Дисциплина: «Основы научных исследований»

Лекция № 7 и задание на ЛР№5

Основные законы распределения случайных величин. Понятие о случайных величинах при исследовании надежности автомобилей

УЧЕБНЫЕ ВОПРОСЫ:

1. Общие положения.
2. Характеристики случайных величин.
3. Основные понятия экспоненциального закона распределения.
4. Принципы применения нормального закона распределения.
5. Основные понятия логарифмически нормального закона распределения и распределения Вейбулла.
6. Задание на лабораторную работу №5 (слайды 36 и 37)

Рекомендуемая литература:

Ф.В. Гречников, В.Р. Каргин. Основы научных исследований. Изд-во СГАУ. 2015 г. 111с.

Болдин А.П., Максимов В.А. Основы научных исследований [Текст]/Болдин А.П., Максимов В.А. Учебник: - М.: Академия. – 333 с.

1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

- **Случайное явление** — это такое явление, которое при неоднократном воспроизведении одного и того же опыта протекает каждый раз несколько по-иному. Например, измерение размера одной и той же детали одним и тем же инструментом дает каждый раз различные результаты.
- **Событие** — это всякий факт или явление, происходящее в результате опыта (испытания).
- **Случайным** называют событие, которое при рассматриваемом сочетании условий может произойти, а может и не произойти. Случайными событиями будут появления отказов и предельных состояний.

1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

- **Несовместимыми** называют два события, если появление одного из них исключает возможность появления другого. Например, отказ и работоспособность — это два события, которые не могут возникать одновременно.
- **Совместимыми** называют два события, если появление одного из них не исключает возможность появления другого. Например, наличие повреждения объекта не исключает появление отказа.
- **Равновозможными** называют несколько возможных событий, появление которых в результате испытаний одинаково возможно.

1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

- **Независимыми** считают такие события, появление которых не зависит от того, какое событие произошло перед этим (например, появление независимого отказа).

- **Вероятность события** — численная мера степени объективной возможности реализации случайного события.

События, которые происходят чаще, называются более вероятными;

менее вероятными называются события, которые происходят реже;

маловероятным — события, которые практически почти никогда не происходят.

В качестве единицы измерения вероятности принимают вероятность достоверного события, т. е. такого события, которое в результате опыта (испытания) обязательно должно произойти (например, неработоспособное состояние объекта при появлении отказа).

- **Невозможное событие** — это событие, которое в результате опыта (испытания) произойти не может (например, замерзание воды в системе охлаждения при температуре выше 0^0C).

Вероятность невозможного события равна нулю.

Случайная величина — это величина, которая в результате опыта может принимать различные значения, причем заранее неизвестно какие (например, наработка на отказ, трудоемкость ремонта, продолжительность простоя в ремонте, время безотказной работы, число отказов к некоторому моменту времени и т. д.).

Ввиду того, что значение случайной величины заранее неизвестно, для ее оценки используется вероятность (вероятность того, что случайная величина окажется в интервале ее возможных значений) или частость (относительное число случаев появления случайной величины в указанном интервале).

Вероятность события изменяется от 0 до 1 или в общем случае определяется по формуле 1:

$$P(a) = \frac{n}{N}$$

P(a) — вероятность появления события **a**;
N — общее число случаев;
n — число случаев, благоприятных событию (частота события **a**).

На практике пользуются не вероятностью события, а **относительной частотой**, так как вероятность события не всегда возможно вычислить, потому что общее число случаев может быть большим или бесконечно большим.

Относительной частотой события a в данной серии опытов называется - отношение числа опытов, в которых появилось событие **a**, к общему числу произведенных опытов.

- <u>**Для независимых событий**</u> вероятность произведения равна произведению их вероятностей (теорема умножения)

$$p\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} p(A_i). \quad (2)$$

Пример 1. В литейном цехе появление брака в отливках связано с различными элементами технологического процесса: из-за низкого качества литейной формы (песчаные раковины, обвалы, ужимины и др.); вследствие нарушения технологического процесса плавки и внепечной обработки металла (неметаллические включения, газовые раковины, пористость и др.); из-за нарушения режима заливки формы (шлаковые включения, корольки, спаи и др.) каждый из указанных элементов процесса независимо от другого может быть причиной окончательного брака в отливке.

Пусть вероятность получения качественной отливки без дефектов «по вине» формы p(ф)=0,98; по вине металла p(м)=0,93; по вине заливки p(з)=0,99. Необходимо оценить надежность технологического процесса в целом, т.е. определить вероятность получения бездефектной отливки p(фмз).

Решение. По формуле (2)

$$p(\text{фмз}) = p(\text{ф}) \cdot p(\text{м}) \cdot p(\text{з}) = 0{,}98 \cdot 0{,}93 \cdot 0{,}99 = 0{,}90.$$

Для *несовместных* событий (они не могут наступить одновременно) справедлива *теорема сложения* вероятностей:

$$p\left(A_1 + A_2 + \ldots + A_n\right) = p\left(A_1\right) + p\left(A_2\right) + \ldots + p\left(A_n\right). \qquad (3)$$

Из этой теоремы вытекают два следствия:

1. Для полной группы несовместных событий сумма их вероятностей равна единице:

$$\sum_{i=1}^{n} p\left(A_i\right) = 1. \qquad (4)$$

2. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$p\left(A\right) + p\left(\overline{A}\right) = 1. \qquad (5)$$

Пример **2.** В партии поковок доля брака составляет 3 % (p(A)=0,03). Здесь событие A состоит в выборе дефектной детали. Противоположное ему событие, состоящее в выборе годной детали, будет $\overline{A}$. По формуле (5) находим $p\left(\overline{A}\right)$ = 1 – $p(A)$ = 1– 0,03 = = 0,97, т.е. партия поковок содержит 97 % годных деталей.

2. Характеристики случайных величин

Среднее арифметическое значение — это частное от деления суммы полученных из опытов значений случайной величины на число слагаемых этой суммы, т. е. на число опытов.

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} \qquad (6)$$

X — среднее арифметическое случайной величины;

N — число проведенных опытов;

x_1, x_2, ..., x_N — отдельные значения случайной величины.

Математическое ожидание — сумма произведений всех возможных значений случайной величины на вероятности этих значений.

$$X = \sum_{i=1}^{N} x_i P_i \qquad (7)$$

Между средним арифметическим значением и математическим ожиданием случайной величины существует такая же связь, как между относительной частотой и вероятностью:

при большом числе опытов среднее арифметическое значение случайной величины приближается к ее математическому ожиданию

- **Мода случайной величины** — наиболее вероятное ее значение, т. е. значение, которому соответствует наибольшая частота. Графически моде соответствует наибольшая ордината.
- **Медиана случайной величины** — такое ее значение, для которого одинаково вероятно, окажется ли случайная величина больше или меньше медианы. Геометрически медиана определяет абсциссу точки, ордината которой делит площадь, ограниченную кривой распределения пополам.

Для симметричных модальных распределений среднее арифметическое, мода и медиана совпадают.

Пример 3. Найти математическое ожидание и моду случайной величины, заданной таблицей значений:

x	3	5	2
p	0,1	0,6	0,3

Решение. $M_x = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = 3 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}6 + 2 \cdot 0{,}3 = 3{,}9.$ $\mathrm{Mo} = 5.$

- **Размах рассеивания случайной величины** — это разность между максимальным и минимальным ее значениями, полученными в результате испытаний.

$$R = x_{max} - x_{min} \qquad (8)$$

При малом числе наблюдений (**N < 10**) размах служит мерой рассеивания.

Дисперсия (второй центральный момент) является одной из основных характеристик рассеивания случайной величины около ее среднего арифметического значения.

$$Д = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 \qquad (9)$$

Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины, поэтому пользоваться ею не всегда удобно.

- **Среднее квадратичное отклонение** также является мерой рассеивания и равно корню квадратному из дисперсии.

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{X}\right)^2} \qquad (10)$$

Поскольку среднее квадратичное отклонение имеет размерность случайной величины, пользоваться им удобнее, чем дисперсией.

Среднее квадратичное отклонение называют также стандартом, основной ошибкой или основным отклонением.

- Среднее квадратичное отклонение, выраженное в долях среднего арифметического, носит название **коэффициента вариации**.

$$\boxed{V_a = \frac{\sigma}{\bar{x}}} \quad \text{или} \quad \boxed{V_a = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\%} \qquad (11)$$

Введение коэффициента вариации необходимо для сравнения рассеивания величин, имеющих разную размерность.

Для этой цели среднее квадратичное отклонение непригодно, так как имеет размерность случайной величины.

3. Основные понятия экспоненциального закона распределения

Законом распределения случайной величины называется соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

В теории и практике надежности чаще всего используются следующие законы распределения:

- ***нормальный (Гаусса),***
- ***логарифмически нормальный,***
- ***Вейбулла,***
- ***экспоненциальный (показательный) и др.***

Дифференциальная функция экспоненциального закона:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad (12)$$

λ — параметр распределения (постоянный коэффициент).

У **экспоненциального распределения** математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение одинаковы. Поэтому коэффициент вариации равен единице.

Этот закон характерен для распределения случайных величин, изменение которых обусловлено влиянием какого-то доминирующего фактора.
Он используется при рассмотрении внезапных отказов деталей в тех случаях, когда явления изнашивания и усталости выражены настолько слабо, что ими можно пренебречь (например, наработка до отказа многих невосстанавливаемых изделий).

Экспоненциальный закон распределения.

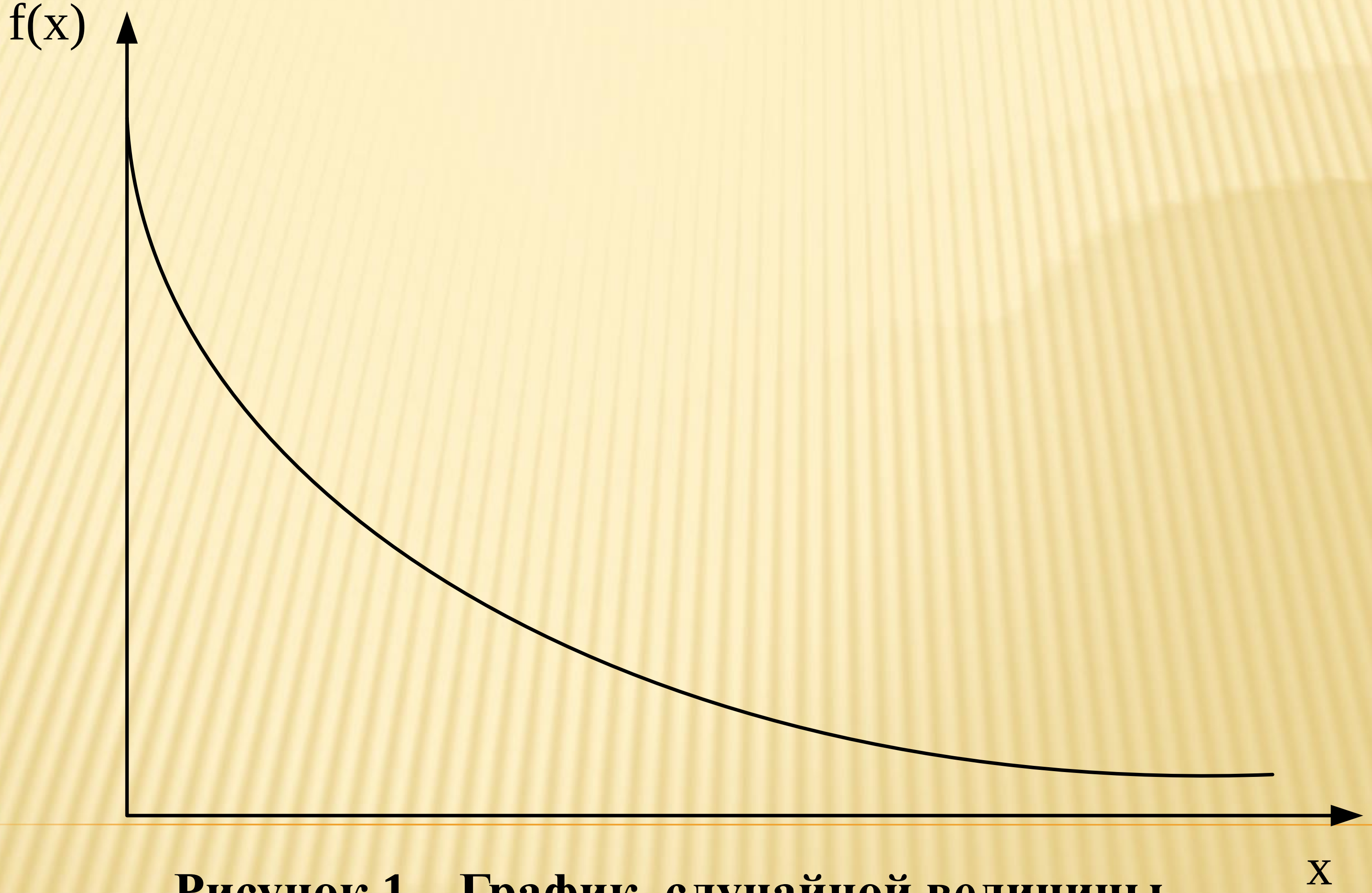


Рисунок 1 – График случайной величины распределенной по экспоненциальному закону

- Графическая интерпретация экспоненциального распределения представлена на рисунке 1.
- При исследовании надежности автомобиля характеризует интенсивность отказа невосстанавливаемых деталей. Этим распределениями описываются распределение безотказной работы деталей автомобиля, распределение времени ремонта автомобиля при восстановлении этих отказов и многое другое. При оценке показателей надежности коэффициент вариации для принятия этого закона должен находиться в диапазоне от 0,8 до 1,2

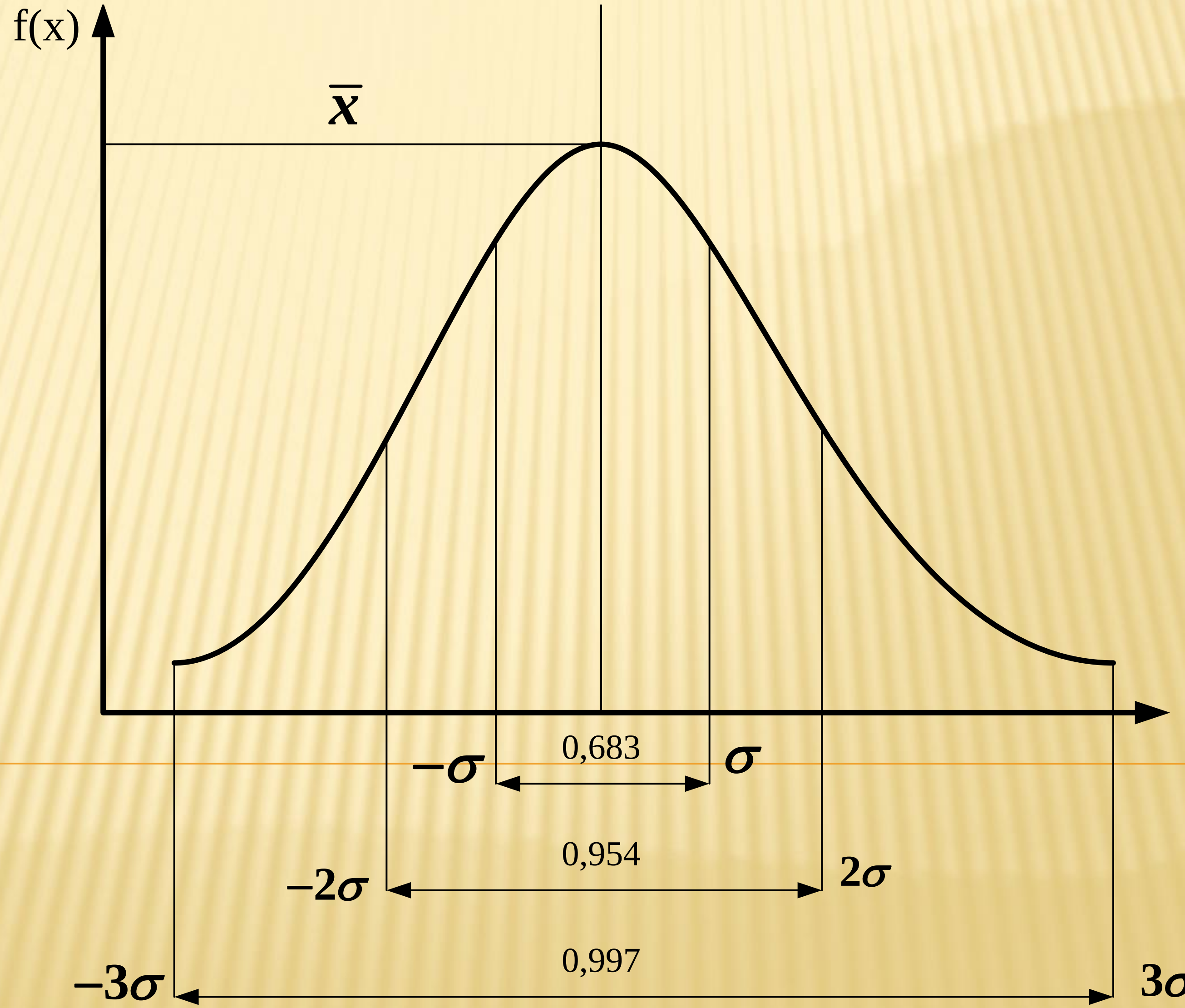
2. Принципы применения нормального закона распределения

Нормальный закон распределения встречается достаточно часто.

Плотность распределения его находят по выражению:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} \qquad (13)$$

Нормальный закон распределения.



- Величина **X** (среднее арифметическое) показывает смещение кривой **f(x)** вдоль оси абсцисс без изменения ее формы, т. е. расстояние от начала координат до абсциссы с максимальной ординатой.
- Величина **σ** (среднее квадратичное отклонение) показывает разброс отдельных значений случайной величины **x** относительно среднего арифметического.

На участке кривой, ограниченной ординатами (±σ от **X**), расположено 68,3% значений случайной величины;

на участке, ограниченном ординатами (±2σ от **X**) - 95,4%;

на участке с ординатами (±3σ от **X**) - 99,7%.

На этом основано правило трех сигм: вероятность того, что случайная величина **x** лежит в пределах, близка к единице или к 100%.

Следовательно, значения случайной величины, лежащие за пределами , можно отбросить как промахи.

Если в качестве аргумента в формуле принять безразмерную переменную:

$$z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma} \tag{14}$$

получим стандартный закон нормального распределения:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \tag{15}$$

Нормальный закон наблюдается в тех многочисленных случаях, когда на измеряемую случайную величину действуют разнообразные факторы, не связанные между собой и равнозначно действующие на случайную величину (например, размеры и износы деталей, наработки на отказ и до предельного состояния, причинами которых являются износы и т. д.).

- Нормальное распределение применяется для описания отказов, вызванных изнашиванием или постепенным накоплением неисправностей, когда доля внезапных отказов мала, и многих других процессов технической эксплуатации автомобилей (периодичность ТО, расход однородных эксплуатационных материалов, рассеяние значений диагностического параметра для исправного состояния и т.д.). Поскольку данный закон может обрабатывать и отрицательные значения, его широко применяют во многих областях практической и научной деятельности.
- При оценке показателей надежности его рекомендуется использовать при коэффициентах вариации, находящихся в диапазоне 0,10 ...0,35

Интеграл вида

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-t^2/2}\, dt \qquad (16)$$

носит название *нормальной функции Лапласа*. Значения этого интеграла сведены в таблицу. Таким образом, указанная вероятность (16) водится к разности нормальных функций Лапласа:

$$p\{x_1 < x < x_2\} = \Phi(t_2) - \Phi(t_1). \qquad (17)$$

Расчет количества годных деталей сводится к установлению величины t и определению $\Phi(t)$ по таблице с последующим пересчетом полученных величин в проценты или в число штук изделий.

В общем случае, когда $\bar{x} \neq 0$, имеем следующую вероятность появления случайных погрешностей:

$$p\{x_1 \le x \le x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx = \Phi\left(\frac{x_2 - M_x}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - M_x}{\sigma}\right). \qquad (18)$$

Пример **4.** На металлургическом заводе проведено контрольное определение твердости по Шору рабочего слоя большой партии однотипных листопрокатных валков. Установлено, что твердость (случайная величина x) распределена нормально с математическим ожиданием 60 ед. по Шору и средним квадратичным отклонением 5 ед. по Шору. Необходимо найти вероятность того, что значение твердости валков заключено в пределах 57–65 ед. Шора, оговоренных ГОСТом.

Решение. Используем формулу **(18)** . По условию задачи $x_1=57$; $x_2=65$; $M_x = 60$; $\sigma = 5$, следовательно,

$$p\{57 \le x \le 65\} = \Phi\left(\frac{65-60}{5}\right) - \Phi\left(\frac{57-60}{5}\right) = \Phi(1,0) - \Phi(-0,6) = \Phi(1,0) + \Phi(0,6).$$

По таблице функции Лапласа находим: $\Phi(1,0)$ $=0,3413$; $\Phi(0,6)=0,2257$. Отсюда искомая вероятность

$$p\{57 \le x \le 65\} = 0,3413 + 0,2257 = 0,567.$$

Нормированная функция Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2/2}\,dt$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,00000	0,00399	0,00798	0,01197	0,01595	0,01994	0,02392	0,02790	0,03188	0,03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	58077	48124	48169

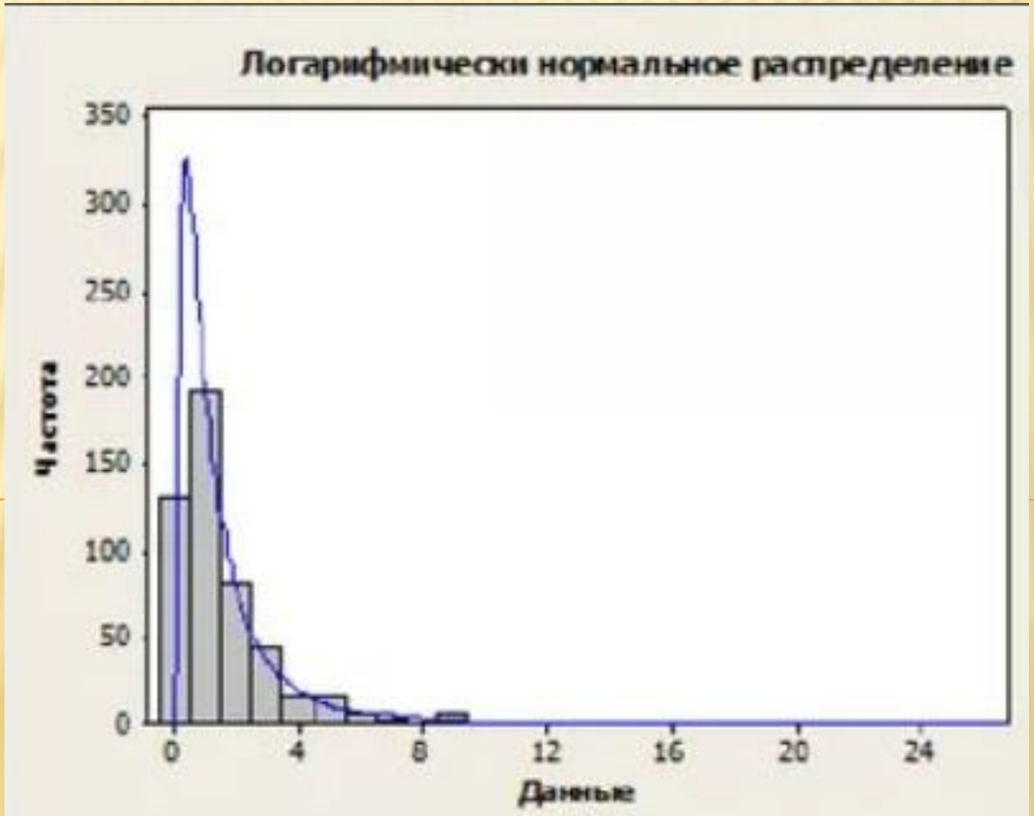
Окончание табл.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
3,0	49865	49865	49865	49865	49865	49865	49865	49865	49865	49865
3,1	49903	49903								
3,2	49931	49931								
3,3	49952									
3,4	49966									
3,5	49977									
3,6	49984									
3,7	49980									
3,8	49993									
3,9	49995									
4,0	499968									
4,5	499997									
5,0	499999									

5. Основные понятия логарифмически нормального закона распределения и распределения Вейбулла

Логарифмически нормальным называется распределение случайной величины **у**, если десятичный логарифм этой величины распределяется по нормальному закону.

x = log y



Закон распределения Вейбулла описывается дифференциальной функцией:

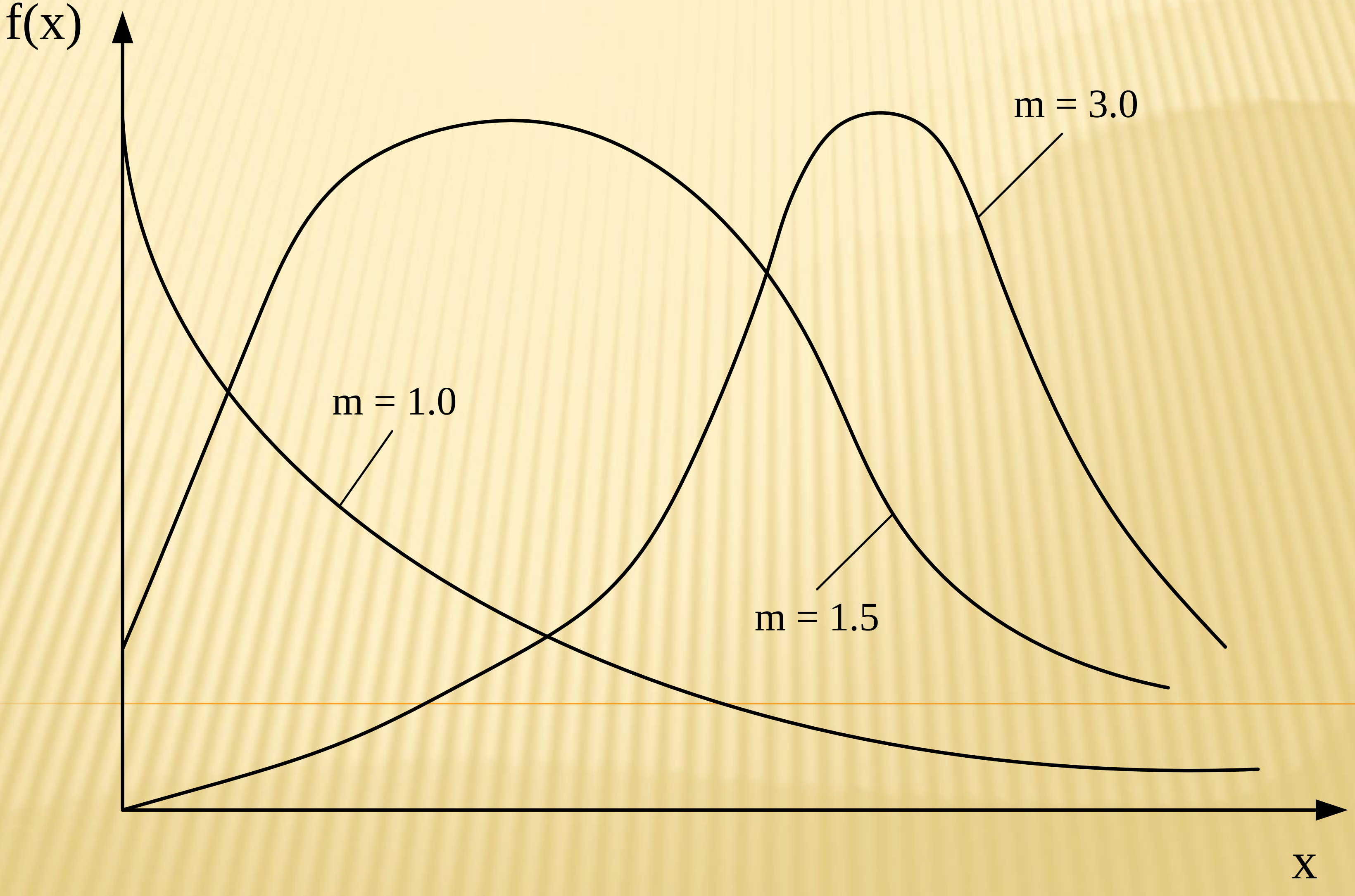
$$f(x) = \frac{m}{a} x^{m-1} e^{\left(-\frac{x}{a}\right)^{m}}$$

m, a — параметры распределения.

Значение параметра **m** зависит от коэффициента вариации и определяется по таблицам, расчетом или графоаналитическим путем.

Величина его влияет на форму дифференциальной кривой.

Закон распределения Вейбулла



При **m**=1 распределение Вейбулла преобразуется в экспоненциальное.

При **m** = 2,5...3,5 и **V** = 0,3...0,4 — приближается к нормальному.

Распределение Вейбулла широко применяется при расчете показателей надежности, в частности, при исследовании прочности и долговечности деталей.

Этому закону хорошо подчиняются распределение предела упругости ряда металлов, характеристики прочности и усталостной долговечности деталей (подшипники качения, напряженные оси и валы и др.).

- Это наиболее распространенный закон распределения при обработке экспериментальных данных по надежности автомобилей в эксплуатации; теоретически начинается с нуля и обеспечивает соответствие экспериментальным данным в диапазоне коэффициентов вариации 0,4...0,8.

Лабораторная работа №5.

Решить задачи 1 и 2, руководствуясь примерами 3 и 4 лекции.

Номер задания является номером по журналу.

Задача 1. Найти математическое ожидание и моду случайной величины, заданной таблицей значений x и вероятностей p:

Номер задания	$p=$	0,2	0,1	0,05	0,05	0,3	0,15	0,15
0	$x=$	5	6	9	8	7	1	3
1		7	1	3	2	9	8	4
2		2	9	8	7	4	5	6
3		4	7	1	3	6	9	8
4		1	3	2	9	8	7	6
5		7	1	3	2	9	8	6
6		6	9	8	7	1	3	2
7		5	6	8	7	1	3	4
8		2	9	8	6	9	8	3
9		5	7	1	3	2	9	8

Лабораторная работа №5.

Решить задачи 1 и 2, руководствуясь примерами 3 и 4 лекции. *Номер задания является номером по журналу.*

Задача 2 На металлургическом заводе проведено контрольное определение твердости по Шору рабочего слоя большой партии однотипных листопрокатных валков. Установлено, что твердость (случайная величина x) распределена нормально с математическим ожиданием M_x (ед. по Шору) и средним квадратическим отклонением σ (ед. по Шору). Необходимо найти вероятность того, что значение твердости валков заключено в пределах от x_1 до x_2 ед. Шора, оговоренных ГОСТ. Исходные данные приведены в таблице:

Номер задания	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_1	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
x_2	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
M_x	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64
σ	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0	4,2	4,4	4,6	4,8