \rightarrow H_{11}(s) = -W_1(s) \cdot W_2(s) \cdot W_3(s);$$

$$j = 2 \rightarrow H_{12}(s) = -W_4(s) \cdot W_2(s) \cdot W_3(s);$$

$$r_2 = 0; \text{ значит, } \sum_{k=1}^{r_2} H_{2k} = 0;$$

$$r_3 = 0; \text{ следовательно, } \sum_{l=1}^{r_3} H_{3k} = 0.$$

Таким образом,

$$\Phi(s) = 1 - H_{11}(s) - H_{12}(s) = 1 + W_2(s) \cdot W_3(s) \cdot [W_1(s) + W_4(s)].$$

Количество каналов $r = 2$, следовательно:

$$H_1(s) = W_1(s) \cdot W_2(s); H_2(s) = W_4(s) \cdot W_2(s).$$

Находим вырожденные определители. Так как все контуры соприкасаются с обоими каналами, то:

$$\Phi_1(s) = \Phi_2(s) = 1.$$

В итоге получаем ПФ системы:

$$W_{yx}(s) = \frac{W_2(s) \cdot [W_1(s) + W_4(s)]}{1 + W_2(s) \cdot W_3(s) \cdot [W_1(s) + W_4(s)]}.$$

9.2. Особенности топологического метода анализа

1. ПФ сложной многоконтурной САУ можно определить по СС без приведения ее к одноконтурной, используя формулу Мейсона из теории сигнальных графов. Формула позволяет без преобразования структурной схемы САУ определить любую ее передаточную функцию, т.е. отношение изображения одной из переменных (обобщенных координат) к изображению внешнего воздействия или другой переменной.

2. Применяя топологический метод, нужно иметь в виду следующее. Прямые цепи от X к Y могут частично совпадать одна с другой. При определении передаточной функции разомкнутой цепи каждого из контуров нужно учитывать знак обратной связи, образующей этот контур. Контур не соприкасается один с другим, когда у них нет ни общей координаты (стрелки на структурной схеме или узла в составе графа), ни общего звена (прямоугольника на структурной схеме или дуги на графе).

3. Если в структурной схеме – более трех несоприкасающихся контуров, то при вычислении функции $\Phi(s)$ нужно добавить в выражение $\Phi(s)$ соответствующие суммы.

4. Каждая из функций $\Phi_i(s)$ вычисляется так же, как и функция $\Phi(s)$, но рассматривается лишь та часть структурной схемы, которая не соприка-

сается с i -м каналом от X к Y . Если с i -м каналом соприкасаются все замкнутые контуры, то $\Phi_i(s) = 1$.

Следует сказать, что топологический метод анализа структурных схем лежит в основе алгоритмов машинного моделирования динамических структур, составляющих ядро многих инструментальных систем.

10. Преобразование структурных схем и сигнальных графов

С целью определения ПФ САУ по выходной координате $x_{\text{вых}}(t)$ относительно входного воздействия $x_{\text{вх}}(t)$, сложную систему, выраженную в виде блочной структурной схемы или сигнального графа, преобразуют по определенным правилам, учитывающих характер соединений звеньев между собой.

Для свертывания (нахождения общей эквивалентной) СС (блочных или графовых) сложных динамических систем удобно пользоваться – в качестве базовых – рядом правил модификации СС, учитывающим следующие виды соединений звеньев в системе.

а) Последовательное соединение звеньев

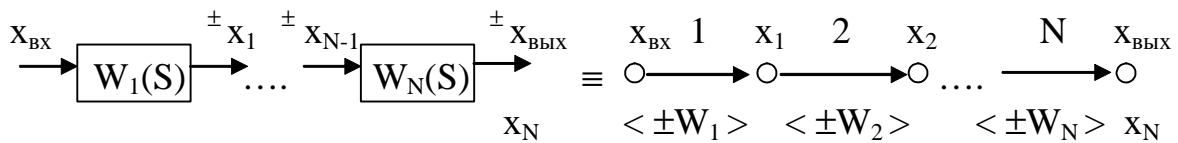


Рис. 10.1. Последовательное соединение звеньев

Здесь входом каждого последующего звена является выход предыдущего.

Запишем связи между звеньями в виде изображений.

$$L\{\pm x_1(t)\} = \pm x_1(s) = L\{\pm x_{\text{вх}}(t)\} \cdot [\pm W_1(s)],$$

$$L\{\pm x_2(t)\} = \pm x_2(s) = L\{\pm x_1(t)\} \cdot [\pm W_2(s)] = L\{\pm x_{\text{вх}}(t)\} \cdot \pm x_1(s) = [\pm W_1(s) \cdot W_2(s)],$$

$$L\{\pm x_{\text{вых}}(t)\} = \pm x_{\text{вых}}(s) = \pm x_N(s) = L\{\pm x_{N-1}(t)\} \cdot W_N(s) = \\ = L\{\pm x_{\text{вх}}(t)\} \cdot [\pm W_1(s) \cdot \dots \cdot W_N(s)].$$

Отсюда:

$$\frac{L\{x_{\text{вых}}(t)\}}{L\{x_{\text{вх}}(t)\}} = W(s) = \prod_{k=1}^N W_k(s), \quad (10.1)$$

где k – номер звена.

Следовательно, ПФ системы равна произведению ПФ последовательно соединенных звеньев.

б) Параллельное соединение звеньев

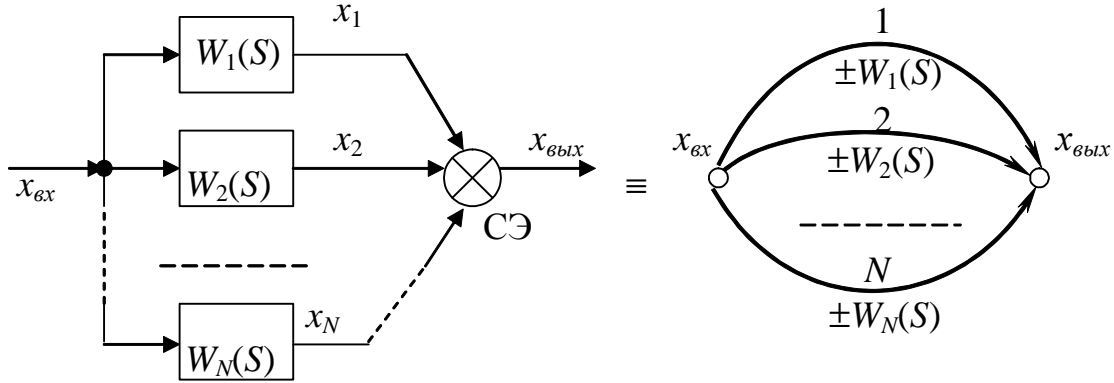


Рис. 10.2. Параллельное соединение звеньев

В этой схеме на вход каждого k -го звена ($k = \overline{1, N}$) подается один и тот же сигнал ($x_{вх}$). На выходе схемы выходные сигналы всех звеньев суммируются сумматором СЭ, в результате формируется выходной сигнал $x_{вых}$.

$$L\{x_1(t)\} = L\{x_{вх}(t)\} \cdot W_1(s);$$

$$L\{x_2(t)\} = L\{x_{вх}(t)\} \cdot W_2(s);$$

$$L\{x_N(t)\} = L\{x_{вх}(t)\} \cdot W_N(s).$$

$$\sum_{k=1}^N L\{x_{вых}(t)\} = L\{x_{вх}(t)\} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^N W_k(s) \right\}.$$

Отсюда:

$$\frac{L\{x_{вых}(t)\}}{L\{x_{вх}(t)\}} = W(s) = \sum_{k=1}^N W_k(s). \quad (10.2)$$

Значит, ПФ системы равна сумме ПФ параллельно соединенных звеньев.

**в) Соединение встречно – параллельного типа
(соединение с обратной связью)**

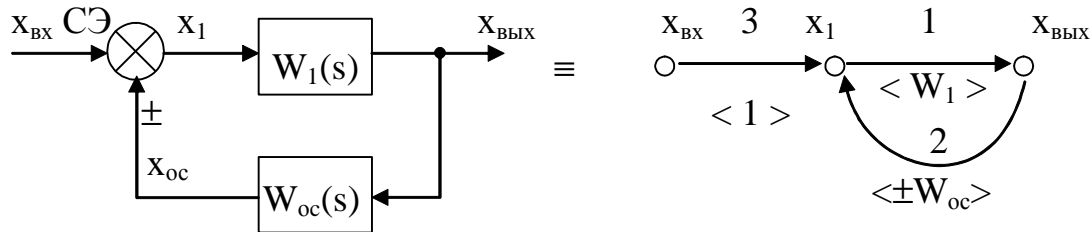


Рис. 10.3. Соединение звеньев с обратной связью

В этой схеме в прямой цепи находится звено с ПФ $W_1(s)$, во встречно – параллельной (в цепи обратной связи) – звено с ПФ $W_{oc}(s)$, т.е. звено с ПФ $W_1(s)$ охвачено обратной связью со звеном с ПФ $W_{oc}(s)$.

$$L\{x_{\text{вых}}(t)\} = L\{x_1(t)\} \cdot W_1(s) \quad (1^*)$$

$$L\{x_1(t)\} = L\{x_{\text{вх}}(t)\} \pm L\{x_{oc}(t)\} \quad (2^*)$$

$$L\{x_{oc}(t)\} = L\{x_{\text{вых}}(t)\} \cdot W_{oc}(s) \quad (3^*)$$

Подставив (3*) в (2*) и далее в (1*), получим:

$$W(s) = \frac{W_1(s)}{1 \mp W_1(s) \cdot W_{oc}(s)}, \quad (10.3)$$

т.е. ПФ такой системы равна ПФ прямой цепи $W_1(s)$, делённой на единицу плюс произведение ПФ-й прямой цепи и цепи обратной связи $W_{oc}(s)$ – для случая отрицательной обратной связи (минус – для случая положительной обратной связи).

г) Соединения с перекрестными обратными связями

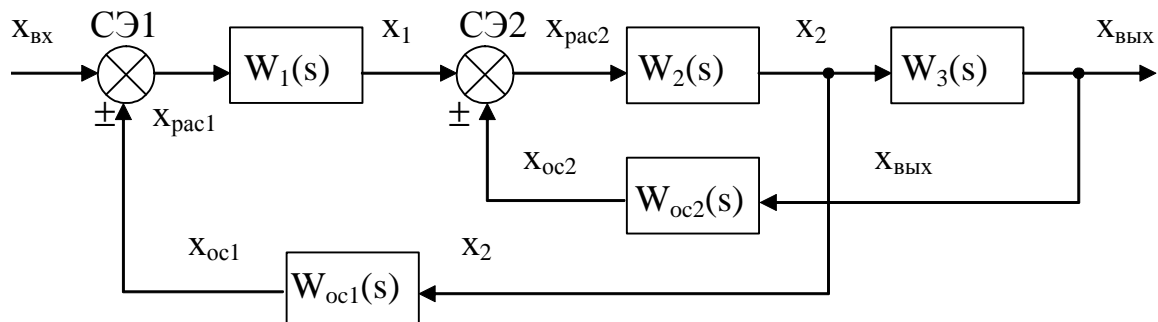


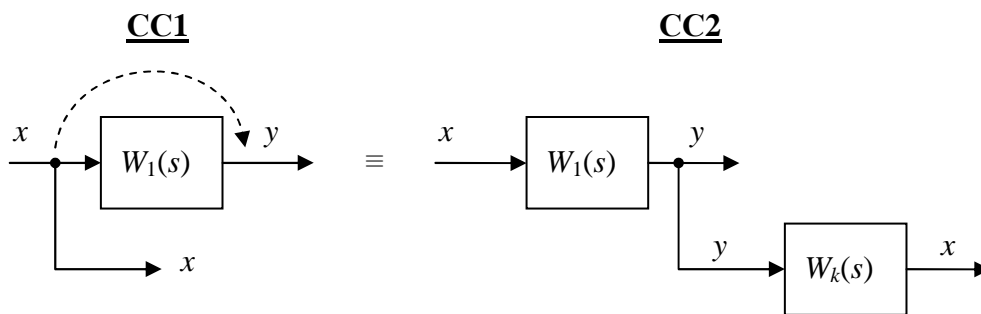
Рис. 10.4. Соединение звеньев с перекрестными связями

В такой схеме общую ПФ $W(S)=L\{x_{\text{вх}}\} / L\{x_{\text{вых}}\}$ можно найти, выразив через изображения сигнал $x_2(t)$, определенный двумя способами: при подходе к точке x_2 слева и справа. Решив полученное таким образом уравнение относительно $L\{x_{\text{вх}}\} / L\{x_{\text{вых}}\}$, получим:

$$W(s) = \frac{W_1(s)W_2(s)W_3(s)}{1 \mp W_1(s)W_2(s)W_{oc1}(s) \mp W_2(s)W_3(s)W_{oc2}(s)}. \quad (10.4)$$

Часто для упрощения исходной СС требуется перенести точку ветвления или сумматор вперед или назад по направлению прохождения сигнала через звено, стоящее на пути переноса. Для эквивалентирования исходной и модифицированной схем в модифицированную схему необходимо включить звено коррекции (эквивалентности) с ПФ $W_k(s)$. Условием эквивалентности является равенство сигналов в исходной и модифицированной схемах.

I. Перенос точки ветвления вперед через звено с ПФ $W_1(s)$



Условие эквивалентности СС1 и СС2: равенство сигналов x и y в обеих схемах.

Из СС1: $y(s) = x(s)W(s) \quad (1^*)$

Из СС2: $x(s) = y(s)W_k(s),$

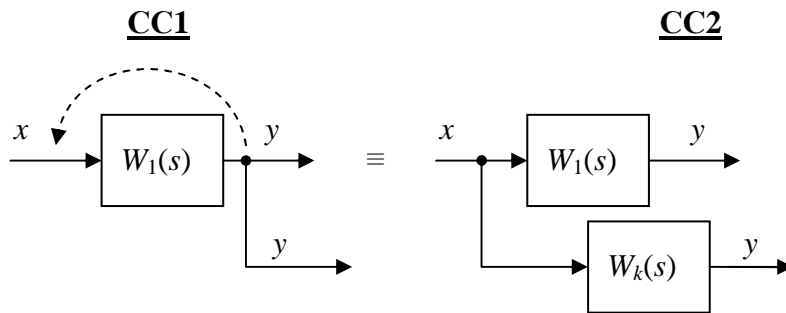
откуда $W(s) = \frac{x(s)}{y(s)} \quad (2^*)$

Подставив в (2*) $y(s)$ из (1*), получим $W_k(s) = \frac{x(s)}{x(s) \cdot W(s)} = W_1(s)^{-1},$

где $W_I(s)^{-1}$ – Обратная ПФ звена, через которое совершается перенос точки Ветвления.

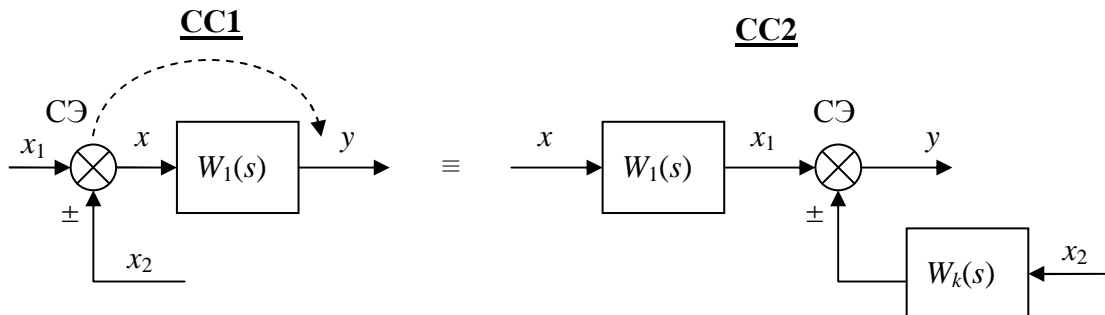
По аналогии рассуждений изобразим эквивалентные схемы для следующих случаев.

II. Перенос точки Ветвления Назад через звено с ПФ $W_I(s)$



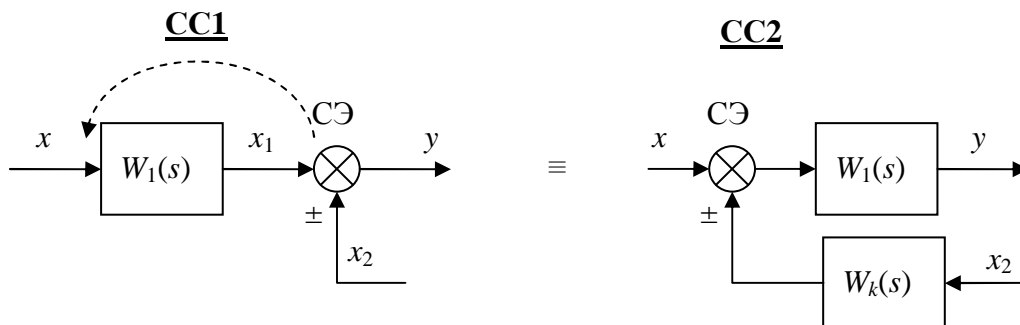
$$W_k(s) = W_1(s).$$

III. Перенос Сумматора с двумя входными сигналами x_1 и x_2 Вперед через звено с ПФ $W_I(s)$



$$W_k(s) = W_I(s) - (\text{прямая}) \text{ ПФ } W_1(s).$$

IV. Перенос Сумматора Назад через звено с ПФ $W_I(s)$



$$W_k(s) = W_I(s)^{-1} - \text{Обратная ПФ.}$$

Для простоты запоминания типа ПФ коррекции $W_k(s)$ можно воспользоваться таким мнемоническим правилом (на алфавитной основе):

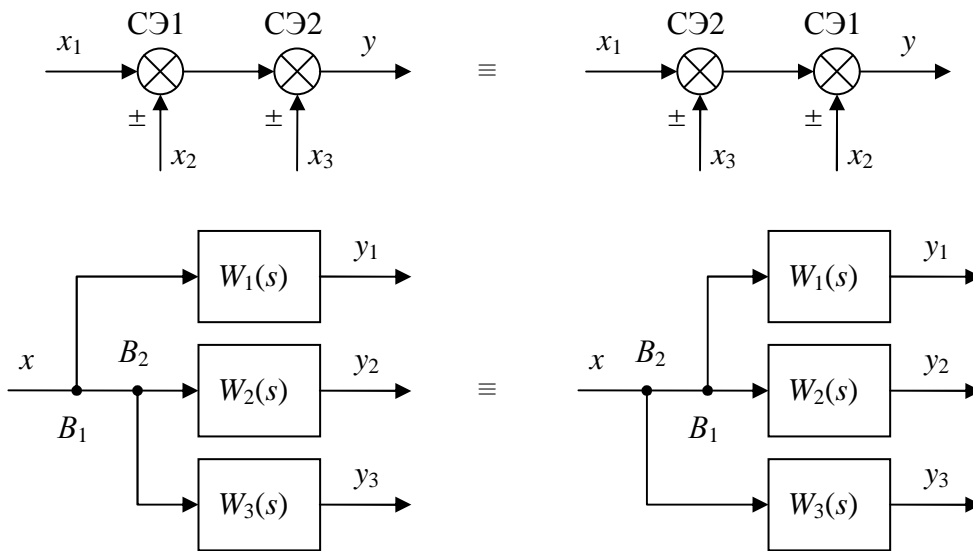
Перенос (точки) Ветвления через $W(s)$: Вперед \rightarrow Обратная ПФ W^1 .

Итоговое правило: **В-В-О**.

Перенос (точки) Ветвления через $W(s)$: Назад \rightarrow Прямая ПФ W . Итоговое правило: **В-Н-П**.

Аналогично для Сумматора: Вперед \rightarrow С-В-П. Назад \rightarrow С-Н-О.

Заметим, что сумматоры, так же, как и точки ветвления, можно менять местами – без утраты эквивалентности схем.



С помощью приведенных выше правил любую сложную СС можно преобразовать в одноконтурную схему (рис. 10.5):

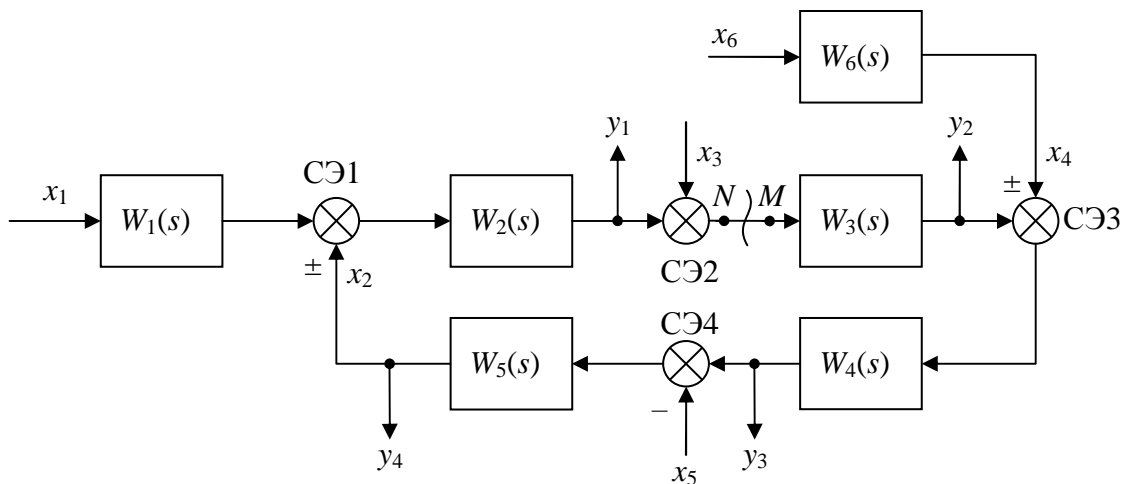


Рис. 10.5. Одноконтурная система

Схема замкнутой САР называется одноконтурной, если при её размыкании в какой-либо точке (например, на входе звена с ПФ W_3) образуется цепь, не содержащая параллельных ветвей и обратных связей. Цепь последовательно соединенных звеньев, находившихся в составе замкнутого контура, называется разомкнутым контуром системы (рис. 10.6).

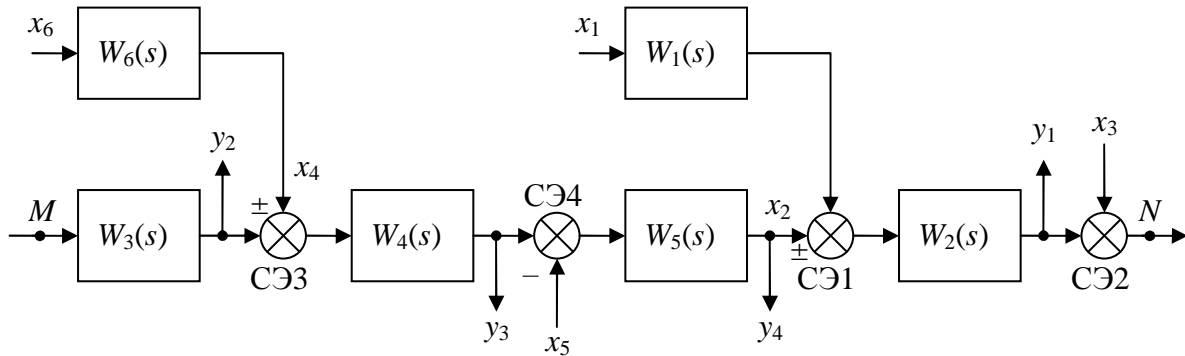


Рис. 10.6. Разомкнутый контур системы

Поэтому ПФ разомкнутого контура $W_p(s)$ одноконтурной системы равна произведению ПФ звеньев, стоящих в составе замкнутого контура. При этом ПФ звеньев, стоящих за пределами замкнутого контура, не входят в произведение $W_p(s)$: $W_p(s) = W_2(s)W_3(s)W_4(s)W_5(s)$.

ПФ разомкнутого контура (цепи) входит в выражение ПФ замкнутой системы. Например, для канала (прямой цепи) « $x_1 - y_4$ » ПФ $\Phi(s)_{41}$ равна:

$$\Phi(s)_{41} = \frac{y_4(s)}{x_1(s)} = \frac{\pm W_1(s) \cdot W_2(s) \cdot W_3(s) \cdot W_4(s)}{1 + W_p(s)},$$

где: $W_p(s) = W_2(s)W_3(s)W_4(s)W_5(s)$.

Знак « \pm » в числителе соответствует знаку сигнала y_3 на сумматоре СЭ3. В рассматриваемой схеме четыре внешних воздействия (x_1, x_3, x_6, x_5) и четыре выходных переменных (y_2, y_3, y_4, y_5), поэтому для каждого канала «вход-выход» замкнутой системы может быть определена своя ПФ. Если $i = \overline{1, m}$ – номер входного воздействия, а $k = \overline{1, r}$ – номер выходной переменной (координаты), то ПФ $W(s)_{ki}$ равна:

$$\Phi(s)_{ki} = \frac{y_k(s)}{x_i(s)} = \frac{W(s)_{ki}}{1 + W_p(s)}, \quad (10.5)$$

т.е. ПФ одноконтурной системы $\Phi(s)_{ki}$ по выходу y_k относительно входа x_i равна ПФ прямой цепи $W(s)_{ki}$, деленной на единицу плюс ПФ разомкнутого контура $W_p(s)$.

После определения ПФ между всеми m входами и одним из r выходов y_k можно на основании принципа суперпозиции для линейных систем записать уравнение динамики замкнутой системы для выхода y_k :

$$y_k(s) = \sum_{i=1}^m y_{ki}(s) = \sum_{i=1}^m x_i(s) \cdot \Phi(s)_{ki}, \quad (10.6)$$

где $y_{ki}(s)$ – изображение составляющей выходного сигнала $y_k(s)$ от действия i -го входного сигнала.

Так как $\Phi(s)_{ki} = \frac{W(s)_{ki}}{1 + W_p(s)}$, то $y_k(s) = \frac{\sum_{i=1}^m x_i(s) \cdot W(s)_{ki}}{1 + W_p(s)}$, значит ДУД в

изображениях для выхода y_k будет выглядеть так:

$$y_k(s) [1 + W_p(s)] = \sum_{i=1}^m x_i(s) \cdot W(s)_{ki}, \quad (10.7)$$

где $[1 + W_p(s)]$ – собственный (системный) оператор.

Уравнение $1 + W_p(s) = 0$ называется характеристическим уравнением одноконтурной системы в общей форме.

Отсюда следует, что характеристическое уравнение замкнутой одноконтурной системы выглядит как приравненное нулю выражение «единица плюс ПФ разомкнутой цепи (контура)».

Так как $W_p(s) = \frac{G_p(s)}{D_p(s)}$, то характеристическое уравнение замкнутой

одноконтурной системы

$$D_p(s) + G_p(s) = 0,$$

где $[D_p(s) + G_p(s)]$ – характеристический полином замкнутой одноконтурной системы.

При использовании формулы Мейсона для определения ПФ по какому-либо каналу в многоконтурной системе характеристическое уравнение получается приравниванием нулю выражения определителя $\Phi(s)$ многоконтурной схемы.

11. Анализ динамических систем в пространстве состояний

Помимо методов расчета систем управления, оперирующих моделями «вход-выход» (или точнее «вход-система-выход»), основу которых составляет аппарат передаточных функций и дифференциальных уравнений динамики в пространстве изображений, в настоящее время получили большое развитие методы машинного решения моделей, составленных на основе обобщенного подхода к исследованию динамических систем с использованием векторно-матричного исчисления.

Одним из таких методов является метод пространства состояний (переменных состояния). В его основе – представление реальной исследуемой системы в виде многомерного (векторного) объекта. В отличие от скалярного (имеющего один вход и один выход) у векторного объекта (или системы) может быть несколько входных и несколько выходных переменных (сигналов, координат)

Например, электрогенератор переменного тока (ЭГПТ) имеет две входные переменные (два входа) в виде напряжения обмотки возбуждения $U_v(t)$ и скорости (частоты) вращения ротора $\omega_p(t)$, а также две выходные – в виде напряжения статора $U_c(t)$ и частоты электрического тока $f(t)$:

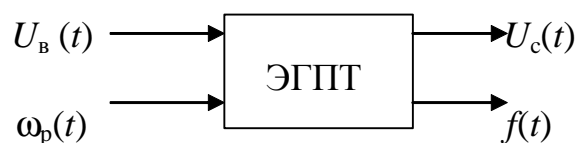


Рис. 11.1. Схема электрогенератора постоянного тока

Примером более сложного векторного (многомерного) элемента является такой объект управления, как технологический процесс смесеприготовления на основе сыпучих материалов, характеризующийся целым рядом входных и выходных переменных.

К входным переменным, например, относятся материальные потоки, поступающие от блока дозирующих устройств, режимные параметры доза-

торов, от которых зависит структура этих потоков, динамика подачи материалов от дозаторов к смесительному устройству и т.д. К выходным управляемым переменным относятся показатели качества результирующей смеси (содержания основного компонента и сопутствующих добавок), а также большое число режимно-контруктивных и расходовых параметров в разных точках смесительного устройства (в каналах прямой и обратной подачи материалопоков).

В качестве выходных переменных могут использоваться как реальные, поддающиеся измерению, физические переменные, так и абстрактные, на поддающиеся измерению, переменные, например, производные (скорости, ускорения, импульсы и т.д.) от наблюдаемых выходных переменных. На такой основе любой скалярный динамический элемент, описываемый дифференциальным уравнением n -го порядка (при $n > 1$), может рассматриваться как многомерный (векторный).

Таким образом, с помощью определенного набора переменных (входных, выходных, внутренних) можно полностью охарактеризовать *состояние* любой динамической (векторной или скалярной) системы.

Математическая модель динамики системы, оперирующая переменными состояниями, является моделью, сформированной в так называемом пространстве состояний. Данная модель при этом записывается через функции-оригиналы, и не использует изображения по Лапласу. Модель записывается частично в виде дифференциальных уравнений 1-го порядка в векторно-матричной форме (ВМФ); частично – в виде алгебраических уравнений; в структурном отношении дифференциальные уравнения должны иметь так называемую *форму Коши*.

Полная математическая модель линейной векторной (многомерной) динамической системы n -го порядка состоит из 2-х векторно-матричных уравнений:

1. дифференциального *уравнения состояния* 1-го порядка (в нормальной форме Коши);
2. алгебраического *уравнения выхода* (наблюдения).

В скалярной форме матричное уравнение состояния записывается в виде n обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Для одномерного объекта (системы) n -го порядка переменными состояния могут служить выходная координата и её $(n-1)$ производных. В этом случае, т.е. когда переменные состояния связаны соотношением

$$\frac{dx_j(t)}{dt} = \dot{x}_j(t) = x_{j+1}(t); \quad j = \overline{1, n-1}, \quad (11.1)$$

переменные состояния называются *фазовыми переменными*. При этом n – мерное пространство, координаты которого – переменные состояния, именуется *пространством состояния*, а способ описания систем посредством таких переменных, называется *методом пространства состояний* (*методом переменных состояния*).

Таким образом, состояние системы описывается вектором переменных состояния (ПС)

$$\overline{x_j(t)}, \quad j = \overline{1, n},$$

где n – порядок характеристического полинома.

Вектор $x_j(t)$ ПС, изменяясь во времени в гиперпространстве R^n состояния системы, образует в нем *гиперповерхность состояния*. Помимо ПС, на выходе фиксируется вектор $\overline{y_k(t)}$ выходных координат (или иначе – вектор наблюдения), а на входе действует вектор $\overline{u_i(t)}$ управляющих воздействий (вектор управления):

Математическая модель ДС в терминах пространства состояний записывается так:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Bu}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{Cx}(t) + \mathbf{Du}(t) \end{cases} \quad (11.2)$$

где \mathbf{A} – матрица состояния системы; размерность $\dim \mathbf{A}=[n \times n]$; \mathbf{B} – матрица управления; $\dim \mathbf{B}=[n \times m]$; \mathbf{C} , \mathbf{D} – соответственно матрицы выхода по состоянию и управлению; $\dim \mathbf{C}=[r \times n]$; $\dim \mathbf{D}=[r \times m]$; m, n, r – размерности векторов входа, ПС и выхода; i, j, k – порядковые номера скалярных входных воздействий, ПС-я и выходных координат (реакций).

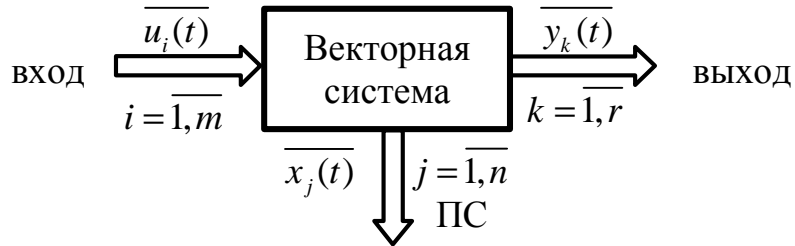


Рис. 11.2. Векторная система

Блок – схема реализации математической модели имеет вид:

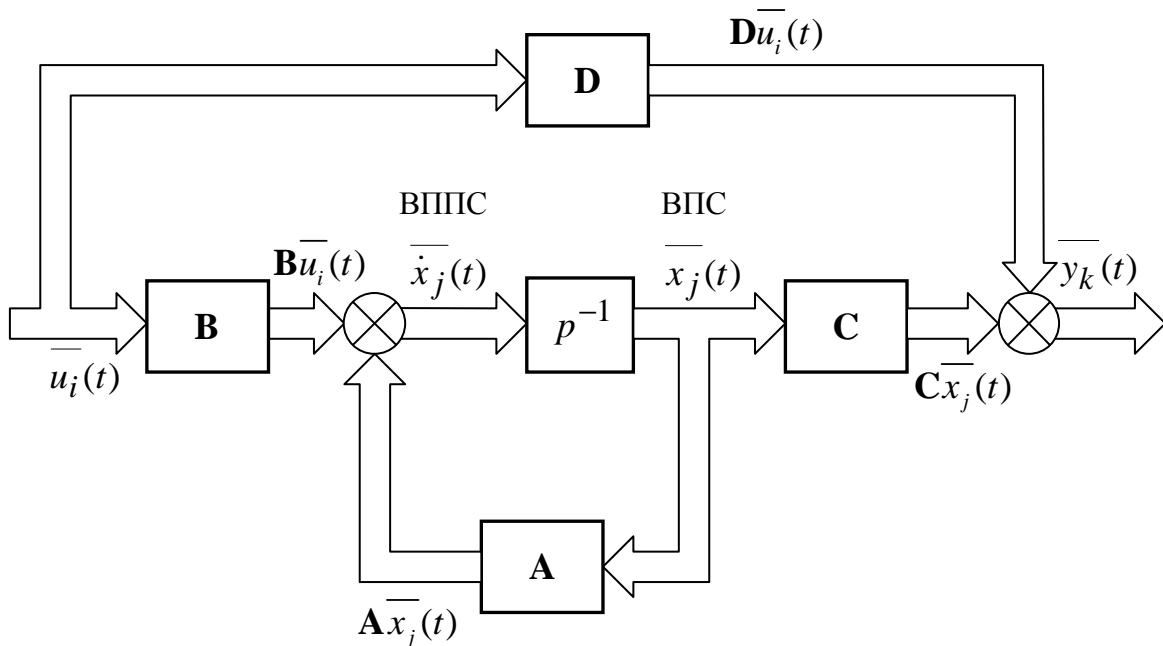
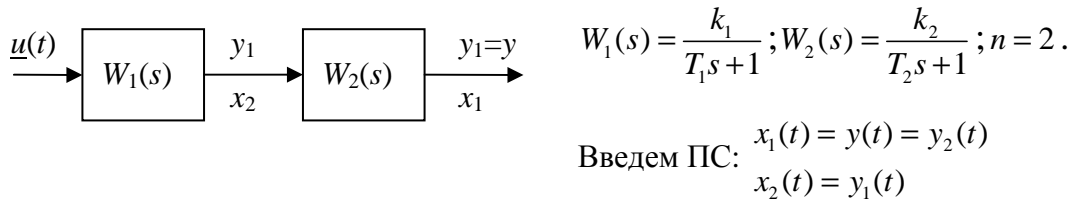


Рис. 11.3. Блок-схема структурной реализации векторно-матричной математической модели

Здесь ВПС – вектор переменных состояния; ВППС – вектор производных переменных состояния; p^{-1} – интегратор.

Рассмотрим пример составления математической модели в векторно-математической форме для скалярных систем.

Пример 11.1.: Система состоит из двух соединенных последовательно звеньев апериодического типа.



ДУД в операторной форме для первого звена:

$$y_1(t)(Tp + 1) = k_1 u(t).$$

Отсюда одно из двух скалярных уравнений состояния равно:

$$\dot{y}_1(t) = \dot{x}_2(t) = -T_1^{-1} x_2(t) + k_1 T_1^{-1} u(t)$$

Аналогично получим второе скалярное уравнение состояния:

$$\dot{y}(t) = \dot{x}_1(t) = -T_2^{-1} x_1(t) + k_2 T_2^{-1} x_2(t).$$

Составим блок-схему реализации модели системы в скалярном виде:

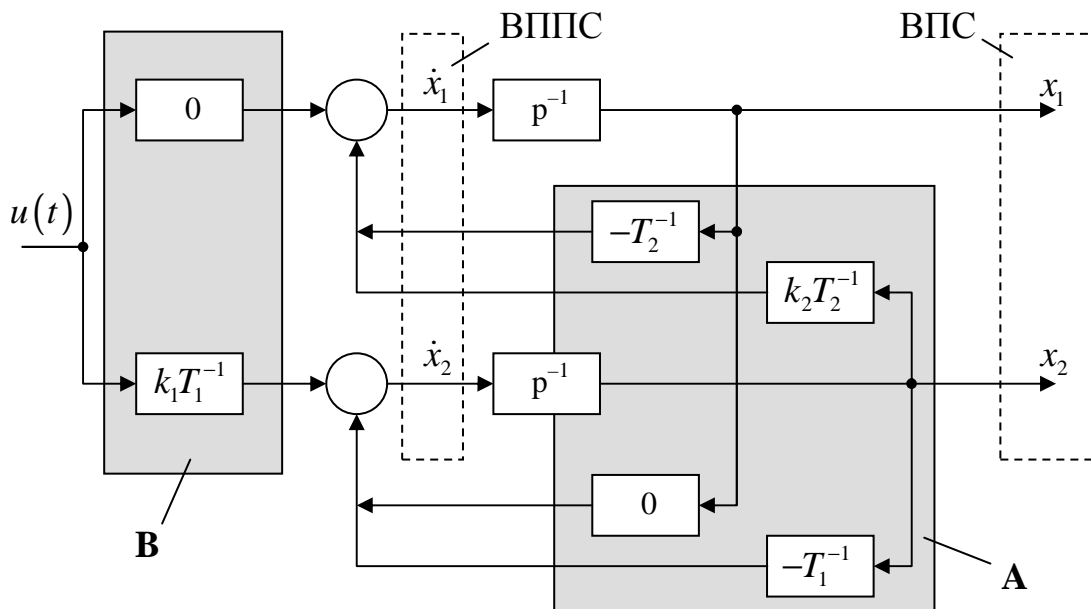


Рис. 11.4. Блок-схема реализации модели системы в скалярном виде

В соответствии с данной схемой уравнение состояния в матричной форме запишется так:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -T_2^{-1} & k_2 T_2^{-1} \\ 0 & -T_1^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ k_1 T_1^{-1} \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

Альтернативная модель, соответствующая другому набору переменных состояния

$$x_1(t) = y_1(t)$$

$$x_2(t) = y_2(t)$$

записывается следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -T_1^{-1} & 0 \\ k_2 T_2^{-1} & -T_2^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 T_1^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

Отметим, что конечная модель не содержит уравнения выхода, поскольку выходная координата выражена через одну из переменных состояния.

12. Метод определения переходной функции по вещественной частотной характеристике

В различных источниках данный метод называют по-разному: метод h -функций, метод трапеций, метод В.В. Солодовникова. Основой метода является зависимость между переходной характеристикой h устойчивой САР и ее вещественной характеристикой $Re(\omega)$ относительно одного из внешних воздействий:

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Re(\omega) \sin \omega t}{\omega} d\omega. \quad (12.1)$$

Суть метода заключается в следующем. Интеграл (12.1) вычислен при различных значениях параметров ВЧПФ простейшей формы (трапеция или треугольник) и результаты сведены в таблицу. Реальную характеристику $Re(\omega)$ разбивают на несколько простейших $Re(\omega)_i$:

$$Re(\omega) \approx \sum_{i=1}^n Re(\omega)_i. \quad (12.2)$$

Для каждой простейшей характеристики $Re(\omega)_i$ с помощью таблицы определяют соответствующую ей характеристику h_i . Тогда переходная характеристика h , соответствующая ВЧПФ, определяется суммированием составляющих h_i :

$$h \approx \sum_{i=1}^n h_i. \quad (12.3)$$

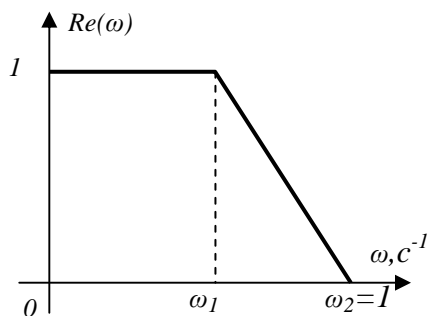


Рис. 12.1 Единичная трапецеидальная ВЧПФ

В качестве типовой В.В. Солодовниковым выбрана единичная трапецеидальная ВЧПФ (рис. 12.1). Ее высота равна единице и основание $\omega_2 = 1 \text{ с}^{-1}$. Изменяющимся параметром является отношение меньшей параллельной стороны ω_1 к большей (к основанию):

$$\chi = \omega_1 / \omega_2,$$

которое называется коэффициентом наклона. Частоты ω_1 и ω_2 называют частотами равномерного и неравномерного пропускания соответственно.

По равенству (12.1) вычислены значения h , соответствующие единичной трапеции с различным коэффициентом наклона χ от 0 до 1, при различных значениях условного времени $\tau = t\omega_2$. Эти значения h называются h -функциями и приведены в таблице 12.

Построение переходной характеристики h методом трапеций по ВЧПФ состоит из нескольких этапов.

1. Вещественную частотную характеристику разбивают на трапеции (рис. 12.2). Для этого действительную кривую характеристики заменяют приближенно прямолинейными отрезками и концы каждого отрезка соединяют с осью ординат прямыми, параллельными оси абсцисс. Первый отрезок должен начинаться из точки $Re(0)$, так как эта точка определяет конечное значение переходной характеристики. Более тщательно необходимо аппроксимировать начальную часть ВЧПФ. Ее «хвост», т.е. конечную часть с ординатами, меньшими по абсолютному значению, чем $0,1Re(0)$, можно не принимать во внимание.

2. Определяют параметры трапеций. Для каждой из i -й трапеции по графику находят частоты ω_1^i и ω_2^i и высоту $Re(\omega)_i$. Частоты отсчитывают от начала осей координат. По значениям ω_1^i и ω_2^i вычисляют коэффициент наклона χ_i и округляют его до ближайшего из значений 0; 0,05; ... 0,95; 1. Величину $Re(\omega)_i$ считают положительной, если меньшая параллельная сторона трапеции расположена выше большей, и отрицательной – в противоположном случае. Сумма высот всех трапеций равна $Re(0)$.

Таблица 12 – Таблица h -функций

τ	X	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0,50	0,138	0,165	0,176	0,184	0,192	0,199	0,207	0,215	0,223	0,231	0,240	0,248	0,255	0,259	0,267	0,275	0,282	0,290	0,297	0,304	0,314
1,00	0,310	0,325	0,340	0,356	0,371	0,386	0,402	0,417	0,432	0,447	0,461	0,476	0,490	0,505	0,519	0,534	0,547	0,561	0,575	0,590	0,602
1,50	0,449	0,469	0,494	0,516	0,538	0,560	0,594	0,603	0,617	0,646	0,665	0,685	0,706	0,722	0,740	0,758	0,776	0,794	0,813	0,832	0,844
2,00	0,571	0,560	0,628	0,655	0,682	0,709	0,732	0,761	0,785	0,810	0,831	0,856	0,878	0,899	0,919	0,938	0,957	0,974	0,991	1,008	1,022
2,50	0,674	0,707	0,739	0,771	0,802	0,833	0,862	0,891	0,917	0,943	0,967	0,985	1,010	1,030	1,050	1,067	1,084	1,090	1,105	1,120	1,133
3,00	0,755	0,792	0,828	0,863	0,895	0,928	0,958	0,986	1,013	1,038	1,061	1,081	1,100	1,116	1,131	1,143	1,154	1,162	1,169	1,175	1,177
3,50	0,815	0,853	0,892	0,928	0,963	0,994	1,024	1,050	1,074	1,095	1,115	1,132	1,145	1,158	1,165	1,170	1,174	1,174	1,175	1,176	1,175
4,00	0,856	0,898	0,937	0,974	1,008	1,039	1,066	1,090	1,110	1,127	1,141	1,151	1,158	1,162	1,163	1,161	1,156	1,150	1,141	1,132	1,119
4,50	0,883	0,923	0,960	0,998	1,029	1,057	1,084	1,104	1,120	1,129	1,138	1,141	1,141	1,138	1,132	1,127	1,111	1,099	1,085	1,071	1,053
5,00	0,895	0,939	0,977	1,012	1,042	1,067	1,087	1,102	1,112	1,117	1,117	1,114	1,107	1,097	1,084	1,069	1,053	1,036	1,019	1,003	0,987
5,50	0,900	0,940	0,986	1,015	1,042	1,063	1,079	1,088	1,092	1,096	1,090	1,070	1,064	1,050	1,032	1,016	0,994	0,979	0,962	0,951	0,932
6,00	0,903	0,945	0,981	1,013	1,037	1,054	1,065	1,070	1,068	1,062	1,051	1,036	1,020	1,001	0,984	0,956	0,949	0,934	0,922	0,914	0,907
6,50	0,904	0,943	0,980	1,009	1,029	1,043	1,050	1,049	1,043	1,033	1,018	1,001	0,982	0,965	0,948	0,936	0,920	0,910	0,906	0,904	0,905
7,00	0,904	0,945	0,978	1,006	1,024	1,034	1,037	1,033	1,023	1,009	0,992	0,975	0,957	0,941	0,927	0,917	0,911	0,909	0,911	0,917	0,926
7,50	0,907	0,945	0,980	1,005	1,021	1,027	1,027	1,020	1,005	0,989	0,974	0,956	0,944	0,931	0,922	0,919	0,920	0,927	0,934	0,946	0,962
8,00	0,911	0,951	0,983	1,007	1,020	1,024	1,021	1,011	0,998	0,982	0,966	0,952	0,941	0,934	0,932	0,936	0,944	0,955	0,970	0,986	1,002
8,50	0,918	0,956	0,989	1,010	1,021	1,024	1,018	1,007	0,993	0,978	0,964	0,954	0,948	0,948	0,951	0,958	0,974	0,990	1,006	1,023	1,041
9,00	0,925	0,966	0,996	1,016	1,025	1,025	1,018	1,006	0,992	0,978	0,968	0,962	0,961	0,967	0,976	0,990	1,006	1,023	1,038	1,051	1,060
9,50	0,932	0,972	1,004	1,020	1,028	1,026	1,018	1,006	0,993	0,982	0,975	0,972	0,977	0,987	1,000	1,015	1,033	1,048	1,059	1,065	1,066
10,00	0,939	0,980	1,009	1,025	1,030	1,027	1,018	1,005	0,994	0,985	0,982	0,984	0,993	1,006	1,020	1,036	1,049	1,059	1,063	1,062	1,056
10,50	0,946	0,985	1,013	1,028	1,031	1,026	1,016	1,004	0,994	0,989	0,988	0,994	1,005	1,019	1,033	1,046	1,054	1,058	1,055	1,048	1,033
11,00	0,947	0,988	1,015	1,028	1,030	1,024	1,013	1,002	0,993	0,990	0,993	1,001	1,014	1,027	1,039	1,047	1,048	1,044	1,034	1,021	1,005
11,50	0,949	0,988	1,016	1,027	1,028	1,021	1,010	0,998	0,991	0,991	0,996	1,006	1,017	1,029	1,037	1,039	1,034	1,024	1,010	0,994	0,977
12,00	0,950	0,990	1,015	1,025	1,024	1,015	1,004	0,994	0,998	0,990	0,997	1,007	1,018	1,026	1,029	1,025	1,015	1,000	0,984	0,970	0,958
12,50	0,950	0,989	1,013	1,022	1,019	1,010	0,998	0,990	0,986	0,989	0,997	1,007	1,015	1,019	1,017	1,010	0,995	0,980	0,965	0,955	0,950
13,00	0,950	0,989	1,012	1,019	1,015	1,004	0,993	0,986	0,984	0,989	0,997	1,006	1,012	1,012	1,005	0,993	0,980	0,965	0,955	0,952	0,955
13,50	0,950	0,990	1,011	1,016	1,011	1,000	0,990	0,983	0,984	0,989	0,998	1,005	1,008	1,004	0,995	0,982	0,968	0,958	0,954	0,958	0,970
14,00	0,951	0,990	1,010	1,015	1,008	0,997	0,987	0,983	0,985	0,991	0,999	1,005	1,005	0,998	0,987	0,975	0,965	0,961	0,965	0,976	0,991
14,50	0,954	0,990	1,011	1,014	1,008	0,996	0,986	0,984	0,987	0,994	1,002	1,005	1,003	0,994	0,983	0,970	0,969	0,971	0,981	0,997	1,010
15,00	0,956	0,993	1,012	1,014	1,006	0,995	0,987	0,986	0,991	0,998	1,005	1,006	1,002	0,994	0,983	0,977	0,978	0,987	1,001	1,018	1,032

Таблица 12 (продолжение)

15,50	0,959	0,995	1,013	1,014	1,006	0,995	0,989	0,989	0,995	1,002	1,008	1,007	1,001	0,992	0,985	0,984	0,991	1,003	1,019	1,032	1,048
16,00	0,961	0,998	1,015	1,014	1,006	0,995	0,990	0,992	0,999	1,007	1,010	1,010	1,008	1,001	0,990	0,993	1,003	1,018	1,031	1,040	1,039
16,50	0,964	0,999	1,016	1,015	1,005	0,996	0,992	0,995	1,002	1,009	1,011	1,008	1,001	0,995	0,995	1,001	1,014	1,027	1,035	1,037	1,028
17,00	0,965	1,001	1,016	1,014	1,005	0,996	0,993	0,998	1,005	1,011	1,012	1,007	1,000	0,996	0,999	1,008	1,020	1,030	1,032	1,026	1,012
17,50	0,966	1,002	1,016	1,013	1,003	0,995	0,994	0,999	1,007	1,011	1,009	1,005	0,998	0,997	1,002	1,012	1,023	1,027	1,023	1,012	0,994
18,00	0,966	1,002	1,015	1,012	1,002	0,994	0,994	1,000	1,007	1,010	1,008	1,001	0,997	0,997	1,004	1,014	1,020	1,018	1,008	0,993	0,978
18,50	0,966	1,001	1,014	1,010	1,000	0,993	0,994	1,001	1,007	1,009	1,005	0,999	0,995	0,997	1,005	1,012	1,014	1,007	0,993	0,978	0,969
19,00	0,966	1,002	1,013	1,008	0,998	0,992	0,994	1,001	1,006	1,006	1,001	0,995	0,993	0,997	1,004	1,009	1,006	0,995	0,981	0,970	0,967
19,50	0,967	1,001	1,012	1,006	0,996	0,991	0,994	1,001	1,005	1,004	0,998	0,992	0,992	0,997	1,003	1,005	0,998	0,985	0,973	0,967	0,973
20,00	0,967	1,001	1,011	1,004	0,995	0,991	0,994	1,001	1,004	1,001	0,995	0,991	0,992	0,998	1,003	1,001	0,991	0,980	0,972	0,975	0,986
20,50	0,968	1,002	1,010	1,003	0,994	0,991	0,995	1,001	1,003	1,000	0,994	0,991	0,994	0,999	1,002	0,998	0,987	0,978	0,977	0,990	1,001
21,00	0,968	1,002	1,010	1,003	0,994	0,991	0,996	1,002	1,003	0,999	0,993	0,992	0,996	1,001	1,002	0,996	0,987	0,982	0,989	1,001	1,015
21,50	0,969	1,003	1,010	1,002	0,994	0,992	0,999	1,002	1,003	0,998	0,994	0,995	0,999	0,995	1,002	0,995	0,988	0,988	0,988	1,013	1,025
22,00	0,971	1,004	1,011	1,002	0,994	0,994	1,000	1,005	1,004	0,998	0,995	0,997	1,000	1,004	1,002	0,995	0,991	0,997	1,010	1,024	1,029
22,50	0,973	1,005	1,011	1,002	0,995	0,995	1,002	1,006	1,004	0,998	0,996	1,000	1,005	1,005	1,002	0,996	0,996	1,006	1,018	1,028	1,028
23,00	0,973	1,006	1,011	1,002	0,995	0,997	1,003	1,006	1,004	0,998	0,997	1,002	1,007	1,007	1,002	0,997	1,001	1,011	1,022	1,035	1,016
23,50	0,975	1,006	1,011	1,002	0,995	0,998	1,004	1,006	1,003	0,998	0,998	1,003	1,008	1,006	1,001	0,998	1,004	1,015	1,021	1,016	1,002
24,00	0,975	1,006	1,010	1,001	0,995	0,998	1,005	1,006	1,002	0,998	0,999	1,004	1,007	1,004	0,999	0,999	1,007	1,015	1,016	1,006	0,990
24,50	0,975	1,006	1,009	1,000	0,995	0,999	1,005	1,005	1,000	0,997	1,000	1,004	1,006	1,002	0,998	0,999	1,007	1,012	1,007	0,995	0,990
25,00	0,975	1,006	1,008	0,999	0,995	0,999	1,004	0,999	0,999	0,996	1,000	1,004	1,004	0,999	0,996	1,000	1,007	1,008	0,998	0,984	0,975
25,50	0,975	1,006	1,007	0,998	0,994	0,999	1,004	1,002	0,997	0,996	1,000	1,003	1,002	0,997	0,995	1,000	1,005	1,001	0,989	0,978	0,975
26,00	0,975	1,005	1,006	0,997	0,994	0,999	1,003	1,001	0,996	0,996	1,001	1,001	0,997	0,994	0,997	1,001	0,998	0,989	0,984	0,991	1,006
27,00	0,976	1,005	1,005	0,996	0,994	1,000	1,003	0,999	0,995	0,997	1,003	1,001	0,997	0,997	1,001	1,003	0,997	0,992	0,997	1,011	1,022
28,00	0,977	1,006	1,005	0,996	0,996	1,001	1,003	0,999	0,996	0,999	1,004	1,001	0,998	1,001	1,005	1,003	0,998	1,000	1,011	1,021	1,017
29,00	0,979	1,007	1,005	0,997	0,998	1,003	1,004	0,999	0,998	1,002	1,003	1,000	0,999	1,004	1,005	1,002	0,999	1,006	1,015	1,012	0,997
30,00	0,980	1,007	1,004	0,997	0,999	1,004	1,003	0,999	0,999	1,003	1,002	0,998	1,000	1,004	1,002	0,998	1,000	1,007	1,006	0,994	0,982

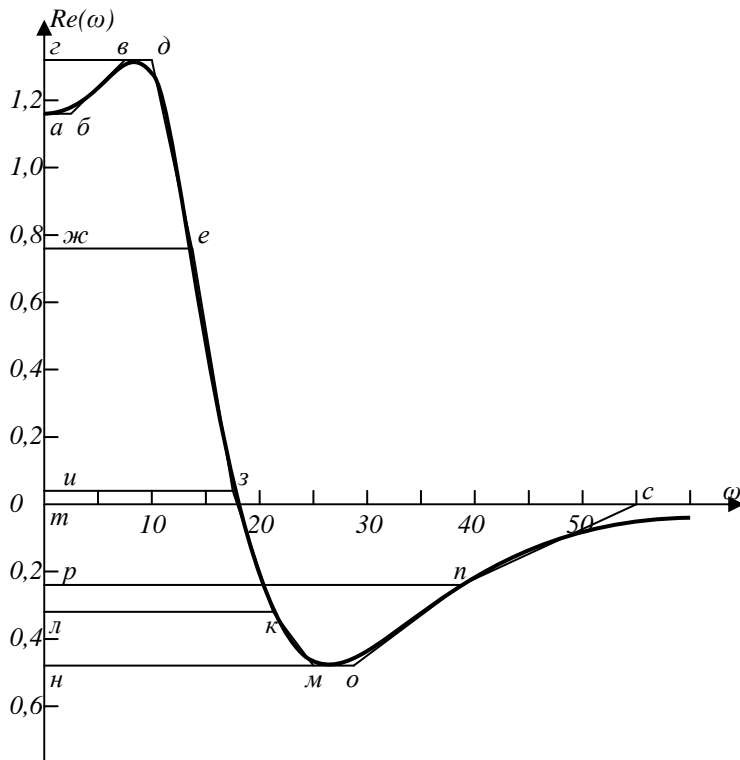


Рис.12.2. Аппроксимация ВЧПФ трапециями

3. Определяют составляющие переходной характеристики. В таблице h -функций для каждой i -й трапеции отыскивают столбец, соответствующий значению χ_i . Затем для ряда значений условного времени τ определяют соответствующие им значения $h(\tau)$. По значениям τ и $h(\tau)$ вычисляют значения действительного времени t

и составляющей h_i переходной характеристики:

$$t_i = \tau / \omega_2^i; \quad h_i = Re(\omega)_i h(\tau). \quad (12.5)$$

Иногда можно брать лишь часть значений τ . Чем больше ω_2^i , тем меньше точек можно брать. При этом следует выбирать точки, равномерно отстоящие одна от другой и определяющие максимумы и минимумы $h(\tau)$.

4. Строят график составляющих переходной характеристики (рис. 12.3). Все составляющие располагают на одном графике; знак каждой из них определяется знаком высоты $Re(\omega)_i$ соответствующей трапеции.

Обычно оказывается, что некоторые составляющие определены на меньших отрезках времени, чем другие. Это означает, что указанные составляющие раньше других достигли установившихся значений и в дальнейшем остаются неизменными.

5. Строят график переходной характеристики. Ординаты ПХ определяют суммированием ординат всех составляющих в выбранные моменты времени. Целесообразно сначала определить дополнительные

точки там, где вероятны максимумы или минимумы характеристики и имеются максимумы или минимумы составляющих. После построения достаточного числа точек их соединяют плавной кривой.

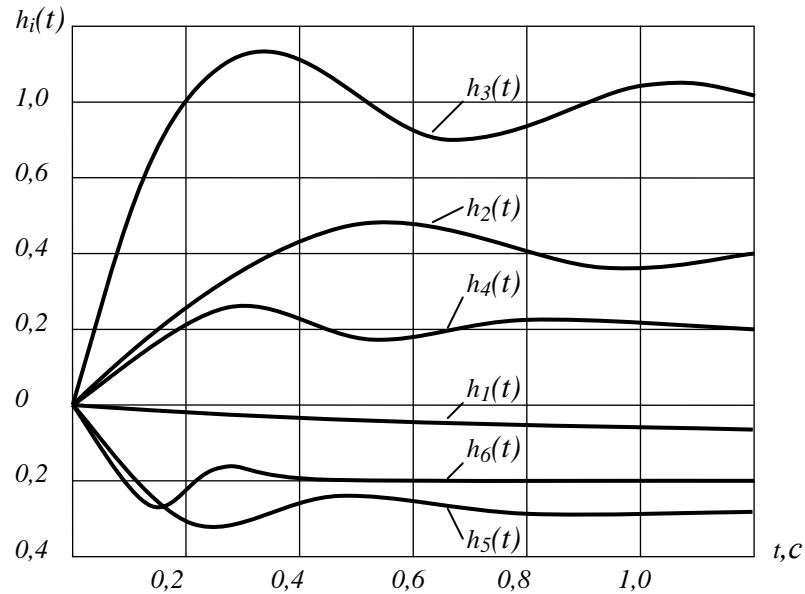


Рис. 12.3. Составляющие $h_i(t)$ переходной характеристики

6. Следует отметить, что погрешности определения ПХ тем больше, чем сложнее форма кривой ВЧПФ. Значительное увеличение числа аппроксимирующих ее прямолинейных отрезков (и трапеций) может не уменьшить погрешностей, так как для каждой трапеции округляется значение χ , возникают также погрешности при построении и суммировании составляющих ПХ.

13. Анализ устойчивости линейных систем

Проектируемая САУ обязательно проверяется на устойчивость. Устойчивость – одно из основных свойств САУ или объекта. Устойчивость (как понятие) любой динамической системы определяется ее поведением после снятия внешнего воздействия, т.е. ее свободным движением под влиянием начальных условий. Система является устойчивой, если она возвращается в исходное состояние равновесия после прекращения действия на систему сигнала (возмущения), выведшего ее из этого состояния. Неустойчивая система не возвращается в исходное состояние, а непрерывно со временем удаляется от него. Если на систему не действует никаких внешних возмущений, то ее динамика (т.е. движение системы во времени) – есть динамика под действием свободной составляющей, т.е. только под влиянием начальных условий. Начальные условия – это значение выходной переменной и ее производных в момент прекращения возмущения (т.е. в нулевой момент времени).

Для оценки устойчивости системы необходимо исследовать свободную составляющую решения уравнения динамики, т.е. решение однородного уравнения

$$(d_0 p^n + d_1 p^{n-1} + \dots + d_{n-1} p + d_n) y(t) = 0, \quad (13.1)$$

где $y(t)$ – выходной сигнал; $y(0), \dot{y}(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$ – начальные значения производных выходного сигнала (вспомните теорему дифференцирования оригинала); p – оператор Лапласа.

Общее решение этого операторного уравнения представляет собой сумму слагаемых, определяемых значениями корней характеристического полинома (ХП):

$$D(s) = (d_0 s^n + \dots + d_n). \quad (13.2)$$

Вынужденная составляющая выходного сигнала, определяемая видом внешнего воздействия, стоящего в правой части ДУД, и формой записи правой части, на устойчивость системы не влияет.

Итак, общее решение уравнения (13.1) имеет вид:

$$x_c(t) = \sum_{k=1}^n c_k e^{s_k t}, \quad (13.3)$$

где x_c – свободная составляющая переходного процесса в системе; c_k – постоянные (интегрирования), зависящие от начальных условий; s_k – корни полинома (13.2).

Заметим, что коэффициенты d_j характеристического полинома $D(s)$, следовательно, и его корни, зависят только от свойств и параметров звеньев системы, способа их соединения, и не зависят, естественно, от внешних воздействий.

Математическое определение понятия «устойчивость» сводится к следующему. Система является устойчивой, если свободная составляющая $x_c(t)$ переходного процесса с течением времени стремиться к нулю, т.е. затухает:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_c(t) = 0, \text{ при этом } \operatorname{Re} S_k < 0. \quad (13.4)$$

Это означает, что для устойчивости системы необходимо, чтобы все n корней ХП s_k , $k = \overline{1, n}$ имели отрицательные вещественные части (так называемые «левые» корни, т.е. расположенные слева от мнимой оси комплексной плоскости корней – плоскости Гауса).*

При этом выходная переменная системы будет стремиться к вынужденной составляющей, определяемой внешним воздействием и правой частью ДУД системы (т.е. полиномом $G(s)$).

Если:

* Условия устойчивости с точки зрения исследования решений ДУД системы были рассмотрены в теоремах Ляпунова А.М.(Россия, 1892 г.).

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_c(t) = \pm\infty, \quad (13.5)$$

то система неустойчива.

При

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_c(t) \neq 0 \neq \infty, \quad (13.6)$$

система находится на границе устойчивости (система – нейтральна).

Условию (13.5) соответствует наличие среди корней ХП s_k хотя бы одного «правого» вещественного корня (т.е. расположенного справа от мнимой оси $j\text{Im } s_k = j\omega_k$) или хотя бы одной пары «правых» комплексных корней. В первом случае соответствующее «правому» корню слагаемое в (13.3) неограниченно возрастало ($\rightarrow \infty$); при $c_k \neq 0$ слагаемое $c_k e^{s_k t} \rightarrow \pm\infty$.

Во втором случае, когда $s_{k,k+1} = \alpha_k + j\omega_k$, $\alpha_k > 0$, в числе слагаемых выражения (13.3) оказывается составляющая гармонического типа $x_{ck}(t)$, получающаяся из двух составляющих $c_k \exp(\alpha_k + j\omega_k t)$ и $c_k \exp(\alpha_k - j\omega_k t)$:

$$x_{ck}(t) = 2c_k \exp(\alpha_k t) \sin(\omega_k t + \psi_k) \rightarrow \pm\infty,$$

т.е. амплитуда этой составляющей $x_{ck}(t)$, равная $2c_k \exp(\alpha_k t) \rightarrow \pm\infty$. Колебания являются возрастающими по амплитуде, а переходный процесс – расходящимся – система в обоих случаях оказывается неустойчивой.

Условие (13.6) объясняется так. Если среди корней s_k есть хотя бы один корень $s_k = \text{Re } s_k = \alpha_k = 0$ или хотя бы одна пара мнимых корней $s_{k,k+1} = \pm j\text{Im } s_k = \pm j\omega_k$, а остальные корни – «левые», то среди слагаемых $x_c(t)$ в уравнении (13.3) будет:

- постоянное слагаемое (при $\alpha_k = 0$):

$$x_{ck}(t) = c_k \exp(\alpha_k t) = c_k = \text{const};$$

- или гармоническое слагаемое с постоянной амплитудой

$$x_{ck}(t) = c_k \sin(\omega_k t + \psi_k) \text{ – при } s_{k,k+1} = \pm j\omega_k.$$

Проиллюстрируем характер свободной составляющей $x_{ck}(t)$ переходного процесса системы в зависимости от расположения корней ее характеристического полинома s_k на комплексной плоскости (при $n=9$) (рис. 13.1).

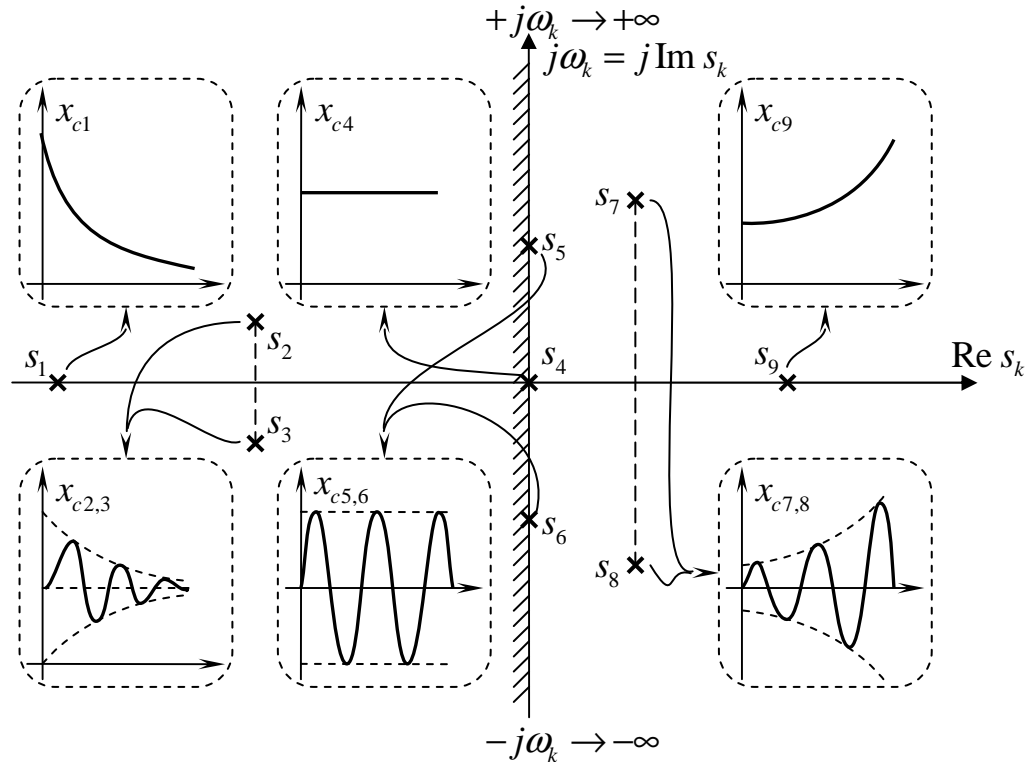


Рис. 13.1. Характер свободной составляющей переходного процесса в зависимости от расположения корней характеристического уравнения на плоскости Гаусса

На рис. 13.1 мнимая ось $j\omega_k$ штрихуется слева; это говорит о том, что левая (заштрихованная) полуплоскость является областью устойчивости – с точки зрения корней ХП системы. Правая полуплоскость соответствует корням ХП, которые вносят в состав свободной составляющей $x_c(t)$ (13.3) компоненты $x_{ck}(t)$, вызывающие неустойчивость в системе. Таким образом, мнимая ось $j\text{Im } s_k = j\omega_k$ является границей устойчивости.

13.1. Критерии устойчивости

На практике с целью упрощения расчетов устойчивость САУ определяют с помощью специальных методов (правил) – критериев устойчивости, позволяющих оценить устойчивость системы без расчета корней ХП.

При этом рассчитываются либо коэффициенты ХП, либо определенные функции от этих коэффициентов. По своей сути критерии устойчивости эквивалентны упомянутому выше условию устойчивости (т.е. $\operatorname{Re} s_k < 0$).

Системы 1-го и 2-го порядка ($n=1$ и $n=2$) – устойчивы, если все коэффициенты ХП $d_j > 0, j = \overline{0, n}$. Для системы более высокого порядка ($n > 2$) условие $d_j > 0$ – необходимое, но недостаточное. Если все коэффициенты $d_j > 0$, то все вещественные корни ХП – отрицательные («левые»), но среди комплексных корней могут быть и корни, имеющие $\operatorname{Re} s_k > 0$ («правые»). Если хотя бы один из d_j – отрицателен, то САУ – а priori неустойчива. При $d_n = 0$ система – на границе устойчивости. При $d_j = 0, j \neq n$, система – или на границе устойчивости, или – неустойчива.

Если хотя бы один корень s_k – нулевой, а остальные корни – «левые», то система находится на аperiodической границе устойчивости.

Если хотя бы одна пара комплексных корней – мнимые сопряженные корни $s_{k, k+1} = \pm j\omega_k$, а остальные корни – «левые», то система находится на колебательной границе устойчивости.

Если ХП имеет 2 нулевых корня, то система – неустойчива.

Критерии устойчивости делятся на алгебраические и частотные.

В алгебраических критериях устанавливаются необходимые и достаточные условия отрицательности вещественных частей корней ХП в виде определенных ограничений. Эти ограничения накладываются на различные комбинации коэффициентов d_j ХП $D(s)$. В частотных критериях устанавливается связь между типом корней s_k ХП $D(s)$ системы и формой ее частотных характеристик.

При анализе устойчивости обычно решают следующие задачи:

1. оценивают устойчивость системы при заданных (исходных) параметрах звеньев, образующих систему;

7. определяют допустимый по условию устойчивости диапазон возможного изменения одного или нескольких параметров системы.

Первая задача решается с помощью алгебраических критериев Гурвица, Рауса, Лъенара-Шипара, частотных критериев Михайлова и Найквиста, вторая – выделением областей устойчивости (в частности, методом D -разбиения).

13.1.1. Критерий Гурвица

При оценке устойчивости системы n -го порядка по критерию Гурвица на основании ХП вида:

$$d_0 s^n + d_1 s^{n-1} + \dots + d_{n-1} s + d_n$$

формируется матрица из коэффициентов $d_j, j = \overline{0, n}$, следующего типа:

$$H_n = \begin{bmatrix} d_1 & d_3 & d_5 \dots & 0 \\ d_0 & d_2 & d_4 \dots & 0 \\ 0 & d_1 & d_3 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}. \quad (13.7)$$

По главной диагонали матрицы записываются n коэффициентов d_j , начиная с d_1 и кончая d_n , т.е. размерность матрицы $H_n \dim H_n = [n \times n]$. Далее каждый столбец матрицы H_n над главной диагональю заполняют коэффициентами ХП с последовательно возрастающими индексами, а под главной диагональю – с последовательно убывающими. Вместо коэффициентов с индексами, большими n и меньшими нуля, записываются нули.

Критерий формулируется так: система – устойчива, т.е. не имеет «правых» корней, если при $d_0 > 0$ все диагональные определители (получаемые из матрицы H_n) $\Delta_i > 0, i = \overline{1, n}$, т.е. положительны:

$$\Delta_i = \begin{bmatrix} d_1 & d_3 & d_5 & \cdot & \cdot & d_{2i-1} \\ d_0 & d_2 & d_4 & \cdot & \cdot & d_{2i-2} \\ 0 & d_1 & d_3 & \cdot & \cdot & d_{2i-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & d_{i-2} & d_i \end{bmatrix}, \text{ где } i = \overline{1, n}.$$

Если хотя бы один из определителей Δ_i (определителей Гурвица) отрицателен, то система – неустойчива.

Так как в последнем столбце матрицы H_n (т.е. и главного определителя Гурвица Δ_n) находится только один ненулевой (если $d_n \neq 0$) элемент (d_n), то в соответствии со свойствами определителей $\Delta_n = d_n \Delta_{n-1}$. Если $d_n > 0$, то $\Delta_n > 0$ при $\Delta_{n-1} > 0$. Система находится на границе устойчивости, если главный определитель $\Delta_n = 0$, а все остальные определители положительны. Это условие распадается на два:

1. $d_n = 0$, а $\Delta_{n-1} > 0 \rightarrow$ система находится на апериодической границе устойчивости, так как при этом ХП запишется как:

$$D(s) = s(d_0 s^{n-1} + d_1 s^{n-2} + \dots + d_{n-1}), \quad (13.8)$$

отсюда видно, что ХП имеет один нулевой корень.

8. $\Delta_{n-1} = 0$, а $d_n > 0 \rightarrow$ система находится на колебательной границе устойчивости, иными словами, среди корней ХП имеется пара сопряженных мнимых корней.

Чтобы рассчитать определитель n -го порядка, целесообразно использовать его разложение по i -й строке:

$$\Delta_i = \sum_{j=1}^n d_{ij} A_{ij}, \quad (13.9)$$

где d_{ij} – элемент определителя, стоящий в i -й строке и j -м столбце; A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} (определитель, получающийся из исходного путем вычеркивания из него i -й строки и j -го столбца);

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}, \quad (13.10)$$

где M_{ij} – минор элемента a_{ij} , т.е. определитель $(n-1)$ -го порядка, отличающийся от алгебраического дополнения только знаком – если $(i+j)$ – нечетное число.

В итоге вместо расчета Δ_n рассчитывают определители $(n-1)$ – порядка; последние также можно разложить по элементам какой-либо строки или столбца, т.е. их вычисление сводится уже к расчету определителей $(n-2)$ -порядка и т.д. С помощью повтора этой процедуры расчет определителя n -го порядка сводят к расчету определителей 2-го порядка Δ_2 :

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Анализ определителей Гурвица систем до четвертого порядка включительно показывает, что для устойчивости систем (т.е. для того, чтобы выполнялось условие $\operatorname{Re} s_k < 0, k = \overline{1, n}$) необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты d_j ($j = \overline{1, n}$) ХП и определитель Гурвица Δ_{n-1} , были положительными.

Для расчета определителей Гурвица при $n \geq 5$ целесообразно использовать машинные методы линейной алгебры.

13.1.2. Критерий Рауса

Применение этого критерия требует формирования специальной таблицы – таблицы Рауса (R -таблицы), состоящей из $(n+1)$ строк, где n – порядок системы.

Элементы первой строки ($i=1$) R -таблицы – коэффициенты d_j ХП, имеющие четные индексы, т.е. d_0, d_2, d_4 и т.д. Элементами второй строки являются коэффициенты d_j с нечетными индексами, т.е. d_1, d_3, \dots . Начиная с третьей строки ($i=3$) R -таблицы, ее элементы определяются с помощью

вспомогательных коэффициентов (для каждой i -той строки используется свой коэффициент) $a_i = r_{i-2,1}/r_{i-1,1}$, рассчитываемых как отношение двух элементов 1-го столбца R -таблицы. Значение произвольного элемента R -таблицы, стоящего в i -й строке и k -м столбце, рассчитывается по формуле:

$$r_{ik} = r_{i-2,k+1} - a_i r_{i-1,k+1}. \quad (13.11)$$

Критерий формулируется так: система является устойчивой (т.е. все корни s_k ХП системы являются «левыми»), если все элементы первого столбца R -таблицы r_{i1} имеют одинаковый знак:

$$\text{sign}(r_{i1}) = \text{idem}, i = \overline{1, (n+1)}.$$

Таблица 13 R -таблица

Вспомогательные коэффициенты $a_i, i \geq 3$	№ строки	№ столбца			
		1	2	3	...
—	1	$r_{11}=d_0$	$r_{12}=d_2$	$r_{13}=d_4$...
—	2	$r_{21}=d_1$	$r_{22}=d_3$	$r_{23}=d_5$...
a_3	3	r_{31}	r_{32}	r_{33}	...
...
a_i	i	r_{i1}	r_{i2}	r_{i3}	...
...
a_{n+1}	$n+1$	$r_{n+1,1}$	$r_{n+1,2}$	$r_{n+1,3}$...

Поскольку обычно $r_{11}=d_0>0$, то для устойчивости системы необходимо, чтобы все остальные элементы 1-го столбца были положительными: $r_{i1} > 0, i = \overline{2, (n+1)}$.

При наличии хотя бы одного элемента $r_{i1}<0$ система – неустойчива. Число отрицательных элементов r_{i1} равно числу «правых» корней ХП системы. Если один из элементов 1-го столбца ($r_{i1}, i = \overline{2, (n+1)}$) равен нулю, а остальные – положительные, то система – на колебательной границе устойчивости; это значит, что ХП имеет пару мнимых корней. При $r_{n+1,1}=0$ система находится на апериодической границе устойчивости – ее ХП имеет один нулевой корень. При равенстве нулю ν последних элементов из совокупности r_{i1} система – также на границе устойчивости (ХП имеет ν нуле-

вых корней). Достоинство критериев Гурвица и Рауса – в том, что с их помощью оценивают устойчивость и замкнутых, и разомкнутых систем.

13.1.3. Критерий Михайлова

Критерий Михайлова (1938 г.) является частотным критерием. Система устойчива, если, во-первых, все коэффициенты ее характеристического уравнения положительны и, во-вторых, вектор годограф Михайлова при изменении частоты от нуля до бесконечности, начав движение против часовой стрелки из точки d_n , нигде не принимая нулевого значения, повернется на угол $\psi = \pi n/2$, пройдя n квадрантов комплексной плоскости.

Первая часть этого условия вытекает из того, что если вещественные части корней характеристического уравнения отрицательны, то оно может быть представлено в виде произведения сомножителей, исключающих появление отрицательных коэффициентов:

$$\begin{aligned} d_0 [s - (-s_1)] [s - (-s_2)] \dots [s - (-\alpha + j\beta)] [s - (-\alpha - j\beta)] \dots = \\ = d_0 (s + s_1)(s + s_2) \dots [(s + \alpha)^2 + \beta^2] \dots = 0 \end{aligned} \quad (13.12)$$

где: $-s_1, -s_2, \dots, -\alpha \pm j\beta, \dots$ – корни характеристического полинома.

Вторая часть этого условия вытекает из ХП, в котором переменная s заменена на $j\omega$, где $j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица, а ω – вещественная переменная, называемая частотой.

Тогда:

$$\begin{aligned} \overline{D}(j\omega) &= d_0 (j\overline{\omega} - s_1)(j\overline{\omega} - s_2) \dots (j\overline{\omega} - s_n) \\ D(j\omega) &= d_n + j\omega d_{n-1} - \omega^2 d_{n-2} - j\omega d_{n-3} + \dots = \operatorname{Re}(\omega) + j \operatorname{Im}(\omega) \end{aligned} \quad (13.13)$$

Анализ последнего уравнения показывает, что если вещественные части корней ХП отрицательны, то в комплексной плоскости Гаусса (рис. 13.2) им будут соответствовать точки $M_1(s_1), M_2(s_2), \dots$, расположенные слева от мнимой оси координат. Другим геометрическим представлением

числа в комплексной плоскости является вектор, проведенный из начала координат в точки M_1, M_2, \dots . Задаваясь значениями частот от $-\infty$ до $+\infty$, получают ряд других точек – точек N_1, N_2, \dots , лежащих на мнимой оси координат и соответствующих векторам $j\omega_1, j\omega_2, \dots$

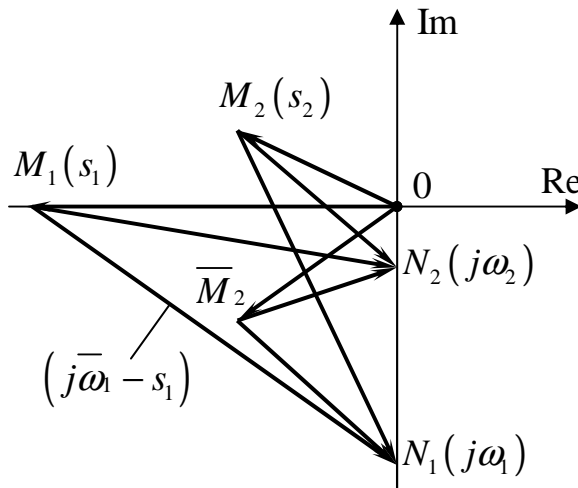


Рис. 13.2. Комплексная плоскость Гаусса

Векторы, выходящие из точек M в точки N , представляют собой векторы разницы, произведения которых составляют правую часть последнего уравнения.

В процессе изменения частоты от $-\infty$ до $+\infty$, каждая векторная разность поворачивается против часовой стрелки на угол π (от $-\pi/2$ до $+\pi/2$).

Поворот результирующего вектора $\bar{D}(j\omega)$ будет равен $\pi \cdot n$, где n – число корней ХП. Симметричное расположение точек M относительно вещественной оси позволяет изменять частоту от нуля до $+\infty$ и тем самым вдвое уменьшить поворот вектора $\bar{D}(j\omega)$.

Большой наглядностью изменения аргумента и модуля вектора обладает изображение решения исходного уравнения, в котором выделены его вещественная и мнимая части. Придавая частоте значения то нуля до бесконечности, получают соответствующие им величины модулей и аргументов вектора $\bar{D}(j\omega)$. Кривая, соединяющая концы этих векторов, образует годограф Михайлова.

На рис. 13.3 приведены годографы устойчивых систем от 1-го до 5-го порядков. Если система на границе устойчивости, то годограф Михайлова проходит через начало осей координат так, что после небольшой его деформации около начала осей координат критерий удовлетворяется. Годографы системы 4-го порядка, находящейся на границе устойчивости, пока-

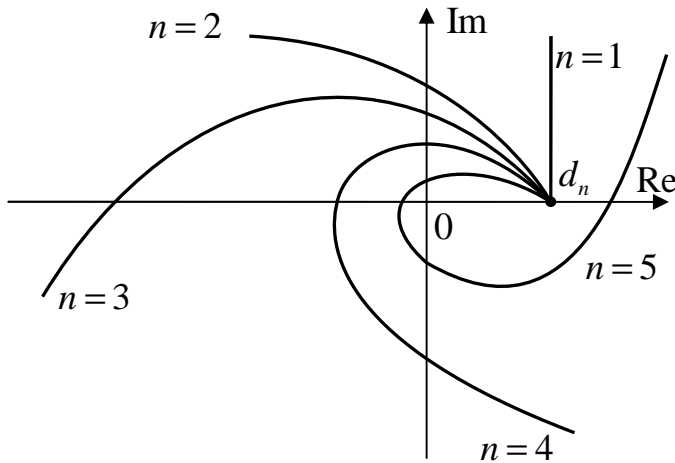


Рис. 13.3. Годографы Михайлова устойчивых систем

заны на рис. 13.4. На рис. 13.4, а ХП имеет нулевой корень (апериодическая граница устойчивости), на втором (рис. 13.4, б) – пару мнимых корней (колебательная граница устойчивости).

Рассмотрим годографы неустойчивых систем 4-го порядка (рис. 13.4). Их ХП имеет

положительный вещественный корень (кривая 1), два положительных корня (кривая 2), два комплексных сопряженных корня с положительной вещественной частью (кривая 3), два чисто мнимых корня и положительный вещественный корень (кривая 4). В последнем случае годограф проходит через начало осей координат, но небольшая деформация его не приводит к удовлетворению критерия.

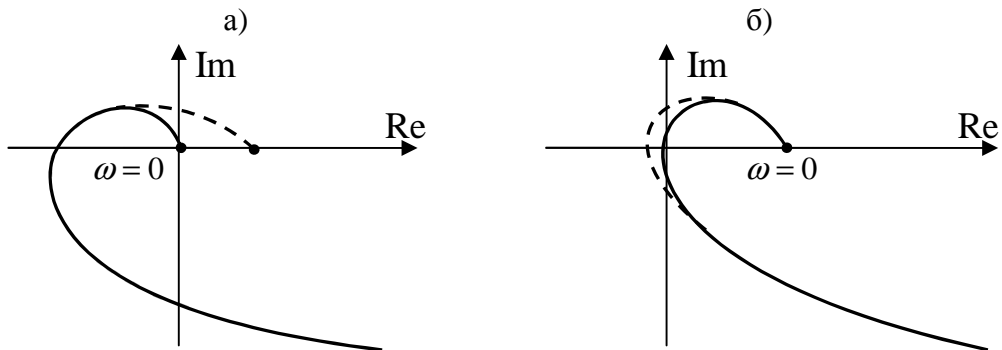


Рис. 13.4. Годографы Михайлова систем 4-го порядка, находящихся на границе устойчивости: а – апериодической; б – колебательной

В устойчивых системах годограф Михайлова поочередно пересекает вещественную и мнимую оси, следствием чего является чередование корней-полиномов $Re(\omega)$ и $Im(\omega)$. Сумма корней полиномов равна порядку характеристического уравнения. Места сближения корней полиномов указывают на приближение системы к границе устойчивости.

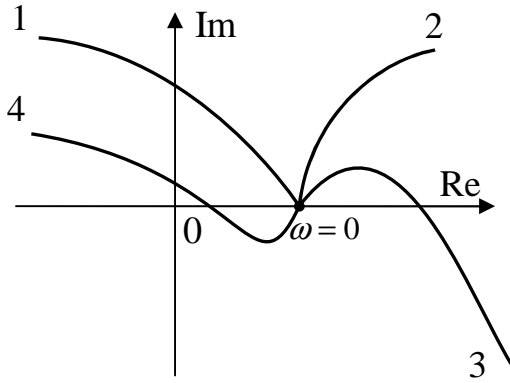


Рис. 13.5. Годографы Михайлова неустойчивых систем 4-го порядка

Иногда удобнее пользоваться другой формулировкой критерия Михайлова: для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы корни мнимой (полином Im) и вещественной (полином Re) частей ее характеристического уравнения были положительными вещественными и чередовались.

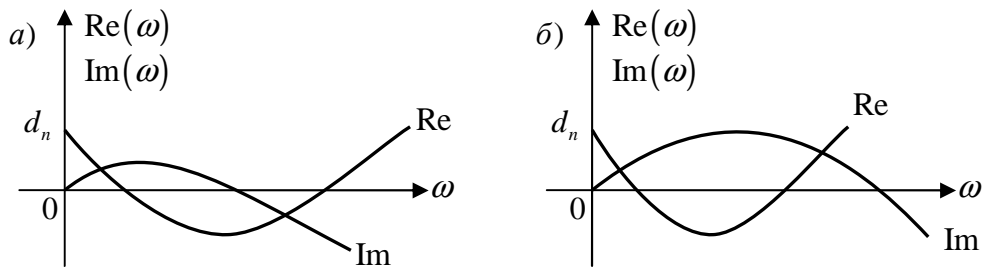


Рис. 13.6. Графики вещественной и мнимой частей годографа Михайлова: а – устойчивой системы; б – неустойчивой системы

Рассмотрим критерий Михайлова в применении к анализу некоторых замкнутых систем.

Пример 13.1. Возьмем систему, состоящую из инерционного и усилительного звеньев. Из временной передаточной функции, составленной согласно блок-схеме (рис. 13.7):

$$W(s)_{\text{зам}} = \frac{W_1}{1 + W_1 W_2} = \frac{k_1}{T_1 s + 1 + k_1 k_2}$$

составляем последовательно сначала характеристический полином, а затем уравнение годографа Михайлова:

$$T_1 s + 1 + k_1 k_2 = 0$$

$$D(j\omega) = 1 + k_1 k_2 + jT_1 \omega = \text{Re}(\omega) + j \text{Im}(\omega)$$

$$\text{Re}(\omega) = 1 + k_1 k_2$$

$$\text{Im}(\omega) = T_1 \omega$$

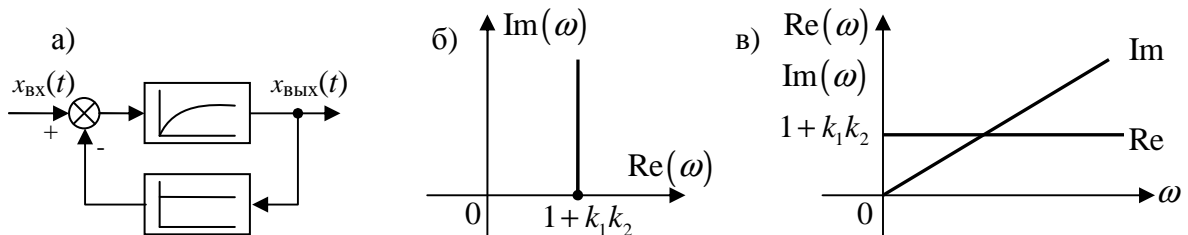


Рис. 13.7. Блок-схема замкнутой САР с годографом Михайлова и выделенными из него вещественной и мнимой частями

В комплексной плоскости годограф представляет собой прямую, параллельную мнимой оси; вектор $\overline{D}(j\omega)$ при изменении частоты $\omega \in [0; +\infty)$ оставаясь в пределах 1-й четверти, поворачивается против часовой стрелки на угол $\psi = \pi/2$.

Если замкнутая система состоит из двух инерционных звеньев (рис. 13.8), то:

$$W(s)_{зам} = \frac{k_1(T_1s+1)}{(T_1s+1)(T_2s+1)+k_1k_2},$$

а ее ХП будет:

$$T_1T_2s^2 + (T_1+T_2)s + 1 + k_1k_2 = 0.$$

Годограф Михайлова описывается уравнением:

$$D(j\omega) = T_1T_2\omega^2 + j(T_1+T_2)\omega + 1 + k_1k_2 = 0,$$

которому соответствует парабола с вершиной в точке $M(1+k_1k_2; j0)$.

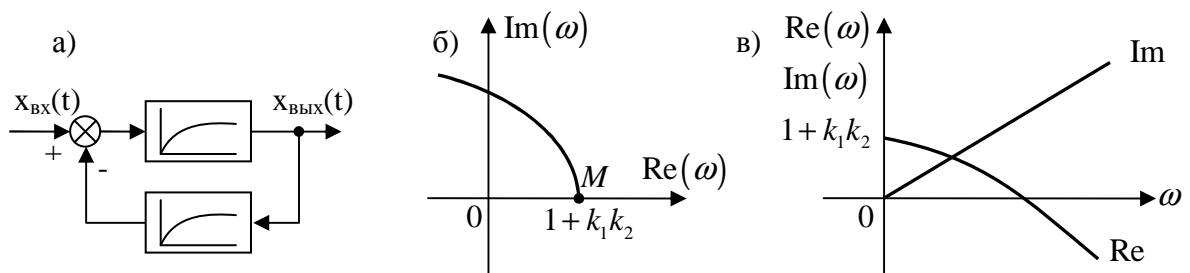


Рис. 13.8. САР из 2-х инерционных звеньев:

а) блок-схема; б) годограф Михайлова; в) вещественная и мнимая части годографа Михайлова

13.1.4. Критерий Найквиста

Частотный критерий Найквиста дает возможность определить устойчивость замкнутой САР по годографу частотной передаточной функции ее разомкнутой цепи. Критерий применим к системам, у которых степень числителя передаточной функции разомкнутой цепи не выше степени полинома ее знаменателя. При правильном математическом описании реальных САР это условие выполняется.

Предварительно должна быть определена устойчивость исследуемой системы в разомкнутом состоянии. Для неустойчивой разомкнутой системы нужно выяснить, какое число корней ее характеристического полинома имеет положительные вещественные части; это можно сделать либо по критерию Михайлова, либо просто рассчитать корни ХП.

В одноконтурной системе, составленной из последовательно соединенных звеньев, корни характеристических полиномов этих звеньев являются одновременно корнями характеристического полинома разомкнутой системы. Если какое-либо звено в прямой цепи системы охвачено обратной связью, то нужно определить корни характеристического полинома замкнутого контура. Эти корни войдут в число корней характеристического полинома разомкнутой системы.

При наличии перекрестных обратных связей и параллельных соединений передаточную функцию разомкнутой системы можно определить методами структурных преобразований или по формуле Мейсона. Для исследования ее устойчивости удобно пользоваться критериями Рауса или Михайлова. Они позволяют определить число корней с положительными вещественными частями, если разомкнутая система окажется неустойчивой.

ЧПФ устойчивой или нейтральной разомкнутой системы можно определить экспериментально, что позволит избежать составления уравнений сложных объектов регулирования и исполнительных элементов, а точность результатов получается более высокой. Поэтому указанная возможность используется в инженерной практике достаточно широко.

Различают три случая применения критерия Найквиста.

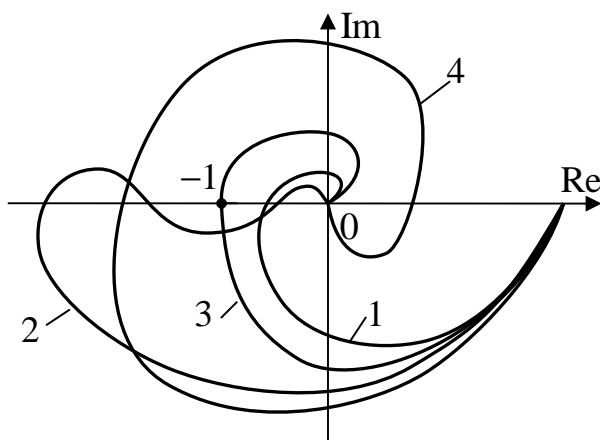
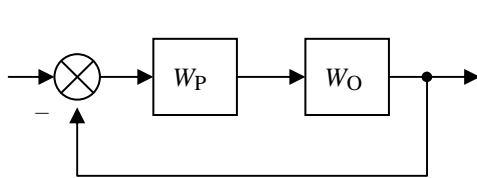


Рис. 13.9. Годографы ЧПФ устойчивых разомкнутых систем

1. *Разомкнутая система устойчива.* В этом случае для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы годограф ЧПФ разомкнутой системы при изменении ω от 0 до ∞ не охватывала точку с координатами $[-1, j0]$.

На рис.13.9 изображены основные из возможных ситуаций. При АФЧХ в виде кривой 1 замкнутая система абсолютно устойчива – она остается устойчивой и при уменьшении передаточного коэффициента k разомкнутой цепи. Если АФЧХ представляет собой кривую 2, то замкнутая система условно устойчива – она остается устойчивой только при значении k , лежащим в некоторых пределах. Кривая 3 проходит через критическую точку с координатами $[-1, j0]$. Это означает, что замкнутая система находится на колебательной границе устойчивости. Кривая 4 охватывает критическую точку M , поэтому замкнутая система неустойчива.

Пример 13.2. Исследовать на устойчивость одноконтурную САР с единичной отрицательной обратной связью. Передаточная функция прямой цепи регулятора $W_p(s)$:



$$W_p(s) = \frac{k_p(\tau s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

где $k_p = 5$; $\tau = 0.08$ с; $T_1 = 0.1$ с; $T_2 = 0.05$ с.

Частотные характеристики регулируемого объекта получены экспериментально:

ω	0	2	4	6	8	10	15	20
A_o	2,0	0,96	0,49	0,31	0,21	0,15	0,076	0,048
ψ_o , град	0	-73	-99	-114	-124	-132	-145	-153

Составим формулы для определения амплитуды и фазы прямой цепи регулятора:

$$A_p = k_p \sqrt{\frac{1 + \tau^2 \omega^2}{(1 - T_1 T_2 \omega^2)^2 + (T_1 + T_2)^2 \omega^2}} = 5 \sqrt{\frac{1 + 0,0064 \omega^2}{1 + 0,0125 \omega^2 + 0,000025 \omega^4}}$$

$$\psi_p = \arctg \omega \tau - \arctg \frac{(T_1 + T_2) \omega}{1 - T_1 T_2 \omega^2} = \arctg 0,08 \omega - \arctg \frac{0,15 \omega}{1 - 0,005 \omega^2}$$

а также для определения амплитуды A и фазы ψ разомкнутой системы:

$$A = A_o A_p; \quad \psi = \psi_o + \psi_p$$

Для построения АФХ целесообразно вычислить значения ее вещественной и мнимой частей:

$$\operatorname{Re}(\omega) = A \cos \psi; \quad \operatorname{Im}(\omega) = A \sin \psi$$

В результате расчета получено:

ω	0	2	4	6	8	10	15	20
$\operatorname{Re}(\omega)$	10	0,7	-0,95	-1,01	-0,79	-0,59	-0,26	-0,13
$\operatorname{Im}(\omega)$	0	-4,69	-2,14	-0,99	-0,43	-0,16	-0,03	+0,06

Частотные характеристики объекта сняты экспериментально, и следовательно, он устойчив. Корни ХП прямой цепи регулятора отрицательные: $s_1 = -1/T_1 = -10$ и $s_2 = -1/T_2 = -20$. Разомкнутая система устойчива и ее АФХ (рис. 13.10) не охватывает критической точки с координатами $[-1, j0]$. Поэтому можно заключить, что в замкнутом состоянии рассматриваемая система будет устойчивой.

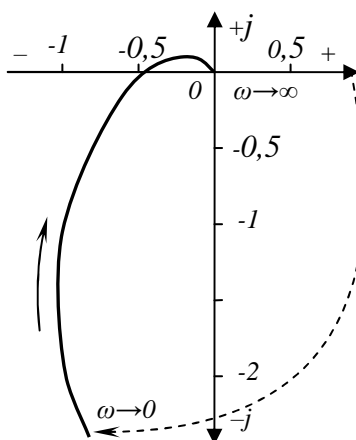


Рис. 13.10. АФЧХ разомкнутой САР

9. *Разомкнутая система на границе устойчивости.* Характеристический полином такой системы имеет нулевые (апериодическая граница) или чисто мнимые корни (колебательная граница), а у остальных корней отрицательные вещественные части.

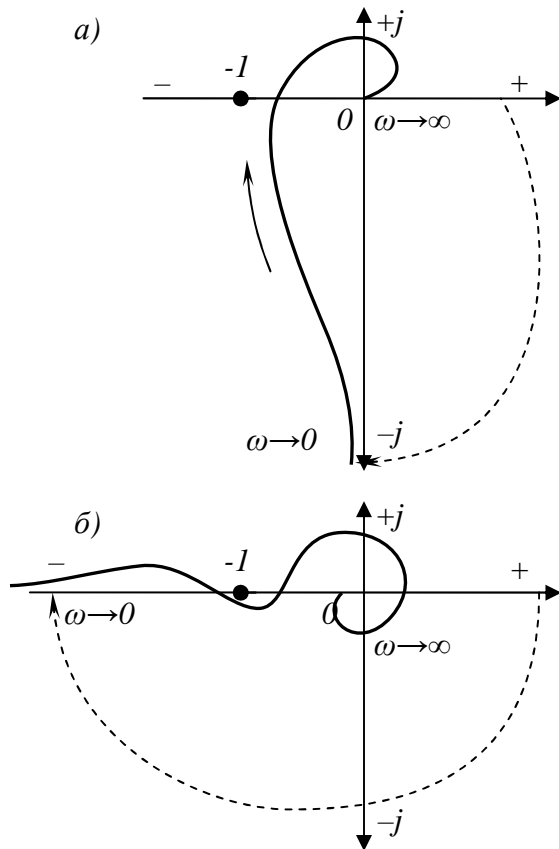


Рис. 13.11. АФЧХ разомкнутой цепи систем, находящихся на границе устойчивости:

а – замкнутая система устойчивая ($\nu = 1$);
б – замкнутая система на границе

Если нулевых корней ν , то АФХ при $\omega=0$ дугой бесконечно большого радиуса перемещается от положительной вещественной полуоси на угол $90\nu^\circ$ по часовой стрелке (рис. 13.11, а).

Если есть пара чисто мнимых корней (в знаменателе передаточной функции имеется i -й множитель $d_{oi}s^2 + d_{2i}$), то АФЧХ при частоте $\omega_i = \sqrt{d_{2i}/d_{oi}}$ (так как при $s = j\omega$ имеем соответствующий множитель полинома $D(s)$ $[-d_{oi}\omega^2 + d_{2i}]$) дугой бесконечно большого радиуса перемещается на угол 180° по часовой стрелке (рис. 13.11, б).

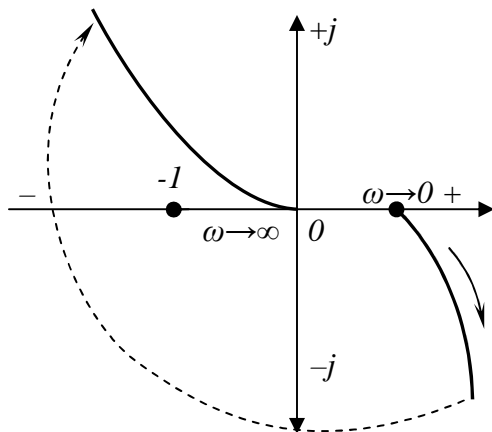


Рис. 13.12. АФЧХ разомкнутой цепи систем, находящейся на колебательной границе устойчивости

В обоих случаях для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы АФХ разомкнутой системы при изменении ω от 0 до ∞ , дополненная на участке разрыва дугой бесконечно большого радиуса, не охватывала точку M .

По АФХ, изображенным на рис. 13.12, показаны три случая: замкнутая система соответственно устойчивая, на границе устойчивости и неустойчивая.

Пример 13.3. Исследовать на устойчивость САР, разомкнутая цепь которой описывается передаточной функцией

$$W = \frac{k(\tau s + 1)}{(T_1^2 s^2 + 1)(T_2^2 s^2 + 1)}, \text{ где } k = 20; \tau = 0,02 \text{ с}; T_1 = 0,05 \text{ с}; T_2 = 0,01 \text{ с}.$$

Прежде всего заметим, что характеристический полином имеет чисто мнимые корни $s_{1,2} = \pm j \frac{1}{T_1}$ и $s_{3,4} = \pm j \frac{1}{T_2}$, т. е. разомкнутая система – на границе устойчивости.

Затем определим частотную передаточную функцию разомкнутой системы:

$$\begin{aligned} \bar{W} &= \frac{20(1 + j\omega 0,02)}{(1 - \omega^2 0,0025)(1 + j\omega 0,01)} = \\ &= \text{Re}(\omega) + j \text{Im}(\omega), \\ \text{Re}(\omega) &= \frac{20(1 + 0,0002\omega^2)}{(1 - 0,0025\omega^2)(1 + 0,0001\omega^2)}; \\ \text{Im}(\omega) &= \frac{0,2\omega}{(1 - 0,0025\omega^2)(1 + 0,0001\omega^2)} \end{aligned}$$

По полученным выражениям вычислим $\text{Re}(\omega)$ и $\text{Im}(\omega)$:

ω	0	5	10	12	15	20	25	30	35	40
$\text{Re}(\omega)$	20	21,4	26,9	31,7	46,8	-37,6	-26,0	-17,3	10,8	-7,9
$\text{Im}(\omega)$	0	1,06	2,64	3,70	6,71	-8,36	-6,12	-4,40	-3,02	-2,38

АФХ разомкнутой системы построена на рис. 13.13. При $\omega = 20 \text{ с}^{-1}$ она имеет разрыв. Если эту кривую дополнить дугой бесконечно большого радиуса, то критическая точка будет находиться вне получившегося контура. Следовательно, замкнутая система будет устойчивой.

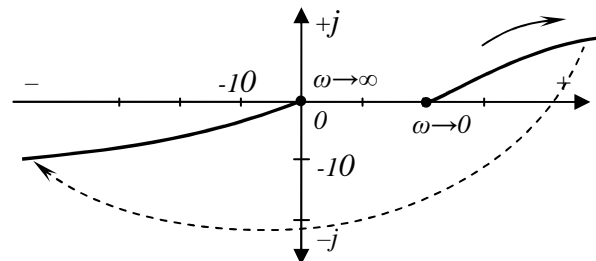


Рис. 13.13. Исследование устойчивости системы, рассматриваемой в примере 13.3.

10. Разомкнутая система неустойчива. Характеристический полином такой системы имеет r корней с положительной вещественной частью.

В этом наиболее общем случае критерий формулируется так: для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы при изменении ω от 0 до ∞ АФХ разомкнутой системы охватывала точку с координатами $[-1, j0]$ $r/2$ раз в положительном направлении (против часовой стрелки).

Характеристический полином разомкнутой системы, кроме корней с вещественной частью (положительной или отрицательной), может иметь нулевые и чисто мнимые корни. Тогда на участках разрыва АФЧХ должна быть дополнена дугой бесконечно большого радиуса.

Пример 13.4. Выяснить устойчивость системы, если передаточная функция ее разомкнутого контура

$$W = \frac{k(\tau s + 1)}{(T_1 s - 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)},$$

где $k = 50$; $\tau = 0,05$ с; $T_1 = 0,1$ с; $T_2 = 0,02$ с; $T_3 = 0,25$ с.

В данном случае характеристический полином разомкнутой системы имеет один положительный вещественный корень $s_1 = 1/T_1 = 10$.

Для исследования устойчивости составим частотную передаточную функцию разомкнутой системы

$$\bar{W} = \frac{k(1 + j\omega\tau)}{(-1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)(1 + j\omega T_3)} = \text{Re}(\omega) + j \text{Im}(\omega)$$

где:

$$\text{Re}(\omega) = \frac{-50(1 + 0,0305\omega^2 + 0,000025\omega^4)}{1 + 0,0729\omega^2 + 6,54 \cdot 10^{-4}\omega^4 + 2,5 \cdot 10^{-7}\omega^6}$$

$$\text{Im}(\omega) = \frac{50\omega(0,12 - 0,0006\omega^2)}{1 + 0,0729\omega^2 + 6,54 \cdot 10^{-4}\omega^4 + 2,5 \cdot 10^{-7}\omega^6}$$

По выражениям для $\text{Re}(\omega)$ и $\text{Im}(\omega)$ заключаем:

а) при $\omega = 0$ $\text{Re} = 50$ и $\text{Im} = 0$

б) при $0 \leq \omega < \infty$ $\text{Re} < 0$

в) при $\omega = \infty$ $\text{Re} = \text{Im} = 0$

г) при $\omega_1 = \sqrt{200}$ $\text{Re} = -9,25$ $\text{Im} = 0$

д) при $0 < \omega < \omega_1$ $\text{Im} > 0$ и при $\omega_1 < \omega < \infty$ $\text{Im} < 0$

Полученные данные определяют приблизительную форму АФХ разомкнутой системы (рис. 13.14). Она охватывает точку с координатами $[-1, j0]$ 1/2 раза. Следовательно, замкнутая система будет устойчивой.

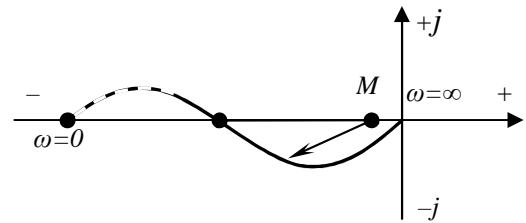


Рис. 13.14. Исследование устойчивости системы, рассматриваемой в примере 13.4.

При сложной форме АФХ разомкнутой системы удобнее применять другую формулировку критерия Найквиста, которая использует так называемое правило переходов. Переход годографа ЧПФ при увеличении ω через отрезок вещественной оси от -1 до $-\infty$ сверху вниз считают положительным и снизу вверх – отрицательным (рис. 13.15). АФХ может начинаться на указанном отрезке при $\omega=0$ или заканчиваться при $\omega=\infty$. Тогда считается, что она совершает полперехода.

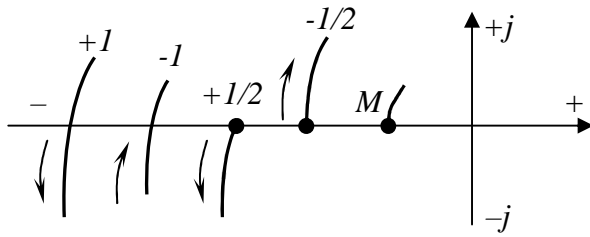


Рис. 13.15. Оценка перехода АФХ через отрезок вещественной оси от -1 до $-\infty$

Критерий формулируют так: замкнутая система устойчива, если разность между числом положительных (n^+) и отрицательных (n^-) переходов АФХ разомкнутой системы через отрезок вещественной оси от -1 до $-\infty$ равна:

$$n_N = n^+ - n^- = r/2, \quad (13.14)$$

здесь r – число правых корней характеристического полинома разомкнутой системы.

Пример 13.5. Выяснить устойчивость САР, у которой передаточная функция разомкнутого контура

$$W = \frac{k(\tau s + 1)}{s(T_1 s - 1)(T_2^2 s^2 + 2\xi T_2 s + 1)}, \text{ где } k=40; \tau=0,25 \text{ с}; T_1=0,5 \text{ с}; T_2=0,03 \text{ с}; \xi=0,1.$$

Характеристический полином разомкнутой системы имеет один нулевой корень ($s_1=0$) и один положительный вещественный корень ($s_2=2$). Составим частотную передаточную функцию разомкнутой системы:

$$\bar{W} = \frac{40(1 + j\omega 0,25)}{j\omega(-1 + j\omega 0,5)(1 + j\omega 0,004 - 0,0004\omega^2)} = \text{Re}(\omega) + j \text{Im}(\omega)$$

$$\text{Re}(\omega) = \frac{40(0,746 + 0,0002\omega^2)}{1 + 0,249\omega^2 - 0,000196\omega^4 + 0,00000004\omega^6};$$

$$\text{Im}(\omega) = \frac{40(1 - 0,1224\omega^2 + 0,00005\omega^4)}{\omega(1 + 0,249\omega^2 - 0,000196\omega^4 + 0,00000004\omega^6)}.$$

По этим выражениям определяем:

- а) при $\omega = 0$ $\text{Re} = -29,8$ и $\text{Im} = \infty$
- б) при $0 \leq \omega < \infty$ $\text{Re} < 0$
- в) при $\omega_1 = \sqrt{8}$ $\text{Re} = -10$ $\text{Im} = 0$
- г) при $\omega_2 = \sqrt{2440}$ $\text{Re} = -1,4$ $\text{Im} = 0$
- д) при $0 < \omega < \omega_1$ и $\omega_2 < \omega < \infty$ $\text{Im} > 0$
- е) при $\omega_1 < \omega < \omega_2$ $\text{Im} < 0$
- ж) при $\omega = \infty$ $\text{Re} = \text{Im} = 0$

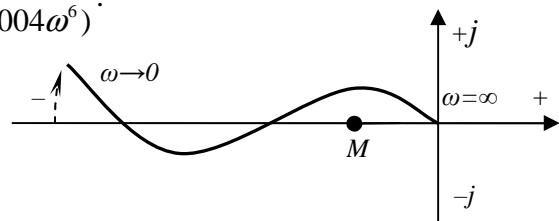


Рис. 13.16. Исследование устойчивости САР, рассматриваемой в примере 13.5

Теперь определен характер АФХ разомкнутой системы (рис. 13.16). При $\omega=0$ АФХ имеет разрыв, и поэтому ее нужно дополнить дугой бесконечно большого радиуса от отрицательной вещественной полуоси.

На участке от -1 до $-\infty$ имеется один положительный переход ($n^+ = 1$) и полтора отрицательных ($n^- = 1,5$). Разность между положительными и отрицательными переходами равна $n_N = 1 - 1,5 = -1/2$. Для устойчивости замкнутой системы необходимо, чтобы эта разность равнялась $+1/2$, так как характеристический полином разомкнутой системы имеет один положительный корень ($r = 1$). Следовательно, рассматриваемая система в замкнутом состоянии будет неустойчивой.

Применяя критерий Найквиста к передаточной функции разомкнутой системы, члены знаменателя, кроме старшего, можно переносить в числитель \bar{W} . Тогда построение АФХ системы высокого порядка упрощается. Однако при исследовании таких систем целесообразнее строить обратную АФХ, т. е. годограф вектора \bar{W}^{-1} .

В этом случае критерий Найквиста формулируется так: замкнутая система устойчива, если разность между числом отрицательных n^- и числом положительных n^+ и переходов обратной АФХ отрезка действительной оси от 0 до -1 равна $r/2$, где r – число правых корней ХП разомкнутой системы. Знаки переходов нужно принимать обратными по сравнению с указанными на рис. 13.15.

Пример 13.6. Определить устойчивость САР, если передаточная функция ее разомкнутой цепи

$$W = \frac{2}{0,0001s^4 + 0,00125s^3 + 0,0255s^2 + 0,04s - 1}$$

По этому выражению заключаем, что W имеет один положительный вещественный полюс и что для применения критерия Найквиста удобнее построить обратную АФЧХ.

В данном случае

$$\bar{W}^{-1} = 0,5[0,00001(j\omega)^4 + 0,00125(j\omega)^3 + 0,0255(j\omega)^2 + 0,04(j\omega) - 1] = \text{Re}(\omega)^{-1} + j \text{Im}(\omega)^{-1}$$

$$\text{Re}(\omega)^{-1} = -0,5(1 + 0,0255\omega^2 - 0,00001\omega^4)$$

$$\text{Im}(\omega)^{-1} = 0,5\omega(0,04 - 0,00125\omega^2)$$

По полученным выражениям определяем:

- а) при $\omega = 0$ $\text{Re} = -0,5$ и $\text{Im} = \infty$
- б) при $\omega_1 = \sqrt{32}$ $\text{Re} = -0,0083$ $\text{Im} = 0$
- в) при $0 \leq \omega < \omega_1$ $\text{Re} < 0$ $\text{Im} > 0$
- г) при $\omega_2 = \sqrt{2588}$ $\text{Re} = 0$ $\text{Im} = -81,3$
- д) при $\omega_1 < \omega < \omega_2$ $\text{Re} < 0$ $\text{Im} < 0$
- е) при $\omega_2 < \omega < \infty$ $\text{Re} > 0$ $\text{Im} < 0$
- ж) при $\omega = \infty$ $\text{Re} = \infty$ $\text{Im} = -\infty$

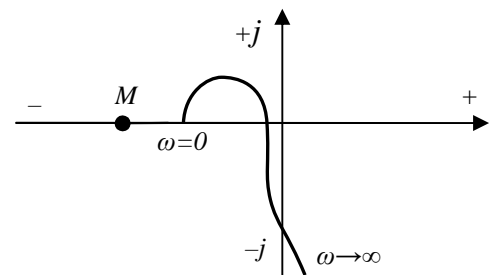


Рис. 13.17. Исследование устойчивости САР, рассматриваемой в примере 13.6

Характер обратной АФХ показан на рис. 13.15. На участке вещественной оси от -1 до 0 имеются один положительный полупереход и один отрицательный переход. Следовательно, разность между отрицательными и положительными переходами будет равна $n^+ - n^- = 1/2 = r/2$ и система в замкнутом состоянии будет устойчива.

13.1.5. Определение устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам

Критерий Найквиста позволяет выяснить устойчивость замкнутой системы не только по АФХ, но и по логарифмическим частотным характеристикам разомкнутой системы. Эту возможность используют весьма широко вследствие простоты построения таких характеристик и определения по ним запаса устойчивости.

Если разомкнутая система устойчива или нейтральна, то для ее устойчивости в замкнутом состоянии необходимо и достаточно, чтобы число переходов ФЧХ через уровень -180° при положительных значениях ЛАЧХ было четным (в частном случае равным нулю). Пересечение ФЧХ линии -180° снизу вверх считается положительным, а сверху вниз – отрицательным. На рис. 13.18 показаны наиболее характерные ФЧХ.

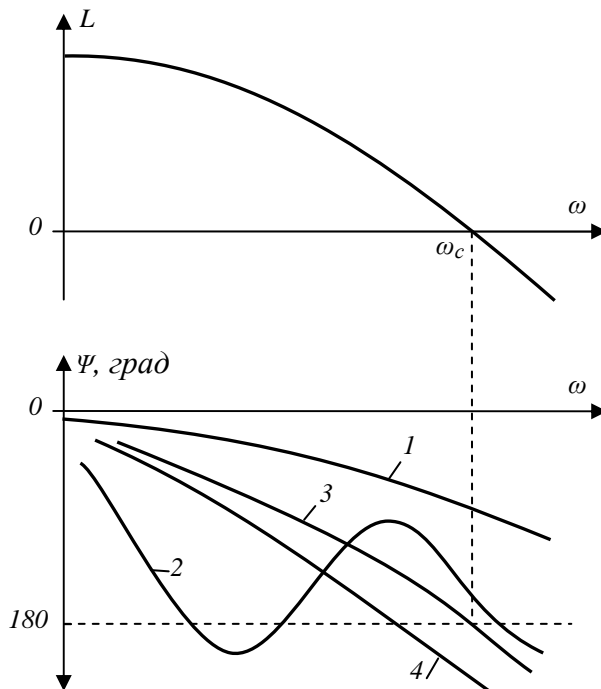


Рис. 13.18. ЛАЧХ разомкнутой системы:
1 – замкнутая система абсолютно устойчивая; 2 – условно устойчивая; 3 – на границе устойчивости; 4 – неустойчивая

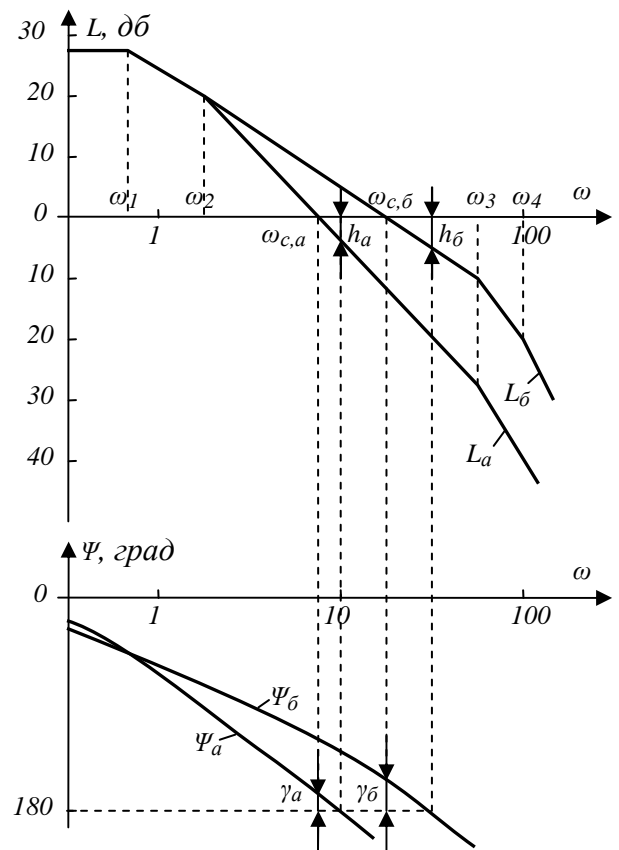


Рис. 13.19. ЛАЧХ цепи из четырех аperiodических звеньев

Пример 13.7. Выяснить устойчивость САР, у которой разомкнутая цепь описывается передаточной функцией

$$W = \frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)(T_4 s + 1)} = \frac{G(s)}{D(s)},$$

где $k=20$; $T_1=1,25$ с; $T_2=0,6$ с; $T_3=0,02$ с; $T_4=0,01$ с.

По характеристическому полиному разомкнутой системы $D(s)$ заключаем, что все его корни – вещественные отрицательные.

Затем строим логарифмические частотные характеристики по следующим данным: $20 \lg k = 26$ дБ; сопрягающие частоты $\omega_1 = 1/T_1 = 0,8$ с⁻¹; $\omega_2 = 1/T_2 = 1,67$ с⁻¹; $\omega_3 = 1/T_3 = 50$ с⁻¹ и $\omega_4 = 1/T_4 = 100$ с⁻¹. Характеристики L_a и ψ_a показаны на рис. 13.19.

На участке частот, при которых асимптотическая ЛАЧХ L_a – положительна (до частоты среза ω_c), ФЧХ не пересекает линии -180° . Поэтому делаем вывод, что замкнутая система – устойчива.

Для суждения об устойчивости обычно сначала строят асимптотическую ЛАЧХ. Затем к ней нужно сделать поправки около тех частот, которые ограничивают положительные участки и расположены достаточно близко от сопрягающих частот (особенно от сопрягающих частот, соответствующих колебательным звеньям).

В примере 13.7 поправки к асимптотической ЛАЧХ не сделаны, так как частота среза ω_c достаточно удалена от сопрягающих частот ω_2 и ω_3 . Поправки мало повлияют на значение ω_c и не изменят вывода об устойчивости системы.

ФЧХ нейтральной разомкнутой системы при $\omega \rightarrow 0$ стремится к $-90\nu^\circ$, где ν – число нулевых корней характеристического полинома. Поэтому ФЧХ такой системы нужно дополнить монотонным участком, приводящим ее к $\psi = 0$ при $L \rightarrow \infty$. Это соответствует дополнению АФХ бесконечно большим радиусом.

Пусть характеристический полином разомкнутой системы имеет r корней с положительной вещественной частью. В этом, самом общем, случае критерий формулируется так: для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы при положительных значениях ЛАЧХ разность между числом положительных и отрицательных переходов ЛФЧХ через линии -180° , $-3 \cdot 180^\circ$, ... равнялась $r/2$. При наличии в характеристическом полиноме $D(s)$ нулевых корней начальную часть ФЧХ следует приводить к $\psi = 0$ (рис. 13.20).

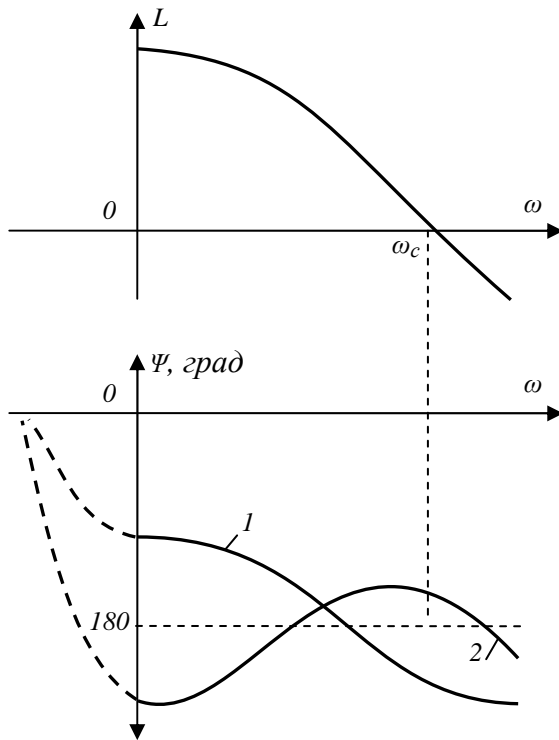


Рис. 13.20. ЛАЧХ разомкнутой нейтральной системы:
1 – при $v=1$; 2 – при $v=2$

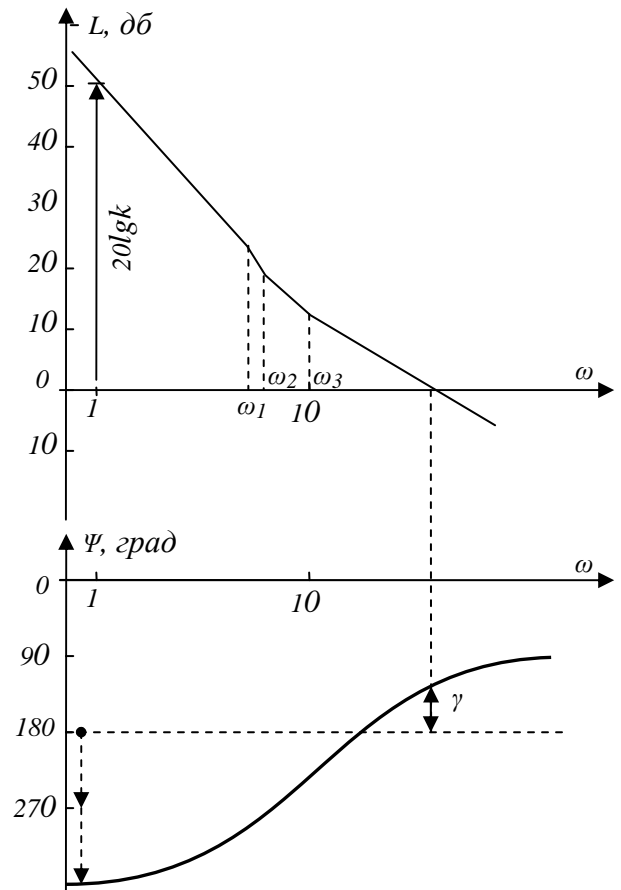


Рис. 13.21. ЛАЧХ к примеру 13.8

Пример 13.8. Выяснить устойчивость системы с передаточной функцией разомкнутой цепи

$$W = \frac{k(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}{s^2(Ts - 1)}, \text{ где } k=300; T=0,25 \text{ с}; \tau_1=0,2 \text{ с}; \tau_2=0,1 \text{ с}.$$

Характеристический полином разомкнутой системы имеет два нулевых корня ($v=2$) и один вещественный положительный корень, равный 4 ($s=1/T$).

Для построения логарифмических частотных характеристик имеем $20\lg k=49,5$ дБ; сопрягающие частоты $\omega=1/T=4 \text{ с}^{-1}$; $\omega_2=1/\tau_1=5 \text{ с}^{-1}$; $\omega_3=1/\tau_2=10 \text{ с}^{-1}$;

$$\psi = -180^\circ + \arctg \omega \tau_1 + \arctg \omega \tau_2 - \arctg T\omega - 1.$$

Характеристики показаны на рис. 13.21. Вследствие положительного корня начальный (при $\omega=0$) скачок ФЧХ на -90° нужно отсчитывать не от нуля, а от -180° . Это показано штриховой линией со стрелками.

На участке частот, при которых ЛАЧХ положительна, ФЧХ делает полперехода через линию -180° сверху вниз и один переход снизу вверх. Следовательно, разность между числом положительных и отрицательных переходов составляет $1/2=r/2$, и можно сделать вывод об устойчивости системы в замкнутом состоянии. Поправки к асимптотической ЛАЧХ на вывод об устойчивости не повлияют.

Переходы ФЧХ через линию -180° , а возможно и через линии $-3 \cdot 180^\circ$, $-5 \cdot 180^\circ$, ... при высоком порядке характеристического полинома подсчитывают переходы не только на начальном положительном, но и на после-

дующих положительных участках ЛАЧХ. На рис. 13.22 показан один из возможных случаев: разность между числом положительных n^+ и числом отрицательных n^- переходов составляет $n_N = n^+ - n^-$ и равна $1=r/2$, и замкнутая система устойчива.

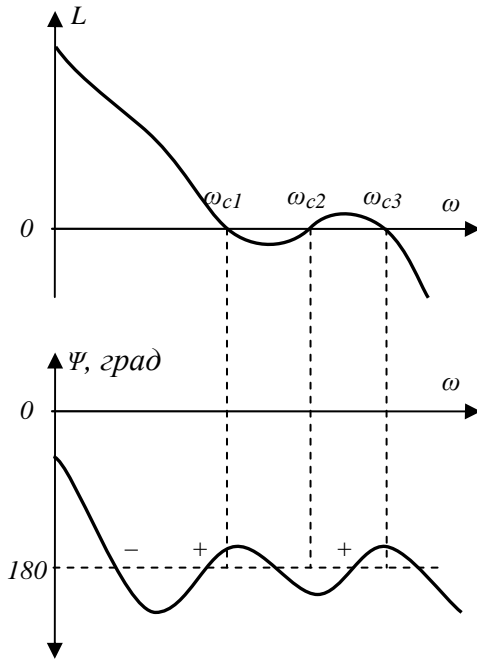


Рис. 13.22. ЛАЧХ разомкнутой неустойчивой ($r=2$) разомкнутой системы

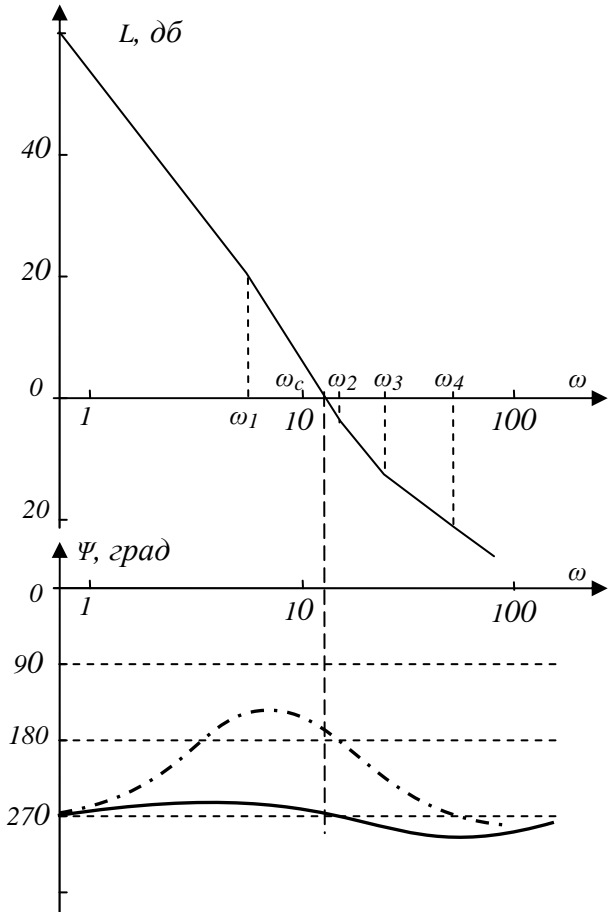


Рис. 13.23. ЛАЧХ условной разомкнутой системы

Знаменатель передаточной функции разомкнутой многоконтурной системы n -го порядка обычно представляет собой полином n -го порядка, и для построения ЛАЧХ его разлагают на элементарные сомножители. Эти вычисления можно существенно упростить, если воспользоваться тем, что критерий Найквиста позволяет переносить часть членов знаменателя передаточной функции разомкнутой системы, кроме старшего, в числитель.

Пример 13.9. Исследовать устойчивость САР, если передаточная функция ее разомкнутой цепи

$$W = \frac{k(\tau s + 1)}{d_0 s^5 + d_1 s^4 + d_2 s^3 + d_3 s^2 + d_4 s + 1} = \frac{G(s)}{D(s)},$$

где $k=80$; $\tau=0,2$ с, $d_0=0,0002$ с⁵; $d_1=0,008$ с⁴; $d_2=0,075$ с³; $d_3=0,3$ с²; $d_4=0,8$ с.

Перенесем выражение $d_3s^2 + d_4s + 1$ из знаменателя в числитель как дополнительное слагаемое к $G(s)$, и полученную таким образом условную передаточную функцию разомкнутой системы W^* разложим на элементарные сомножители:

$$W^* = \frac{0,3s^2 + 16,8s + 81}{0,0002s^5 + 0,008s^4 + 0,075s^3} = \frac{1080(0,0037s^2 + 0,205s + 1)}{s^3(0,00267s^2 + 0,107s + 1)} =$$

$$= \frac{1080(0,185s + 1)(0,02s + 1)}{s^3(0,0668s + 1)(0,04s + 1)}$$

Строим логарифмические частотные характеристики условной разомкнутой системы по следующим данным: $20\lg k = 60,6\text{дБ}$; $\omega_1 = 1/0,185 = 5,3\text{ с}^{-1}$; $\omega_2 = 1/0,0668 = 15\text{ с}^{-1}$; $\omega_3 = 1/0,04 = 25\text{ с}^{-1}$; $\omega_4 = 1/0,02 = 50\text{ с}^{-1}$.

Условная разомкнутая система имеет три нулевых корня, и поэтому ФЧХ нужно дополнить начальным монотонным участком, сводящим ее к нулю при $L \rightarrow \infty$. Следовательно, на этом участке ФЧХ имеет один отрицательный переход через линию -180° ($n^- = 1$) – см. ФЧХ в виде сплошной линии.

Поскольку положительных переходов ФЧХ через уровень -180° нет ($n^+ = 0$), а число корней $r = 0$, то при замыкании исследуемая система становится неустойчивой. Для устойчивости замкнутой системы ФЧХ разомкнутой цепи следует модифицировать так, как, например, показано на рис. 13.23 (штрихпунктирная кривая), потому что эта кривая имеет один положительный переход ($n^+ = 1$).

13.2. Запас устойчивости

Для нормального функционирования всякая САР должна быть достаточно удалена от границы устойчивости и иметь достаточный запас устойчивости. Необходимость этого обусловлена прежде всего следующими причинами:

- 1) уравнения элементов САР, как правило, идеализированы, при их составлении не учитывают второстепенные факторы;
- 2) при линеаризации уравнений погрешности приближения дополнительно увеличиваются;
- 3) параметры элементов определяют с некоторой погрешностью;
- 4) параметры однотипных элементов имеют технологический разброс;
- 5) при эксплуатации параметры элементов изменяются вследствие старения.

Следовательно, устойчивая по расчету САР в действительности может оказаться неустойчивой. В следящих системах запас устойчивости необходим еще и для хорошего качества регулирования (см. п.14).

О запасе устойчивости можно судить по расположению корней характеристического уравнения системы: чем дальше отстоят они от мнимой осп (в левой полуплоскости), тем больший запас устойчивости. Каждый критерий устойчивости также позволяет определять запас устойчивости.

Количественная оценка запаса устойчивости зависит от того, какой критерий устойчивости выбран. В практике инженерных расчетов наиболее широко используют определение запаса устойчивости на основании критерия Найквиста, по удалению АФЧХ разомкнутой системы от критической точки с координатами $[-1, j0]$, что оценивают двумя показателями: запасом устойчивости по фазе γ и запасом устойчивости по модулю (по амплитуде) h .

Для того чтобы САР имела запасы устойчивости не менее γ и h , АФЧХ ее разомкнутой цепи при удовлетворении критерия устойчивости не должна заходить в часть кольца, заштрихованного на рис. 13.24, а. Эта запретная зона, включающая в себя точку с координатами $[-1, j0]$, ограничена лучами, проведенными из начала осей координат под углами $-180^\circ + \gamma$ и $-180^\circ - \gamma$, и дугами с радиусами $1+H$ и $1-H$, где H определяется соотношением $\lg H = h/20$.

Если устойчивость определяется по ЛАЧХ, то для обеспечения запасов устойчивости не менее γ и h необходимо, чтобы:

а) при $h \geq L \geq -h$ ФЧХ удовлетворяла неравенствам $\Psi > -180^\circ + \gamma$ или $\Psi < -180^\circ - \gamma$, т.е. не заходила в заштрихованную область 1 на рис. 13.24, б;

б) при $-180^\circ + \gamma \geq \Psi \geq -180^\circ - \gamma$ АЧХ удовлетворяла неравенствам $L > h$ или $L < -h$, т.е. не заходила в заштрихованные области 2 на рис. 13.24, б.

Для абсолютно устойчивой системы запасы устойчивости γ и h определяют так, как показано на рис. 13.25.

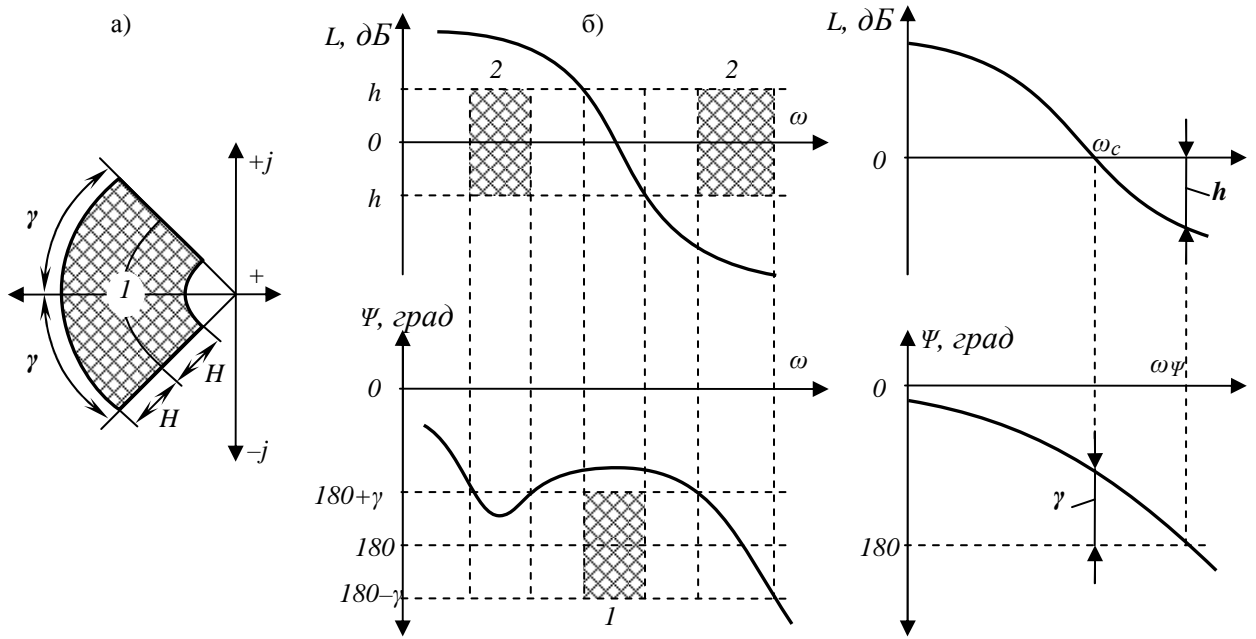


Рис. 13.24. Зоны, определяющие требования к запасу устойчивости:
а – при построении АФЧХ; б – при построении ЛЧХ

Рис. 13.25. Определение запаса устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам

Запас по фазе

$$\gamma = 180^\circ + \Psi(\omega_c), \quad (13.15)$$

где ω_c – частота среза, при которой $L = 0$.

Запас по модулю

$$h = -L(\omega_\Psi), \quad (13.16)$$

где ω_Ψ – частота, при которой $\Psi = -180^\circ$.

Необходимые значения запасов устойчивости зависят от класса САР и требований к качеству регулирования. Ориентировочно должно быть $\gamma = 30 \div 60^\circ$ и $h = 6 \div 20$ дБ.

По ЛАЧХ (см. рис. 13.19) определим запасы устойчивости исследованной системы: $\gamma_a \approx 20^\circ$ и $h_a \approx 7$ дБ.

13.3. Выделение областей устойчивости

Весьма часто возникает необходимость исследовать влияние на устойчивость САР тех или иных ее параметров. Обычно рассматривают влияние таких параметров, которые могут быть изменены, например передаточных коэффициентов и постоянных времени усилительно-преобразовательных элементов.

Допустимые пределы изменения одного или двух параметров определяют при неизменных значениях остальных. В последнем случае на плоскости двух параметров выделяют (строят) область устойчивости, т. е. такую область изменения этих параметров, при которых САР остается устойчивой.

Построение областей устойчивости возможно с помощью любого из критериев устойчивости. Однако так поступают лишь при определении граничного значения передаточного коэффициента разомкнутой системы, а при выделении областей устойчивости привлекают более общий метод *D*-разбиения. Принципиально это метод разделения *n*-мерного пространства параметров на области, каждой из которых соответствует определенное число правых корней характеристического уравнения. Область, которой соответствует нуль правых корней, есть область устойчивости. Практически с помощью *D*-разбиения выделяют области устойчивости в плоскости одного и двух параметров. Предложен также метод построения областей устойчивости в плоскости обобщенных параметров.

13.3.1. *D*-разбиение плоскости одного параметра

Пусть требуется выяснить, в каких пределах можно изменять параметр μ , не нарушая при этом устойчивости. Предположим, что μ входит в характеристическое уравнение замкнутой системы линейно и уравнение может быть приведено к виду

$$\mu N + M = 0 \quad (13.17)$$

где M и N – полиномы от переменной Лапласа s .

Разрешим уравнение (13.17) относительно параметра μ :

$$\mu = -M/N \quad (13.18)$$

Это равенство определяет зависимость параметра разбиения от значения корней характеристического уравнения. Выясним, при каких значениях μ система находится на границе устойчивости, т.е. какие значения μ соответствуют чисто мнимому корню $j\omega$. Сделаем подстановку $s=j\omega$ и построим на комплексной плоскости (рис. 13.26) график функции

$$\mu(j\omega) = -M(j\omega)/N(j\omega) = \text{Re}(\omega) + j\text{Im}(\omega), \quad (13.19)$$

при изменении частоты от $-\infty$ до $+\infty$.

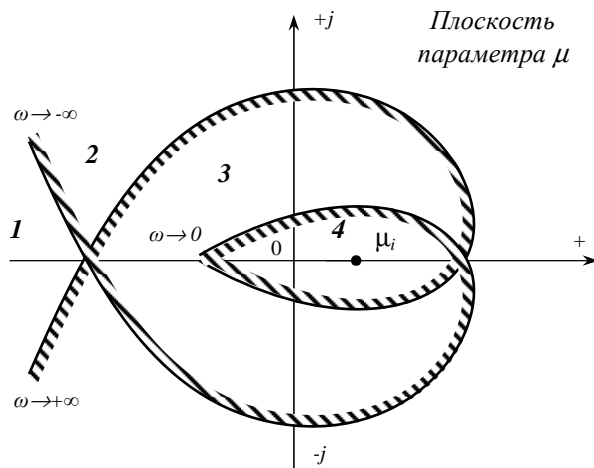


Рис 13.26. D -разбиение плоскости параметра μ

Функция $\text{Re}(j\omega)$ – четная функция ω , а $\text{Im}(j\omega)$ – нечетная, поэтому искомая кривая симметрична относительно вещественной оси и достаточно построить одну ветвь кривой для положительных частот, а затем построить ее зеркальное отображение относительно вещественной оси.

Полученную кривую называют *кривой D -разбиения*, она представляет собой отображение мнимой оси плоскости корней характеристического уравнения на плоскость параметра μ . Если, двигаясь по кривой при изменении частоты ω от $-\infty$ до $+\infty$, наносить штриховку слева, то она будет направлена в ту часть плоскости параметра μ , которая соответствует левой полуплоскости корней.

Кривая D -разбиения разделяет плоскость параметра μ на несколько областей (области 1,2,3 и 4 на рис. 13.26). Та из них, внутрь которой направлена штриховка кривой, *может быть областью устойчивости* (область 4). Теперь нужно взять какую-либо точку μ_i на оси абсцисс из этой области и, пользуясь любым из критериев устойчивости, проверить устойчивость системы при $\mu = \mu_i$. Если критерий удовлетворяется, то рассматриваемая область и есть область устойчивости.

Равенство (13.19) условно определяет параметр μ как комплексную величину. На самом деле это вещественная величина и на плоскости μ следует рассматривать только те точки, которые лежат на вещественной оси. Поэтому значения параметра μ , при которых система остается устойчивой, определяются отрезком положительной полуоси абсцисс, лежащим внутри области устойчивости.

Иногда параметр μ , влияние которого на устойчивость САР исследуют, входит в характеристическое уравнение, как в первой, так и во второй степени. Тогда можно обозначить $\mu^2 = \eta$ и делать D -разбиение плоскости параметров μ и η .

Пример 13.10. Передаточная функция разомкнутой САР равна

$$W = \frac{k(\tau s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)},$$

где $k = 50$; $T_1 = 0,4$ с; $T_2 = 0,1$ с.

Требуется выяснить влияние постоянной времени τ дифференцирующего звена на устойчивость замкнутой системы:

$$T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2) s^2 + (1 + k\tau) s + k = 0$$

$$0,04s^3 + 0,5s^2 + (1 + 50\tau)s + 50 = 0$$

Решим это уравнение относительно τ :

$$\tau = -\frac{1}{50s}(0,04s^3 + 0,5s^2 + s + 50)$$

и выполним подстановку $s = j\omega$:

$$\tau = -\frac{1}{50j\omega}(-0,04j\omega^3 - 0,5\omega^2 + j\omega + 50) = \operatorname{Re}(\omega) + j\operatorname{Im}(\omega)$$

$$\text{где } \operatorname{Re}(\omega) = 0,02(-1 + 0,04\omega^2); \operatorname{Im}(\omega) = \frac{1}{\omega}(1 - 0,01\omega^2).$$

Для построения кривой D -разбиения определим:

- а) при $\omega = 0$ $\text{Re} = -0,02$ и $\text{Im} = +\infty$
- б) при $\omega_1 = 5$ $\text{Re} = 0$ $\text{Im} = 0,15$
- в) при $\omega_2 = 10$ $\text{Re} = 0,06$ $\text{Im} = 0$
- г) при $\omega = \infty$ $\text{Re} = +\infty$ $\text{Im} = -\infty$

Полученные данные позволяют построить кривую (рис. 13.27) на участке от $\omega = 0$ до $\omega = +\infty$. Построив зеркальное отображение этого участка кривой относительно оси абсцисс, получим второй ее участок (от $\omega = -\infty$ до $\omega = 0$). Двигаясь по кривой от $\omega = -\infty$ к $\omega = +\infty$, штрихуем ее слева.

Плоскость разделена на три области, из которых на устойчивость претендует область 3, так как штриховка направлена внутрь этой области. Проверим устойчивость системы при $\tau = 0,1$ – эта точка лежит в области 3. Характеристическое уравнение при этом значении τ

$$0,04s^3 + 0,5s^2 + 6s + 50 = 0.$$

Критерий устойчивости Гурвица удовлетворяется: все коэффициенты ХП положительные и выполняется неравенство:

$$d_1 d_2 > d_0 d_3$$

$$0,5 \cdot 6 = 3 > 0,04 \cdot 50 = 2$$

Следовательно, область 3 есть область устойчивости. Рассматриваемая САР устойчива при $\tau > 0,06$.

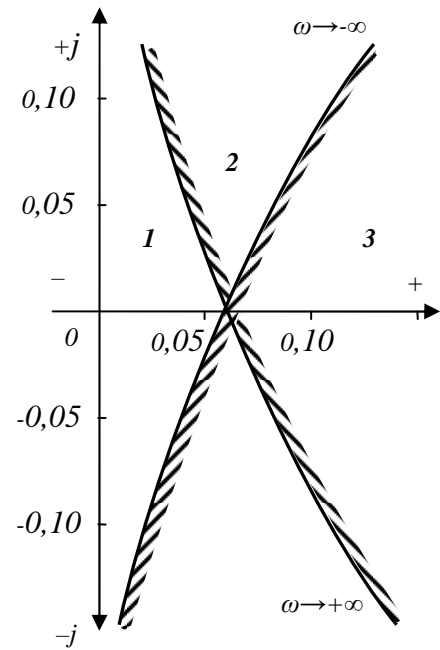


Рис. 13.27. D -разбиение плоскости параметра τ

14. Оценка качества регулирования

14.1. Понятие и показатели качества регулирования

Понятие качества регулирования. Качество САР определяется совокупностью свойств, обеспечивающих эффективное функционирование как самого объекта управления, так и регулирующего устройства, т.е. всей системы регулирования в целом. Свойства, составляющие эту совокупность и имеющие количественные измерители, называют *показателями качества системы регулирования*.

Качество АС, как и любого технического устройства, может быть оценено такими общепринятыми показателями, как вес системы, ее габариты, стоимость, надежность, долговечность и т.п. Совокупность этих общетехнических показателей характеризуют качество АС в широком смысле.

В ТАУ и в практике автоматизации термины «качество системы», «качество регулирования» используют, как правило, в более узком смысле: рассматривают только статические и динамические свойства системы. Эти свойства определяют точность поддержания регулируемой величины (выходной величины объекта) на заданном уровне в установившихся и переходных режимах, т.е. обеспечивают эффективность процесса регулирования. Для такого, более узкого понятия качества АС, охватывающего только ее статические и динамические свойства, применяют термин «качество регулирования», а сами свойства системы, выраженные в количественной форме, называют *показателями качества регулирования*.

Точность системы в переходных режимах оценивают при помощи прямых и косвенных показателей. *Прямые показатели* определяют по графику переходного процесса, возникающего в системе при ступенчатом внешнем воздействии. *Косвенные показатели* качества определяют по рас-

пределению корней характеристического уравнения или по частотным характеристикам системы.

К особой категории показателей качества относятся так называемые *интегральные оценки*, которые вычисляют либо непосредственно по переходной функции системы, либо по коэффициентам ПФ системы.

Точность системы в переходных режимах определяется величинами отклонений регулируемой переменной $x(t)$ от заданного значения $x_3(t)$ и длительностью существования этих отклонений. Величина и длительность отклонений зависят от характера переходного процесса в системе. Характер переходного процесса в свою очередь зависит как от свойств системы, так и от места приложения внешнего воздействия.

При самой общей оценке качества обращают внимание прежде всего на форму переходного процесса. Различают следующие типовые переходные процессы (рис. 14.1): *колебательный* (кривая 1), *монотонный* (кривая 2) и *апериодический* (кривая 3).

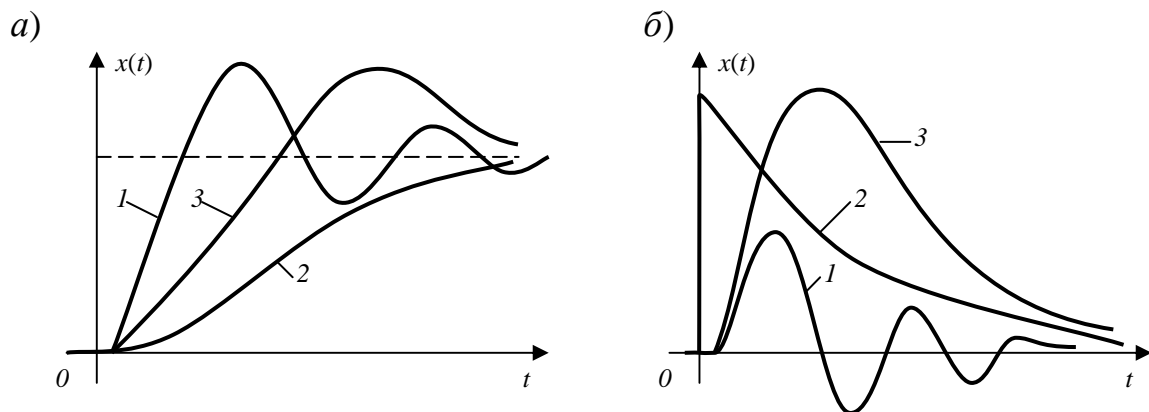


Рис. 14.1. Типовые переходные процессы:
а – по заданию; б – по возмущению

Каждый из трех типовых процессов имеет свои преимущества и недостатки, и предпочтение той или иной форме процесса делают с учетом особенностей регулируемого объекта.

Прямые показатели. На графиках переходных процессов (рис. 14.2), вызванных ступенчатым изменением задающего воздействия x_3 (а) и воз-

мушения y_6 , действующего на входе объекта (δ), за начало отсчета для выходной величины $x(t)$ принято значение $x(0)$, которое было до подачи ступенчатого воздействия.

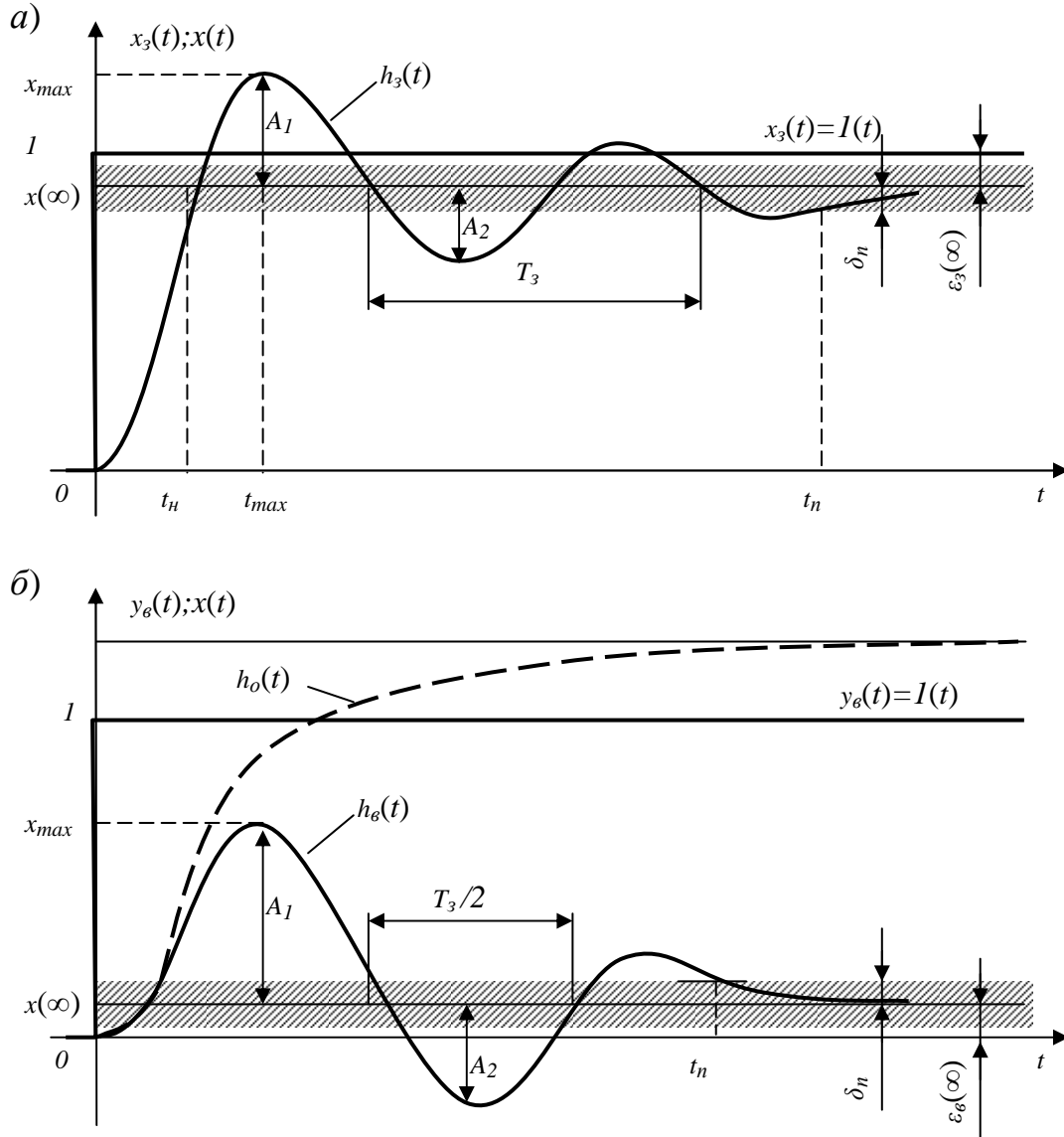


Рис. 14.2. Прямые показатели качества процесса регулирования:
а – по каналу задания; б – по каналу возмущения

Одним из главных прямых показателей качества является *перерегулирование* σ (%), которое равно отношению первого максимального отклонения регулируемой переменной $x(t)$ от ее установившегося значения $x(\infty)$ к этому установившемуся значению (рис. 14.2, а):

$$\sigma = \frac{x_{\max} - x(\infty)}{x(\infty)} \cdot 100 = \frac{A_1}{x(\infty)} \cdot 100. \quad (14.1)$$

Качество регулирования считается удовлетворительным, если перерегулирование не превышает 30-40%.

Для переходных процессов, вызванных возмущающим воздействием y'_g на входе объекта (рис. 14.2, б), перерегулирование можно определять как отношение второго (отрицательного) максимального отклонения A_2 к первому максимальному отклонению A_1 :

$$\sigma = \frac{A_2}{x_{\max} - x(\infty)} \cdot 100 = \frac{A_2}{A_1} \cdot 100. \quad (14.2)$$

Показатель, вычисляемый по данной формуле для переходных процессов по каналу возмущения, называют также *колебательностью*. Другой важной характеристикой таких процессов служит *динамический коэффициент регулирования* R_d (%), который равен отношению первого максимального отклонения x_{\max} к отклонению выходной переменной $x(t)$ нерегулируемого объекта, вызванному тем же возмущением, т.е.

$$R_d = \frac{x_{\max}}{k_o} \cdot 100. \quad (14.3)$$

Коэффициент R_d показывает, насколько эффективно компенсирующее действие регулятора на объект.

Длительность существования динамических отклонений регулируемой переменной $x(t)$ от ее нового установившегося значения $x(\infty)$ принято оценивать с помощью нескольких характерных моментов времени. Самым важным из этой группы показателей является длительность переходного процесса (время регулирования) t_{π} – интервал времени от момента приложения ступенчатого воздействия до момента, после которого отклонения регулируемой переменной $x(t)$ от ее нового установившегося значения $x(\infty)$

становятся меньше некоторого заданного числа δ_n , т.е. до момента, после которого выполняется условие $|x(t) - x(\infty)| \leq \delta_n$.

В промышленной автоматике величину δ_n принимают обычно равной 5% от установившегося значения $x(\infty)$ $\delta_n = 0,05x(\infty)$. При оценке длительности переходных процессов, вызванных единичным возмущающим воздействием y_b на входе объекта (см. рис.14.2, б) величину δ_n можно принимать равной 5% от значения передаточного коэффициента объекта $k_o[\delta_n = 0,05k_o]$, а для процессов, вызванных воздействием x_b на входе объекта, – 5% от начального отклонения $x(+0)$ $[\delta_n = 0,05x(+0)]$.

Дополнительными временными показателями качества являются (рис. 14.2, а): *время нарастания* t_n , *время достижения первого максимума* t_{\max} и *период затухающих колебаний* T_3 . Эти показатели вместе с t_n характеризуют быстродействие САР.

Прямым показателем качества служить также степень затухания

$$\psi = \frac{A_1 - A_3}{A_1} = 1 - \frac{A_3}{A_1}, \quad (14.4)$$

где A_1 и A_3 – соседние максимальные отклонения (амплитуды) одного знака (рис. 14.2, б). Интенсивность затухания колебаний в системе считается удовлетворительной, если $\psi = 0,75 \dots 0,95$.

Колебательность системы можно оценивать, наряду с показателями σ и ψ , числом переходов N величины $x(t)$ через установившееся значение $x(\infty)$ на интервале t_n .

Три главных показателя качества – перерегулирование σ , первое максимальное отклонение (динамическая ошибка) x_{\max} и длительность t_n – тесно связаны между собой. Они зависят от всех параметров системы, но наиболее сильно – от передаточного коэффициента разомкнутого контура. Причем, с увеличением этого коэффициента динамическая ошибка по каналу возмущения всегда уменьшается, а перерегулирование и длитель-

ность переходного процесса, как правило, увеличиваются (рис. 14.3). Отыскание оптимального компромисса между этими двумя противоречивыми тенденциями является одной из основных задач синтеза систем регулирования.

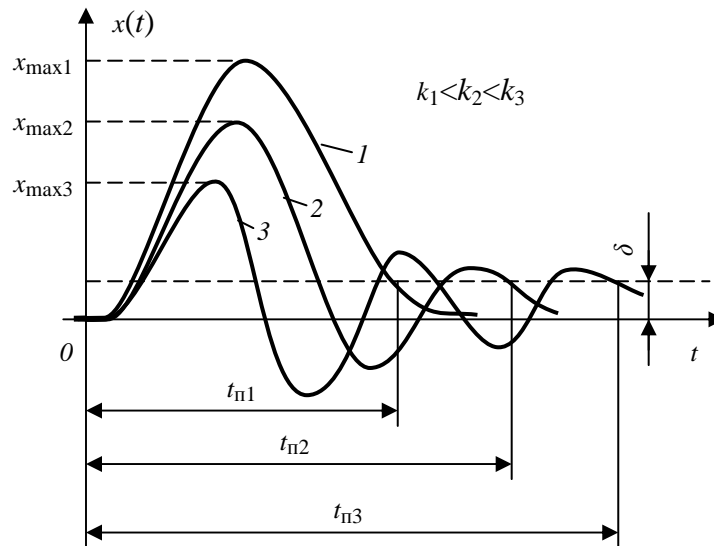


Рис. 14.3. Влияние передаточного коэффициента разомкнутого контура на показатели переходного процесса

Рассмотренные прямые показатели качества удобно использовать в тех случаях, когда график переходного процесса $x(t)$ можно получить экспериментально в реальной САР или путем моделирования системы на ЭВМ. Если же такой возможности нет или она связана с определенными трудностями решения или моделирования дифференциальных уравнений высокого порядка, то пользуются косвенными показателями качества, которые вычисляются без построения графика переходного процесса, по коэффициентам уравнения или по частотным характеристикам системы.

Частотные показатели. Наиболее важными и одновременно удобными косвенными показателями являются *частотные показатели*, которые определяются по частотным характеристикам замкнутого и разомкнутого контуров системы.

По АЧХ замкнутой САР по основному каналу (рис. 14.4) оценивают частотный показатель колебательности M , равный отношению максимума A_{\max} характеристики к ее начальному значению $A(0)$:

$$M = A_{\max} / A(0). \quad (14.5)$$

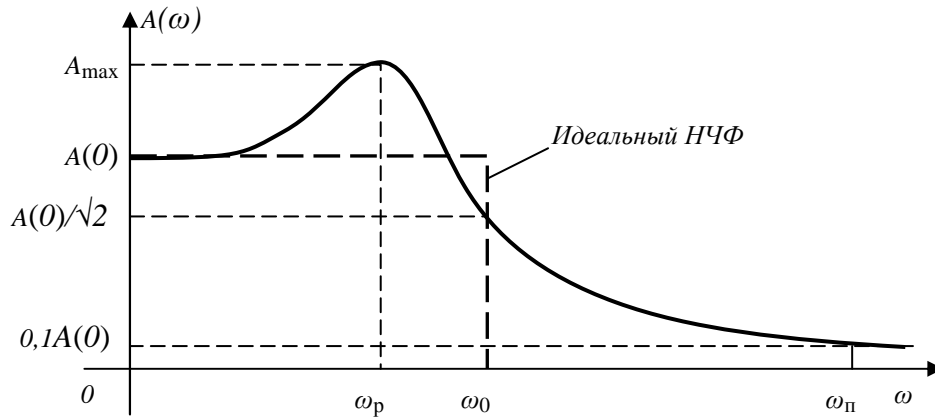


Рис. 14.4. Частотные показатели качества

Чем больше это отношение, тем сильнее колебательность системы (тем больше перерегулирование) и, как следствие, больше длительность переходного процесса. Качество системы считается обычно удовлетворительным, если показатель находится в пределах 1,1–1,5.

Косвенными частотными показателями быстродействия системы служат характерные частоты (рис. 14.4): резонансная частота ω_p и частота незатухающих колебаний $\omega_0 \approx \omega_p$ и частота пропускания $\omega_{\pi} \approx 3\omega_0$. По АФХ разомкнутого контура определяют *запас устойчивости по амплитуде* (рис. 14.5, а)

$$\Delta A = 1 - A(\omega_{\pi}) \quad (14.6)$$

и запас устойчивости по фазе (рис. 14.5, б)

$$\Delta \Psi = \pi - |\Psi(\omega_{\pi})|, \quad (14.7)$$

которые вместе характеризуют удаленность кривой от критической точки $(-1, j0)$. При проектировании систем обычно задаются запасом по амплитуде $\Delta A \geq 0,5 \div 0,6$ и по фазе $\Delta \Psi \geq 30 \div 60^\circ$. При этом обеспечивается, как правило, и удовлетворительное качество процесса регулирования.

Запасы устойчивости необходимо принимать в связи с тем, что некоторые параметры объекта регулирования могут произвольно изменяться в процессе работы системы. Расхождения между фактическими значениями параметров объекта и значениями, при которых выполняется анализ устойчивости системы, могут иметь место и по другим причинам. Так, при математическом описании объекта применяется определенная идеализация – отбрасываются второстепенные факторы. Погрешности возникают также при экспериментальном определении и при линеаризации характеристик объекта.

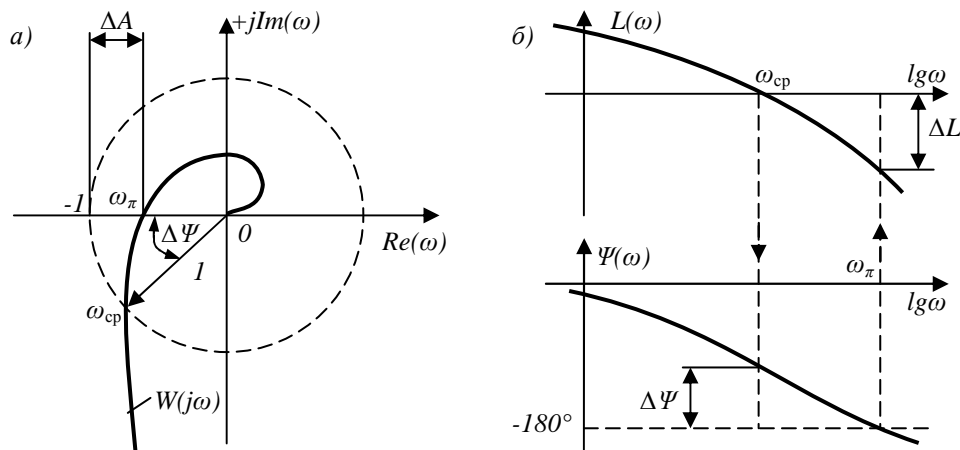


Рис. 14.5. Запасы устойчивости системы

Корневые показатели. Для косвенной оценки качества регулирования используют также *корневые показатели*, определяемые по расположению корней характеристического полинома замкнутой системы на комплексной плоскости (рис. 14.6, а).

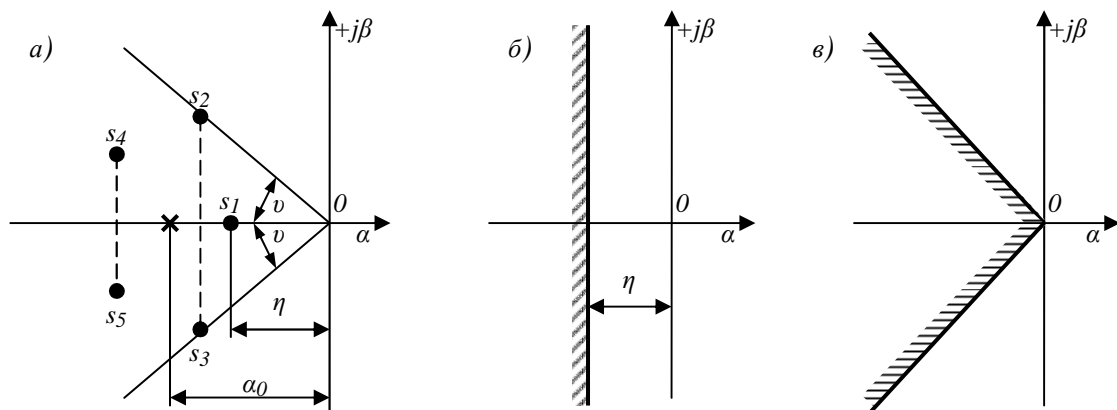


Рис. 14.6. Корневые показатели качества

Наиболее общим корневым показателем качества является *среднее геометрическое значение модулей корней*

$$\alpha_0 = +\sqrt[n]{|s_1 s_2 \dots s_n|}, \quad (14.8)$$

которое легко вычисляется через крайние коэффициенты характеристического уравнения

$$\alpha_0 = +\sqrt[n]{d_n/d_0}. \quad (14.9)$$

Среднегеометрический корень α_0 определяет на действительной оси комплексной плоскости $\alpha - j\beta$ (рис. 14.6, *a*) точку, являющуюся геометрическим центром всех корней характеристического уравнения. Величина α_0 имеет размерность с^{-1} и служит обобщенной мерой быстродействия системы: чем меньше показатель α_0 , тем ближе «созвездие» корней к мнимой оси и тем больше длительность переходного процесса.

Для колебательной системы второго порядка показатель α_0 равен частоте незатухающих колебаний ω_0 .

В числитель подкоренного выражения в формуле (14.9) входит коэффициент d_n , который зависит от передаточного коэффициента k разомкнутого контура: для статических систем $d_n = 1 + k$, астатических $d_n = k$. Отсюда можно сделать вывод: чем больше коэффициент k , тем лучше быстродействие системы (при прочих равных условиях – одинаковой конфигурации «созвездия» корней).

Основное влияние на характер переходного процесса оказывают корни, расположенные ближе к мнимой оси, которые дают наиболее длительные составляющие переходного процесса и называются *доминирующими*.

Расстояние от мнимой оси до ближайшего к ней корня называется *степенью устойчивости* η . Если ближайший корень действительный (рис. 14.6, *a*, корень s_1), то доминирующей составляющей переходного процесса будет экспонента с показателем степени $s_k = -\eta$:

$$x_k(t) = C_k e^{-\eta t}, \quad (14.10)$$

если же ближайшими к мнимой оси являются два сопряженных комплексных корня, то доминирующей будет одна колебательная составляющая, которая затухает также по экспоненциальной составляющей. В обоих случаях длительность переходного процесса (для $\delta_n=0,05C_k$) определяется приближенной формулой

$$t_n \leq 3/\eta, \quad (14.11)$$

где знак равенства относится к случаю действительного доминирующего корня, а знак неравенства – к случаю комплексных доминирующих корней.

При выборе настроечных параметров регулятора всегда стремятся скомпенсировать (исключить из уравнения) доминирующие (наименьшие корни), которым соответствуют наибольшие постоянные времени объекта, и тем самым улучшить быстродействие системы.

Колебательные свойства САР предопределяет та k -я пара комплексных корней $s_k=\alpha_k\pm\beta_k$, для которой наибольшее отношение

$$\eta_k = |\beta_k|/|\alpha_k| \quad (14.12)$$

или наибольший угол ν между двумя симметричными лучами (рис. 14.6, а). В данном случае такой парой, предопределяющей доминирующую колебательную составляющую переходного процесса, являются комплексные корни s_2 и s_3 .

Отношение η_d мнимой части β к действительной части α доминирующей пары комплексных корней называют *степенью колебательности*.

В практических расчетах чаще используют *корневой показатель колебательности*

$$m_d = \frac{\alpha_k}{\beta_k} = \frac{1}{\eta_d}, \quad (14.13)$$

также определяемый через доминирующую пару комплексных корней. При выборе настроек регуляторов стремятся получить значения $m=0,2\div 0,5$.

14.2. Влияние расположения нулей и полюсов передаточной функции на переходную характеристику

В устойчивой системе имеет место следующее:

1. Близко расположенные полюс и нуль взаимно компенсируются. Их расположение считается близким при удовлетворении неравенства $|s_k - p_k| \leq 0,1 \quad |s_k| \approx 0,1|p_k|$, где s_k, p_k – полюсы и нули ПФ соответственно.

2. Уменьшение амплитуды колебательной составляющей, создаваемой комплексными полюсами, и приближение к асимптоте экспоненциальной составляющей, создаваемой вещественным полюсом, происходит тем быстрее, чем больше модуль вещественного полюса.

3. Время регулирования ПХ зависит в основном от абсолютного значения вещественной части доминирующих полюсов/полюса. Доминируют ближайшие к мнимой оси комплексные полюса или ближайший вещественный полюс.

4. Перерегулирование ПХ зависит от отношения мнимой части доминирующих комплексных полюсов к вещественной.

5. Близкие к началу координат нули, если они не компенсируются полюсами, и удалены от него, но не доминирующие полюса, увеличивают время регулирования и перерегулирование.

14.3. О взаимном расположении нулей и полюсов передаточной функции и изображения внешнего воздействия

Целью САР является воспроизведение с минимальными погрешностями задающего воздействия и максимально возможное подавление воз-

мущений. Достижению этой цели способствует выполнение следующих рекомендаций:

1. Полюсы ПФ необходимо удалять от области расположения полюсов внешнего воздействия и во всяком случае не допускать их совпадения, что приводит к резонансу.

2. Нули ПФ относительно возмущения следует располагать по возможности ближе к полюсам изображения этого возмущения. При этом уменьшается вынужденная составляющая регулируемой координаты, создаваемая возмущением.

3. Нули и полюсы ПФ по задающему каналу относительно задающего воздействия следует располагать так, чтобы при всех полюсах изображения задающего воздействия она имела приблизительно одно и то же значение. При этом ошибка слежения минимальна.

4. Нули ПФ необходимо располагать около ее полюсов, наиболее близких к мнимой оси. Это уменьшает собственную сопровождающую составляющую.

5. Полюсы ПФ следует по возможности удалять от мнимой оси: чем дальше полюсы от мнимой оси, тем быстрее затухает свободная составляющая.

14.4. Оценка качества переходной характеристики по частотным характеристикам

Приблизительно качество переходной характеристики можно оценить по вещественной частотной характеристике, так как между этими характеристиками минимально-фазовой системы есть взаимосвязь, определяемая зависимостью

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Re}(\omega) \sin \omega t}{\omega} d\omega. \quad (14.14)$$

Наиболее употребительны те оценки, которые могут быть вычислены без дополнительных расчетов. Основными из них являются следующие.

1. Установившееся значение $h_y = h(\infty)$ переходной характеристики определяется начальным значением ВЧПФ:

$$h_y = \operatorname{Re}(0). \quad (14.15)$$

2. Начальное значение $h_0 = h(0)$ ПХ определяется конечным значением ВЧПФ:

$$h(0) = \operatorname{Re}(\infty). \quad (14.16)$$

3. Двум ВЧПФ, сходным по форме, но отличающимся масштабом по оси абсцисс в n раз, соответствуют ПХ, также сходные по форме и отличающиеся масштабом по оси абсцисс в $1/n$ раз. Если ВЧПФ $\operatorname{Re}_1(\omega)$ соответствует ПХ $h_1(t)$ (рис. 14.7), то ВЧПФ $\operatorname{Re}_2(\omega)$ соответствует ПХ $h_2(t/n)$.

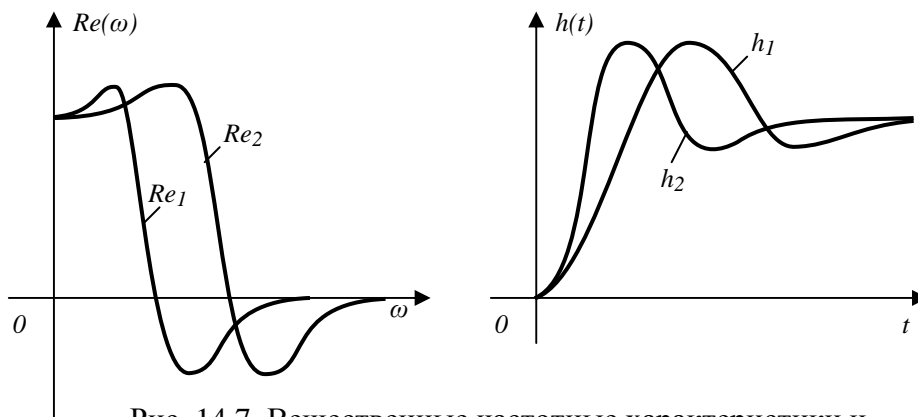


Рис. 14.7. Вещественные частотные характеристики и соответствующие им переходные характеристики

4. Двум ВЧПФ, сходным по форме, но отличающимся масштабом по оси ординат в n раз, соответствуют ПХ, также сходные по форме отличающиеся масштабом по оси ординат в n раз.

5. Разрыв непрерывности ВЧПФ свидетельствует о том, что система находится на колебательной границе устойчивости. Разрыву при $\omega=0$ соответствует апериодическая граница устойчивости (наличие нулевого корня характеристического уравнения) и разрыву при $\omega \neq 0$ – колебательная граница устойчивости (наличие пары чисто мнимых корней характеристического уравнения).

6. Острый пик ВЧПФ при угловой частоте ω_i (с^{-1}) свидетельствует о медленно затухающих колебаниях ПХ с частотой, близкой к $\omega_i/2\pi$ (Гц).

7. Если ВЧПФ непрерывная положительная и имеет вид вогнутой кривой, т.е. ее производная меньше нуля и монотонно уменьшается по абсолютному значению, то ПХ монотонная.

8. Если при какой-либо частоте ордината ВЧПФ больше начальной, то ПХ немонотонная. Это один из признаков немонотонности.

9. Если ВЧПФ непрерывная невозрастающая и по форме приближается к трапецеидальной, то ПХ приближенно можно определить по таблице 12 h -функций, где $\chi=\omega_1/\omega_2$ (рис. 14.7). В этом случае время регулирования находится в пределах

$$\frac{\pi}{\omega_n} < t_p < \frac{4\pi}{\omega_n}. \quad (14.17)$$

14.5. Интегральные показатели качества

Каждый из рассмотренных прямых и косвенных показателей качества характеризует лишь одно какое-либо свойство системы, лишь один признак переходного процесса или частотной характеристики. Причем, все показатели связаны с настроечными параметрами регулятора сложными зависимостями, имеющими, как правило, противоречивый характер: изме-

нение параметра приводит к улучшению одних показателей качества и к ухудшению других. Это обстоятельство существенно затрудняет выбор параметров регулятора. Поэтому в инженерной практике широко используются интегральные показатели или оценки качества.

Интегральные оценки представляют собой определенные интегралы по времени (в пределах от 0 до ∞) от некоторой функции регулируемой переменной $x(t)$ [или сигнала ошибки $\varepsilon(t)$]:

$$Q = \int_0^{\infty} f_0[x(t), t] dt. \quad (14.18)$$

Подынтегральная функция f_0 выбирается таким образом, чтобы интеграл (14.18) лучше характеризовал качество системы и проще выражался через коэффициенты передаточной функции замкнутой системы. Чтобы интеграл был сходящимся, в функцию f_0 вводят не абсолютные значения $x(t)$ или $\varepsilon(t)$, а их отклонения от конечных, установившихся значений.

Простейшей интегральной оценкой является *линейная интегральная оценка*

$$Q_{\text{л}} = \int_0^{\infty} [x(\infty) - x(t)] dt, \quad (14.19)$$

которая равна площади, заключенной между прямой $x(\infty)$ и кривой переходного процесса $x(t)$ (рис. 14.9, а). Интегральная оценка (14.19) учитывает как величину динамических отклонений, так и длительность их существования. Поэтому *чем меньше оценка, тем лучше качество процесса управления*.

Разность под знаком интеграла (14.19) динамической или переходной составляющей сигнала ошибка:

$$x(\infty) - x(t) = x_{\text{с}} - \varepsilon(\infty) - x(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(\infty) = \varepsilon_{\text{п}}(t), \quad (14.20)$$

поэтому интегральную оценку (14.19) чаще определяют в таком виде

$$Q_{\text{л}} = \int_0^{\infty} \varepsilon_{\text{п}}(t) dt = \int_0^{\infty} [\varepsilon(t) - \varepsilon(\infty)] dt. \quad (14.21)$$

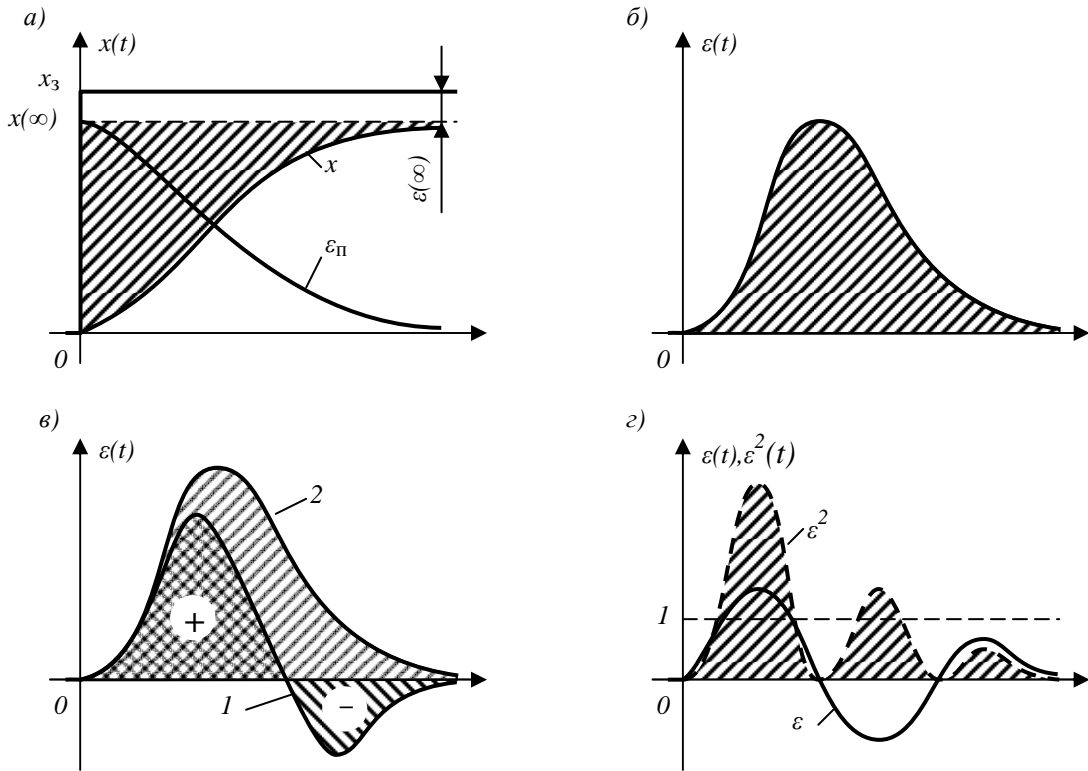


Рис. 14.8. Интегральные оценки качества

Интеграл (14.21) соответствует площади кривой переходной составляющей сигнала ошибки, вызванной изменением задающего воздействия (рис. 14.9, а) или возмущающего воздействия, (рис. 14.9, б). Площадь под кривой $\varepsilon_{\text{п}}(t)$ будет тем меньше, чем быстрее заканчивается переходный процесс и чем меньше отклонение сигнала $x(t)$ от x_3 . Поэтому настроечные параметры регулятора необходимо выбирать таким образом, чтобы интегральная оценка была минимальна.

Недостатком линейной интегральной оценки $Q_{\text{л}}$ является то, что ее можно применять лишь для заведомо неколебательных, апериодических переходных процессов. Интеграл (14.21), вычисленный для знакопеременной кривой 1, (рис. 14.9, в) будет существенно меньше интеграла, вычисленного для апериодической кривой 2 (хотя качество переходного процесса 2 явно лучше).

В связи с этим для колебательных переходных процессов применяют такие интегральные оценки, знакопеременность подынтегральной функции

которых тем или иным способом устранена. Такими оценками являются, например, *модульная интегральная оценка*

$$Q_M = \int_0^{\infty} |\varepsilon_{\Pi}(t)| dt \quad (14.22)$$

и ее модификация

$$Q'_M = \int_0^{\infty} t |\varepsilon_{\Pi}(t)| dt. \quad (14.23)$$

Оценка (14.23) придает больший вес тем значениям сигнала ошибки, которые имеют больший вес тем значениям сигнала ошибки, которые имеют место в конце переходного процесса.

Оценки (14.22) и (14.23) можно использовать только при исследовании систем на моделях, так как их вычисление через коэффициенты передаточной функции [без нахождения $\varepsilon_{\Pi}(t)$] невозможно.

При анализе и синтезе САР с колебательными свойствами наиболее широко используется *квадратичная интегральная оценка*

$$Q_{KB} = \int_0^{\infty} \varepsilon_{\Pi}^2(t) dt, \quad (14.24)$$

которая равна площади под кривой $\varepsilon_{\Pi}^2(t)$ (рис. 14.9, з).

Квадратичная оценка (14.24) так же, как и линейная, учитывает величину и длительность отклонений. Однако из-за возведения сигнала $\varepsilon_{\Pi}(t)$ в квадрат первые (большие) отклонения приобретают в конечном значении интеграла существенно больший вес, чем последующие (малые) отклонения. Поэтому минимальные значения оценки (14.24) всегда соответствуют колебательным процессам с малым затуханием.

С целью устранения этого недостатка применяют *улучшенную квадратичную оценку*

$$Q'_{KB} = \int_0^{\infty} [\varepsilon_{\Pi}^2(t) + T_B \dot{\varepsilon}_{\Pi}^2(t)] dt, \quad (14.25)$$

которая, кроме самих отклонений, учитывает с весовым коэффициентом $T_{\text{в}}$ производную отклонений. Обычно весовой коэффициент выбирают равным желаемому времени нарастания $t_{\text{н}}$ или принимают в пределах

$$\frac{t_{\text{п}}}{6} \leq T_{\text{в}} \leq \frac{t_{\text{п}}}{3}, \quad (14.26)$$

где $t_{\text{п}}$ – желаемая длительность переходного процесса.

Следует отметить, что абсолютные значения любой интегральной оценки сами по себе не представляют интереса. Они служат лишь для сопоставления различных вариантов настройки одной и той же системы.

Все рассмотренные интегральные показатели используют не только для оценки качества, но и для определения оптимальных значений настроечных параметров системы. Оптимальными считают такие значения, которые соответствуют минимуму интегрального показателя

$$Q \rightarrow \min. \quad (14.27)$$

Список основных аббревиатур

$D(s) = D(s^n)$ – степенной полином знаменателя n -го порядка некоторого лапласиана.

$G(s) = G(s^m)$ – степенной полином числителя m -го порядка некоторого лапласиана, записанного в виде дробно-рациональной функции.

$L\{x(t)\}$ – лапласиан оригинала $x(t)$, изображение по Лапласу временного воздействия (сигнала) $x(t)$.

АПП – автоматизация производственных процессов.

АР – автоматический регулятор.

АСР – автоматическая система регулирования.

АЧХ – амплитудно-частотная характеристика.

БСС – блочная структурная схема (S -граф).

ВМФ – векторно-матричная форма.

ВЧПФ/МЧПФ – вещественная/мнимая ЧПФ.

ГСС – графовая структурная схема (M -граф), сигнальный граф системы, граф Мейсона.

ДС – динамическая система.

ЗА – звено автоматики (в составе СС – см. ниже).

ЗУ – задающее устройство (задатчик).

ИМ – исполнительный механизм.

ИУ – измерительное устройство.

ЛАЧХ – логарифмическая амплитудно-частотная характеристика.

ОИЛ – операционное исчисление Лапласа.

ОР (ОУ) – объект регулирования (управления).

ОС (О/П) – обратная связь (отрицательная/положительная).

ПК – персональный компьютер.

ПФ – передаточная функция.

ПХ/ИПХ – переходная/импульсная переходная характеристика (переходная функция/функция веса).

РО – регулирующий орган.

СА/АС – система автоматики/автоматическая система.

САР (САУ) – система автоматического регулирования (управления).

СВДС – скалярризованная векторная динамическая система.

СДС/ВДС – скалярная/векторная динамическая система.

СС – структурная схема.

УКВ – устройство компенсации возмущения.

УУ – устройство управления.

УФЗР – устройство формирования закона регулирования.

ФЧХ – фазо-частотная характеристика.

ХП – характеристический полином.

ЦВМ/ГВМ – цифровая/гибридная вычислительная машина.

ЧПФ – частотная ПФ.

ЭА – элемент автоматики (в составе функциональной схемы).

ЭС (СЭ) – элемент сравнения (суммирующий элемент, сумматор).

Список литературы

1. Анхимюк В.Л., Опейко О.Ф., Михеев Н.Н. Теория автоматического управления. – Мн.: Дизайн ПРО. – 2002. – 352 с.: ил.
2. Брюханов Н.В. и др. Теория автоматического управления: Учебник для вузов / Под ред. Ю.М. Соломенцева. – М.: Высшая школа, 1999. – 172 с.
3. Ерофеев А.А. Теория автоматического управления: Учеб. для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – СПб.: Политехника, 2003. – 302 с.: ил.
4. Лукас В.А. Теория автоматического управления: Учеб. для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Недра, 1990. – 416 с.: ил.
5. Теория автоматического управления: Учеб. для вузов / С.Е. Душин, Н.С. Зотов, Д.Х. Имаев и др.; Под ред. В.Б. Яковлева. – М.: Высшая школа, 2003. – 567 с.: ил.
6. Филлипс Ч., Харбор Р. Системы управления с обратной связью. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. – 616 с.: ил.