САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет прикладной математики — процессов управления

А. Ю. АЛЕКСАНДРОВ, Е. Б. АЛЕКСАНДРОВА,
А. В. ЕКИМОВ, Н. В. СМИРНОВ

СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ ПО ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2003

УДК 517.925
С23

Печатается по постановлению Редакционно-издательского совета факультета прикладной математики–процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. Е. И. Веремей (Санкт-Петербургский гос. ун-т); д-р физ.-мат. наук, проф. В. Д. Ногин (Санкт-Петербургский гос. техн. ун-т)

С23 **Сборник** задач и упражнений по теории устойчивости: Учеб. пособие / Александров А. Ю., Александрова Е. Б., Екимов А. В., Смирнов Н. В. — СПб.: НИИ Химии СПбГУ, 2003.— !!! с.
ISBN 5-7997-0418-5

Настоящее пособие содержит задачи и упражнения по курсу теории устойчивости в соответствии с учебным планом факультета прикладной математики-процессов управления СПбГУ. Помимо классических тем в него впервые включены теоретические материалы и задачи по современным разделам теории устойчивости, таким как устойчивость систем с неопределенными параметрами, устойчивость интервальных полиномов, устойчивость по первому, в широком смысле, приближению. В начале каждого параграфа излагаются необходимые теоретические сведения, методы и алгоритмы, которые иллюстрируются подробно разобранными примерами. Сборник содержит упражнения для самостоятельной работы с указанием ответов и задачи повышенной трудности. Таким образом, представленный материал позволяет вырабатывать не только практические навыки, но и формировать творческий подход к решению проблемы анализа устойчивости систем дифференциальных уравнений. Большинство задач и упражнений составлено авторами.

Книга предназначена для студентов университетов, обучающихся по специальности ”прикладная математика и информатика”. Она также может быть полезна научным работникам, специализирующимся в области теории устойчивсти, качественной теории дифференциальных уравнений и теории управления.

© Александров А. Ю.,
Александрова Е. Б.,
Екимов А. В.,
Смирнов Н. В., 2003

© НИИ Химии СПбГУ, 2003

ISBN 5-7997-0418-5

ГЛАВА 1. ПЕРВЫЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА

Теория устойчивости движения была создана в конце XIX века великим русским ученым А. М. Ляпуновым. Совокупность всех методов решения задачи устойчивости Ляпунов разбил на две категории. К первой категории он отнес те методы, которые приводят к непостредственному построению возмущенных решений соответствующей системы дифференциальных уравнений, т.е. к нахождению общего или частного решения. Такой подход к анализу устойчивости принято называть первым методом Ляпунова.

§ 1. Основные понятия и определения

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}). \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{x}$ — n-мерный вектор неизвестных функций, вектор-функция $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ задана и непрерывна в области $D = J \times G$, где $J = \{t : 0 \leq t < +\infty\}$, G — некоторая область n-мерного евклидова пространства $\mathbb{E}^n$. Считаем, что область D является областью существования и единственности решения задачи Коши. Независимую переменную t обычно называют временем, а решения $\mathbf{x}(t)$ уравнений (1.1) — движениями системы.

Пусть $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)$ — решение системы (1.1), проходящее при $t = t_0 \geq 0$ через точку $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_0 \in G$.

Рассмотрим некоторое частное решение $\varphi(t)$ системы (1.1), определенное при всех $t \in [0, +\infty)$. Будем называть его *программным* или *невозмущенным*.

Опрелеление 1.1. Решение $\varphi(t)$ *обладает свойством интегральной непрерывности*, если для любых $t_0 \geq 0$, $\varepsilon > 0$ и $T > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при всех $\mathbf{x}_0$, удовлетворяющих условию $\|\mathbf{x}_0 - \varphi(t_0)\| < \delta$, на промежутке $[t_0, t_0 + T]$ выполняется неравенство $\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0) - \varphi(t)\| < \varepsilon$.

В настоящем пособии под нормой будем понимать евклидову норму вектора, т.е. если $\mathbf{x}$ — n-мерный вектор с компонентами $x_1, \ldots, x_n$, то $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$.

Теорема 1.1 (теорема об интегральной непрерывности). *Пусть вектор-функция* $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ *в любой ограниченной части области* D *удовлетворяют условию Липшица по переменной* $\mathbf{x}$. *Тогда решения системы* (1.1), *содержащиеся при всех* $t \geq 0$ *в области* G, *обладают свойством интегральной непрерывности.*

Задача об устойчивости (устойчивости по Ляпунову) программного решения $\varphi(t)$ формулируется следующим образом. Рассматриваются решения уравнений (1.1), начинающиеся в некоторой окрестности программного движения. Эти решения называются *возмущенными*. Требуется исследовать поведение отклонений возмущенных решений от программного при возрастании аргумента t.

Приведем строгое определение устойчивости.

Опрелеление 1.2. Решение $\varphi(t)$ называется *устойчивым по Ляпунову* (или просто *устойчивым*), если для любых $t_0 \geq$ ≥ 0 и $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta(t_0, \varepsilon) > 0$, что при всех $\mathbf{x}_0$, удовлетворяющих условию $\|\mathbf{x}_0 - \varphi(t_0)\| < \delta(t_0, \varepsilon)$, и любых $t \geq t_0$ выполняется неравенство $\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0) - \varphi(t)\| < \varepsilon$.

Опрелеление 1.3. Решение $\varphi(t)$ называется *равномерно устойчивым по Ляпунову*, если в определении 1.2 число $\delta(t_0, \varepsilon)$ можно выбрать не зависящим от t_0.

Геометрически свойство устойчивости решения $\varphi(t)$ означает, что достаточно близкие к нему в любой начальный момент времени t_0 решения $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)$ при всех $t \geq t_0$ целиком содержатся в ε-трубке решения $\varphi(t)$ (см. рис. 1).

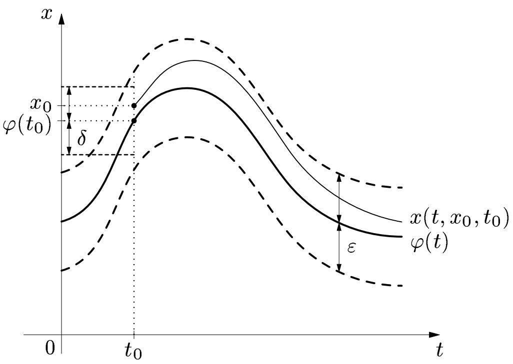

Рис. 1

Замечание 1.1. Устойчивость решений системы (1.1) эквивалентна их интегральной непрерывности на бесконечном промежутке времени ($T = +\infty$).

Опрелеление 1.4. Решение $\varphi(t)$ называется *неустойчивым по Ляпунову*, если существуют числа $\bar{t}_0 \geq 0$ и $\bar{\varepsilon} > 0$ такие, что для любого $\delta > 0$ найдется точка $\bar{\mathbf{x}}_0$, удовлетворяющая условию $\|\bar{\mathbf{x}}_0 - \varphi(\bar{t}_0)\| < \delta$, и момент времени $\bar{t} \geq \bar{t}_0$, для которых выполняется неравенство $\|\mathbf{x}(\bar{t}, \bar{\mathbf{x}}_0, \bar{t}_0) - \varphi(\bar{t})\| \geq \bar{\varepsilon}$.

Опрелеление 1.5. Решение $\varphi(t)$ называется *асимптотически устойчивым по Ляпунову* (или просто *асимптотически устойчивым*), если оно обладает следующими свойствами:

а) $\varphi(t)$ устойчиво по Ляпунову;

б) для любого $t_0 \geq 0$ существует число $\Delta(t_0) > 0$ такое, что при всех $\mathbf{x}_0$, удовлетворяющих условию $\|\mathbf{x}_0 - \varphi(t_0)\| < \Delta(t_0)$, справедливо предельное соотношение

$$\lim_{t \to +\infty} \|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0) - \varphi(t)\| = 0. \tag{1.2}$$

Опрелеление 1.6. Решение $\varphi(t)$ называется *асимптотически устойчивым равномерно по* t_0 *и* $\mathbf{x}_0$, если оно равномерно устойчиво и существует не зависящее от t_0 число $\Delta > 0$ такое, что $\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0) - \varphi(t)\| \to 0$ при $t - t_0 \to +\infty$ равномерно относительно t_0 и $\mathbf{x}_0$ на множестве $t_0 \geq 0$, $\|\mathbf{x}_0 - \varphi(t_0)\| < \Delta$.

Опрелеление 1.7. Для заданного начального момента времени t_0 *областью притяжения* решения $\varphi(t)$ называется множество точек $\mathbf{x}_0$, для которых выполняется предельное соотношение (1.2).

Область притяжения будем обозначать через $A(t_0)$.

Опрелеление 1.8. Пусть решение $\varphi(t)$ асимптотически устойчиво. Тогда множество $A = \{(t_0, \mathbf{x}_0) : t_0 \geq 0, \mathbf{x}_0 \in A(t_0)\}$ называется *областью асимптотической устойчивости* этого решения.

Опрелеление 1.9. Если правые части системы (1.1) заданы при всех $t \geq 0$ и $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^n$, решение $\varphi(t)$ асимптотически устойчиво и для любого $t_0 \geq 0$ имеем $A(t_0) = \mathbb{E}^n$, то решение $\varphi(t)$ называется *асимптотически устойчивым в целом.*

Непосредственное исследование устойчивости невозмущенного решения $\varphi(t)$ системы (1.1) обычно сводят к исследованию устойчивости нулевого решения некоторой вспомогательной системы.

Сделаем в уравнениях (1.1) замену переменных

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} - \varphi(t). \tag{1.3}$$

Получим систему

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y} + \varphi(t)) - \mathbf{f}(t, \varphi(t)) = \mathbf{q}(t, \mathbf{y}). \tag{1.4}$$

При этом $\mathbf{q}(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ для всех $t \geq 0$, т.е. система (1.4) имеет нулевое решение $\mathbf{y}(t) \equiv \mathbf{0}$.

Опрелеление 1.10. Система (1.4) называется *системой в отклонениях.*

Решение $\varphi(t)$ системы (1.1) при преобразовании (1.3) переходит в нулевое решение системы в отклонениях. Очевидно, что решение $\varphi(t)$ устойчиво по Ляпунову (асимптотически устойчиво) тогда и только тогда, когда тем же самым свойством обладает нулевое решение системы (1.4).

Если в качестве невозмущенного рассматривается нулевое решение, то определение устойчивости принимает следующий вид.

Опрелеление 1.11. Нулевое решение системы (1.4) называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любых $t_0 \geq 0$ и $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta(t_0, \varepsilon) > 0$, что при всех $\mathbf{y}_0$, удовлетворяющих условию $\|\mathbf{y}_0\| < \delta(t_0, \varepsilon)$, и любых $t \geq t_0$ выполняется неравенство $\|\mathbf{y}(t, \mathbf{x}_0, t_0)\| < \varepsilon$.

Аналогичным образом для нулевого решения системы (1.4) можно записать определения 1.3 – 1.9.

Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение n-го порядка в нормальной форме

$$z^{(n)} = g\left(t, z, z', \ldots, z^{(n-1)}\right). \tag{1.5}$$

В данном уравнении $z = z(t)$ — скалярная неизвестная функция, функция $g\left(t, z, z', \ldots, z^{(n-1)}\right)$ задана и непрерывна при $t \geq 0$, $\left(z, z', \ldots, z^{(n-1)}\right)^* \in G$, где G — некоторая открытая область в $\mathbb{E}^n$, а $*$ здесь и всюду далее означает транспонирование.

Пусть $\psi(t)$ — частное решение уравнения (1.5), определенное при всех $t \in [0, +\infty)$.

Опрелеление 1.12. Решение $\psi(t)$ называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любых $t_0 \geq 0$ и $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta(t_0, \varepsilon) > 0$, что при выполнении неравенства

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(z_0^{(i)} - \psi^{(i)}(t_0) \right)^2 < \delta^2(t_0, \varepsilon)$$

для всех $t \geq t_0$ справедлива оценка

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(z^{(i)}(t) - \psi^{(i)}(t) \right)^2 < \varepsilon^2.$$

Здесь $z(t)$ — решение уравнения (1.5), удовлетворяющее условиям

$$z(t_0) = z_0^{(0)}, \quad z'(t_0) = z_0^{(1)}, \quad \ldots, \quad z^{(n-1)}(t_0) = z_0^{(n-1)}.$$

Аналогичным образом на уравнение (1.5) переносятся другие определения теории устойчивости, введенные ранее для системы (1.1).

Обычно с помощью замены переменных $z = x_1, z' = x_2, \ldots$ $\ldots, z^{(n-1)} = x_n$ от уравнения (1.5) переходят к системе

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \ldots\ldots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n, \\ \dot{x}_n = g(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{cases} \tag{1.6}$$

Задача об устойчивости решения $\psi(t)$ уравнения (1.5) сводится таким образом к эквивалентной ей задаче об устойчивости решения $\varphi(t) = \left(\psi(t), \psi'(t), \ldots, \psi^{(n-1)}(t)\right)^*$ системы (1.6).

Замечание 1.2. Основная идея доказательства устойчивости программного движения $\varphi(t)$ системы (1.1) заключается в следующем. Строится оценка отклонений возмущенных решений от невозмущенного в виде функции, зависящей от нормы разности начальных данных этих решений. Таким образом, получаем неравенство

$$\|\mathbf{x}(t,\mathbf{x}_0,t_0)-\varphi(t)\| \leq h\left(\|\mathbf{x}_0-\varphi(t_0)\|\right),$$

где функция $h(y)$ задана при $y \geq 0$. Далее по выбранному числу $\varepsilon > 0$ определяем $\delta > 0$ такое, что при $0 \leq y < \delta$ справедлива оценка $h(y) < \varepsilon$. В случае, когда функция $h(y)$ является строго возрастающей, число δ можно найти как решение уравнения $h(\delta) = \varepsilon$.

Пример 1.1. Исследуем на устойчивость по Ляпунову решение уравнения

$$\dot{x} = 1 + t - x,$$

проходящее при $t = 0$ через точку $x = 0$.

Общее решение уравнения имеет вид

$$x(t,x_0,t_0) = e^{-(t-t_0)}\left(x_0 + te^{t-t_0} - t_0\right).$$

Указанному начальному условию удовлетворяет решение $\varphi(t) = t$. Получаем

$$|x(t,x_0,t_0)-\varphi(t)| = |x_0 - t_0|e^{-(t-t_0)}.$$

Для заданных значений $t_0 \geq 0$ и $\varepsilon > 0$ в качестве числа δ выбираем $\delta = \varepsilon$. Если $|x_0 - t_0| < \delta$, то при всех $t \geq t_0$ справедливо неравенство $|x(t,x_0,t_0)-\varphi(t)| < \varepsilon$. Поскольку δ не зависит от t_0, то имеет место равномерная устойчивость. А так как $|x(t,x_0,t_0)-\varphi(t)| \to 0$ при $t \to +\infty$, то решение $\varphi(t)$ асимптотически устойчиво.

Пример 1.2. Исследуем на устойчивость нулевое решение уравнения

$$\dot{x} = \frac{\dot{r}(t)}{r(t)}x, \qquad r(t) = \frac{\sin^2 t}{t+1} + \cos^2 t.$$

Общее решение в форме Коши имеет вид $x(t,x_0,t_0) = x_0 r(t)/r(t_0)$. Получаем

$$|x(t,x_0,t_0)| \leq \frac{2|x_0|}{r(t_0)}.$$

В качестве δ выбираем $\delta = \varepsilon r(t_0)/2$. Тогда если $|x_0| < \delta$, то $|x(t, x_0, t_0)| < \varepsilon$ при всех $t \geq t_0$. Нетрудно показать, что число δ нельзя выбрать не зависящим от t_0. Следовательно, имеет место неравномерная устойчивость по Ляпунову.

Решение $x(t) \equiv 0$ не является асимптотически устойчивым, так как функция $r(t)$ не стремится к нулю при $t \to +\infty$.

Пример 1.3. Исследуем на устойчивость решение $\varphi(t) = 1$ уравнения

$$\dot{x} = 1 - x^2.$$

Уравнение в отклонениях от указанного решения имеет вид

$$\dot{y} = -y(y+2).$$

Интегрируя его как уравнение с разделяющимися переменными, получим

$$y(t, y_0, t_0) = \frac{2y_0 e^{-2(t-t_0)}}{2 + y_0\left(1 - e^{-2(t-t_0)}\right)}.$$

Пусть $\delta \leq 1$. Тогда при $|y_0| < \delta$ справедлива оценка

$$|y(t, y_0, t_0)| \leq 2|y_0| e^{-2(t-t_0)}.$$

Если по заданному $\varepsilon > 0$ в качестве δ выбираем $\delta = \min\{1, \varepsilon/2\}$, то при выполнении условия $|y_0| < \delta$ для любых $t_0 \geq 0$ и $t \geq t_0$ имеет место неравенство $|y(t, y_0, t_0)| < \varepsilon$. Следовательно, нулевое решение уравнения в отклонениях равномерно устойчиво. Оно также является асимптотически устойчивым, поскольку при $t_0 \geq 0$, $|y_0| < \Delta \leq 2$ решение $y(t, y_0, t_0)$ стремится к нулю при $t \to +\infty$.

Докажем, что решения, начинающиеся при $t = t_0 \geq 0$ в области $|y_0| < 1$, равномерно по t_0 и y_0 стремятся к нулю при $t - t_0 \to +\infty$. Для этого нужно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $T \geq 0$, что при всех $t_0 \geq 0$, $|y_0| < 1$ и $t \geq t_0 + T$ выполняется неравенство $|y(t, y_0, t_0)| < \varepsilon$.

Задаем $\varepsilon > 0$. Пусть $T = \max\left\{0; -\ln\sqrt{\varepsilon/2}\right\}$. Тогда при $t_0 \geq 0$, $|y_0| < 1$, $t - t_0 \geq T$ получаем

$$|y(t, y_0, t_0)| \leq 2|y_0| e^{-2T} < \varepsilon.$$

Таким образом, нулевое решение уравнения в отклонениях, а значит и решение $\varphi(t) = 1$ исходного уравнения, асимптотически устойчивы равномерно по t_0 и координатам начальных возмущений.

Нетрудно показать, что для любого $t_0 \geq 0$ областью притяжения рассматриваемого решения является множество $A(t_0) = \{x_0 : x_0 > -1\}$.

Пример 1.4. Исследуем на устойчивость нулевое решение уравнения

$$\dot{x} = x^2.$$

Общее решение в форме Коши имеет вид

$$x(t, x_0, t_0) = \frac{x_0}{1 - x_0(t - t_0)}.$$

Нетрудно видеть, что для любых $t_0 \geq 0$ и $x_0 > 0$ решение $x(t, x_0, t_0)$ неограниченно возрастает при $t \to t_0 + 1/x_0$. Таким образом, оно покидает любую наперед заданную ε-трубку $|x| < \varepsilon$ при $\bar{t} = t_0 + 1/x_0 - 1/\varepsilon$. Следовательно, нулевое решение неустойчиво по Ляпунову. Неустойчивость в данном случае вызвана непродолжимостью решений на промежуток $[0, +\infty)$.

Пример 1.5. Исследуем на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1. \end{cases}$$

Интегрируя систему, получаем

$$\begin{cases} x_1(t) = x_{10} \cos t - x_{20} \sin t, \\ x_2(t) = x_{10} \sin t + x_{20} \cos t. \end{cases}$$

Следовательно, имеем

$$\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)\| = \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)} = \sqrt{x_{10}^2 + x_{20}^2} = \|\mathbf{x}_0\|.$$

Таким образом, по заданному $\varepsilon > 0$ в качестве δ можно взять $\delta = \varepsilon$. Поскольку число δ не зависит от t_0, то имеет место равномерная устойчивость. Асимптотически устойчивым нулевое решение не является, так как при изменении времени расстояние от любого решения $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)$ до начала координат, т.е. $\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)\|$, остается постоянным.

Замечание 1.3. Следует отметить, что решение $\varphi(t)$ системы (1.1), удовлетворяющее только условию б) из определения асимптотической устойчивости, может не являться устойчивым по Ляпунову. Иными словами, притяжение (стремление при $t \to +\infty$ возмущенных решений к программному) не гарантирует устойчивости. Могут существовать числа $t_0 \geq 0$, $\varepsilon > 0$ и последовательность $\left\{\mathbf{x}_0^{(k)}\right\}$ такие, что $\left\|\mathbf{x}_0^{(k)} - \varphi(t_0)\right\| \to 0$ при $k \to \infty$ и для любого $k = 1, 2, \ldots$ справедливо предельное соотношение

$$\lim_{t \to +\infty} \left\| \mathbf{x}\left(t, \mathbf{x}_0^{(k)}, t_0\right) - \varphi(t) \right\| = 0,$$

но при этом

$$\sup_{t \geq t_0} \left\| \mathbf{x}\left(t, \mathbf{x}_0^{(k)}, t_0\right) - \varphi(t) \right\| \geq \varepsilon.$$

Пример 1.6. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{x_1}{t+1}, \\ \dot{x}_2 = \dfrac{x_2 x_1^2 (t+1)^2 \left(2t + 1 - x_1^6 t^2 (t+1)^6\right)}{(1 + x_1^6 t^2 (t+1)^6)(1 + x_1^2 t (t+1)^3 + x_1^6 t^2 (t+1)^6)} - \\ \qquad - \dfrac{x_2}{t+1}. \end{cases} \tag{1.7}$$

Данные уравнения можно записать в следующей форме

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{x_1}{t+1}, \\ \dot{x}_2 = x_2 \left(\dot{p}(t) - \dfrac{1}{t+1} \right), \end{cases}$$

где

$$p(t) = \ln \left(1 + \frac{x_1^2(t) t (t+1)^3}{1 + x_1^6(t) t^2 (t+1)^6} \right).$$

Общее решение системы (1.7) имеет вид

$$\begin{cases} x_1\left(t, x_{10}, x_{20}, t_0\right) = \dfrac{x_{10}(t_0+1)}{t+1}, \\ x_2\left(t, x_{10}, x_{20}, t_0\right) = \dfrac{x_{20}(t_0+1)\left(1+\frac{x_{10}^2(t_0+1)^2 t(t+1)}{x_{10}^6(t_0+1)^6 t^2+1}\right)}{(t+1)\left(1+\frac{x_{10}^2 t_0(t_0+1)^3}{x_{10}^6 t_0^2(t_0+1)^6+1}\right)}. \end{cases}$$

Таким образом, все решения рассматриваемых уравнений при $t \to +\infty$ стремятся к началу координат. Покажем, что, несмотря на это, нулевое решение системы (1.7) является неустойчивым.

Пусть $\bar{t}_0 = 0$, $\bar{\varepsilon} = 1/2$. Задаем произвольным образом положительное число δ. Рассмотрим решение $(\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t))^*$, выходящее при $t = 0$ из точки $(\bar{x}_{10}, \bar{x}_{20})^* = (\delta/2, \delta/2)^*$. Имеем

$$\begin{cases} \bar{x}_1(t) = \dfrac{\delta}{2(t+1)}, \\ \bar{x}_2(t) = \dfrac{\delta}{2(t+1)} + \dfrac{t(\delta/2)^3}{1+t^2(\delta/2)^6}. \end{cases}$$

При $\bar{t} = (2/\delta)^3$ получаем

$$\bar{x}_1^2(\bar{t}) + \bar{x}_2^2(\bar{t}) \geq \frac{\bar{t}^{\,2}(\delta/2)^6}{\left(1+\bar{t}^{\,2}(\delta/2)^6\right)^2} = \frac{1}{4}.$$

Следовательно, для выбранного значения $\bar{\varepsilon} = 1/2$ и для любого сколь угодно малого числа $\delta > 0$ найдется решение, выходящее при $t = 0$ из δ-окрестности начала координат, которое покидает $\bar{\varepsilon}$-трубку $\|\mathbf{x}\| < \bar{\varepsilon}$.

Замечание 1.4. Аналогичная ситуация может иметь место и в случае, когда правые части системы не зависят от t.

В работе [3] была рассмотрена система второго порядка ($n = 2$), правые части которой не зависят от времени, непрерывны при всех $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^2$ и удовлетворяют в любой ограниченной области условию Липшица. Доказано, что все решения при $t \to +\infty$ стремятся к началу координат. При этом траектории, расположенные в верхней полуплоскости, подобны кривым, показанным на рис. 2.

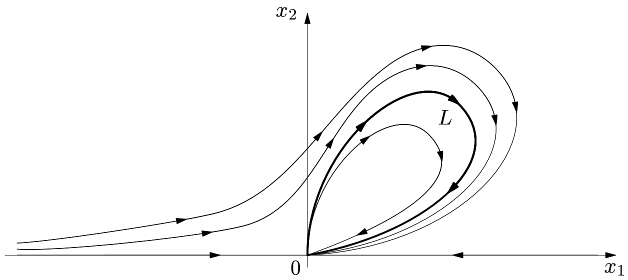

Рис. 2

Таким образом, существует кривая L, соответствующая траектории решения, стремящегося к началу координат как при $t \to -\infty$, так и при $t \to +\infty$. Эта кривая ограничивает эллиптическую область, которую огибают все траектории, начинающиеся во втором квадранте. Следовательно, нулевое решение является неустойчивым.

Упражнения

1.1. Доказать, что устойчивость по Ляпунову нулевого решения означает, что функция $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)$ при любом фиксированном $t_0 \geq 0$ непрерывна в точке $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ равномерно относительно $t \in [t_0, +\infty)$.

1.2. Исследовать на устойчивость по Ляпунову решения с указанными начальными условиями:

а) $\dot{x} = -x + t^2, \quad x(1) = 1;$ б) $\dot{x} = x^2 - 3x, \quad x(2) = 3;$

в) $\dot{x} = \dfrac{x}{t+1}, \quad x(0) = 0;$ г) $\dot{x} = -\dfrac{x^3}{t^2+1}, \quad x(0) = 0;$

д) $\dot{x} = -|x|, \quad x(0) = 0;$ е) $\dot{x} = (2 - t^3)\,x, \quad x(0) = 1;$

ж) $\dot{x} = -4t^3x^3 - 2tx, \; x(0) = 0;$ з) $\dot{x} = e^{t-x} - e^t, \quad x(0) = 0.$

1.3. Исследовать на устойчивость нулевое решение следующих систем:

а) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -\,x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -\,x_2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -\,t\,x_1, \\ \dot{x}_2 = x_1 x_2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\,\dfrac{2}{t+1}\,x_2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\,\dfrac{t}{t+1}\,x_2; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -\,x_1^3, \\ \dot{x}_2 = x_1^2 x_2; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -\,x_1^3, \\ \dot{x}_2 = x_1 x_2; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -\,x_1^3, \\ \dot{x}_2 = x_1^3 x_2; \end{cases}$ з) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \cos x_2, \\ \dot{x}_2 = -\,x_1^3 x_2^2. \end{cases}$

Задачи

1.1. Доказать, что из устойчивости решения $\varphi(t)$ для одного фиксированного $\bar{t}_0$ следует его устойчивость для любого другого момента времени t_0.

1.2. Связаны ли понятия устойчивости и ограниченности решений? Привести примеры.

1.3. Доказать, что если система (1.1) имеет нулевое решение и ее правые части не зависят от t, то устойчивость (асимптотическая устойчивость) нулевого решения всегда равномерна.

1.4. Доказать, что если система (1.1) имеет нулевое решение и функция $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ периодична по t, то устойчивость (асимптотическая устойчивость) нулевого решения всегда равномерна.

1.5. Предположим, что решение $\varphi(t)$ системы (1.1) асимптотически устойчиво равномерно по t_0 и $\mathbf{x}_0$. Пусть $A(t_0)$ — область притяжения этого решения. Доказать, что любое решение $\mathbf{x}(t, \bar{\mathbf{x}}_0, \bar{t}_0)$, где $\bar{t}_0 \geq 0$, $\bar{\mathbf{x}}_0 \in A(\bar{t}_0)$, также является асимптотически устойчивым.

1.6. Пусть задано уравнение

$$\dot{x} = p(t)x^5.$$

Здесь $p(t)$ — непрерывная на промежутке $[0, +\infty)$ функция, причем $\int_0^t p(\tau)d\tau \to -\infty$ при $t \to +\infty$. Доказать, что:

а) нулевое решение данного уравнения асимптотически устойчиво;

б) если функция $p(t)$ монотонно убывает на промежутке $[0, +\infty)$, то $A(t_1) \subseteq A(t_2)$ при $t_1 < t_2$;

в) если $p(t)$ — ω-периодическая функция, то $A(t_0+\omega) = A(t_0)$ для любого $t_0 \geq 0$;

г) если $p(t) \to \gamma$ при $t \to +\infty$, где $\gamma < 0$, то существует $T > 0$ такое, что $A(t_0) = (-\infty, +\infty)$ при всех $t_0 \geq T$.

1.7. Исследовать нулевое решение на устойчивость:

а) $\dot{x} = \sin x$; б) $\dot{x} = -\sin^2 x$;

в) $\dot{x} = \dfrac{x}{\ln(t+2)}$; г) $\dot{x} = \alpha x^m, \quad m \in \mathbb{N}$;

$$\text{д)} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{x_1}{t+1} - (t+1)^2 x_1 x_2^2, \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{x_2}{t+1}. \end{cases}$$

1.8. Построить область притяжения нулевого решения следующих уравнений:

а) $\dot{x} = -x(1-x^2)$; б) $\dot{x} = -x^3 + x^2 \sin t$;

в) $\dot{x} = \left(-1 + \dfrac{100}{t^2+1}\right) x^3$; г) $\dot{x} = -x^3 + \dfrac{100 \sin t}{t+1} x^2$.

§ 2. Устойчивость линейных систем

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{q}(t). \tag{2.1}$$

Здесь $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^n$, матрица $\mathbf{A}(t)$ и вектор-функция $\mathbf{q}(t)$ определены и непрерывны при $t \geq 0$.

Система в отклонениях от невозмущенного решения $\mathbf{x} = \varphi(t)$ имеет вид

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{y} \tag{2.2}$$

и не зависит ни от неоднородности $\mathbf{q}(t)$, ни от исследуемого решения $\varphi(t)$. Следовательно, у системы (2.1) или все решения являются устойчивыми (асимптотически устойчивыми) по Ляпунову или все они одновременно неустойчивы. Таким образом, можно говорить не об устойчивости какого-то выбранного решения, а об устойчивости системы.

Замечание 2.1. Подобная терминология неприменима для нелинейных систем, которые могут иметь как устойчивые, так и неустойчивые решения одновременно.

Теорема 2.1. *Линейная неоднородная система* (2.1) *устойчива (асимптотически устойчива) тогда и только тогда, когда устойчива (асимптотически устойчива) соответствующая ей однородная линейная система* (2.2).

Теорема 2.2. *Линейная однородная система* (2.2) *устойчива тогда и только тогда, когда все ее решения ограничены при* $t \geq 0$.

Теорема 2.3. *Линейная однородная система* (2.2) *асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда все ее решения стремятся к нулю при* $t \to +\infty$.

Рассмотрим линейную однородную систему с постоянными коэффициентами

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{2.3}$$

где $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^n$, $\mathbf{A}$ — постоянная матрица. Обозначим через $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ собственные числа матрицы $\mathbf{A}$.

Теорема 2.4. *Линейная однородная система* (2.3) *асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда* $Re\ \lambda_j < 0$, $j = 1, \ldots, n$.

Теорема 2.5. *Линейная однородная система* (2.3) *устойчива тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) $Re\ \lambda_j \leq 0$, $j = 1, \ldots, n$;

2) для собственных чисел λ_j *с нулевой вещественной частью справедливы равенства* $n - \mathrm{rang}(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{E}) = k_j$, *где* k_j *— кратность* λ_j *как корня характеристического многочлена (соответствующие клетки Жордана сводятся к одному элементу).*

Следствие. *Система* (2.3) *неустойчива тогда и только тогда, когда хотя бы одно собственное число матрицы* $\mathbf{A}$ *имеет положительную вещественную часть или хотя бы для одного собственного числа* λ_j *с нулевой вещественной частью выполнено неравенство* $n - \mathrm{rang}(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{E}) < k_j$.

Пример 2.1. Рассмотрим линейную однородную систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\,x_1 + t x_2, \\ \dot{x}_2 = -\,x_2. \end{cases}$$

Из второго уравнения имеем

$$x_2(t, x_{10}, x_{20}, t_0) = x_{20} e^{-(t-t_0)}.$$

Подставляем найденное выражение в первое уравнение системы и интегрируем его как линейное неоднородное уравнение. Получим

$$x_1(t, x_{10}, x_{20}, t_0) = e^{-(t-t_0)} \left(x_{10} + \frac{1}{2} x_{20} \left(t^2 - t_0^2 \right) \right).$$

Нетрудно видеть, что $\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)\| \to 0$ при $t \to +\infty$. В соответствии с теоремой 2.3 система асимптотически устойчива по Ляпунову.

Пример 2.2. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\,2x_1 - x_2, \\ \dot{x}_2 = a x_1 - 4x_2, \end{cases}$$

где a — параметр.

Определим собственные числа матрицы системы. Здесь

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ a & -4 \end{pmatrix}, \qquad \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \lambda^2 + 6\lambda + (a+8).$$

Получаем $\lambda_{1,2} = -3 \pm \sqrt{1-a}$.

При $a > -8$ собственные числа имеют отрицательные вещественные части и система асимптотически устойчива. При $a = -8$ одно собственное число равно нулю и система устойчива. При $a < -8$ одно собственное число положительно и система неустойчива.

Пример 2.3. Исследуем на устойчивость систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Имеем
$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2+1)^2.$$
Собственными числами кратности 2 матрицы системы являются числа $\lambda_{1,2} = \pm i$. Они имеют нулевые вещественные части, причем $\mathrm{rang}(\mathbf{A} \pm i\,\mathbf{E}) = 3$, $n - \mathrm{rang}(\mathbf{A} \pm i\,\mathbf{E}) = 1 < 2$. Следовательно, система неустойчива.

Упражнения

2.1. Доказать, что устойчивое (асимптотически устойчивое) решение системы (2.3) равномерно устойчиво (равномерно асимптотически устойчиво) по Ляпунову.

2.2. Пусть n-мерная вектор-функция $\mathbf{q}(t)$ непрерывна и ограничена при $t \geq 0$. Доказать, что все решения асимптотически устойчивой системы
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{q}(t),$$
где $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^n$, $\mathbf{A}$ — постоянная матрица, ограничены при $t \geq 0$.

2.3. Доказать, что все решения устойчивой системы из предыдущей задачи ограничены при $t \geq 0$, если
$$\int_0^{+\infty} \|\mathbf{q}(\tau)\| d\tau < +\infty.$$

2.4. Доказать, что асимптотически устойчивая линейная система (2.1) асимптотически устойчива в целом.

2.5. Исследовать данные системы на устойчивость в зависимости от параметра:

а) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 - \alpha x_2, \\ \dot{x}_2 = 9x_1 + 4\alpha x_2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = 9x_1 + \alpha x_2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3, \\ \dot{x}_2 = -3x_3, \\ \dot{x}_3 = \alpha x_1 + 2x_2 - x_3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 - x_2, \\ \dot{x}_2 = \alpha x_2 - x_3, \\ \dot{x}_3 = \alpha x_3 - x_1; \end{cases}$

д) $\ddot{x} + \alpha\dot{x} + (\alpha - 1)x = 0.$

Задачи

2.1. Доказать, что система (2.2) равномерно устойчива тогда и только тогда, когда матрица $\mathbf{H}(t, t_0) = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(t_0)$ ограничена в области $t_0 \geq 0$, $t \geq t_0$. Здесь $\mathbf{X}(t)$ — фундаментальная матрица системы.

2.2. Доказать, что если $\mathbf{A}(t) = -\mathbf{A}^*(t)$ при всех $t \geq 0$, то система (2.2) устойчива.

2.3. Доказать, что для устойчивости системы (2.2) достаточно выполнения условия

$$\int_0^{+\infty} \|\mathbf{A}(\tau)\| d\tau < +\infty. \tag{2.4}$$

2.4. Доказать, что при выполнении условия (2.4) каждое решение системы (2.2) имеет предел при $t \to +\infty$ и, кроме того, для любого постояного вектора $\mathbf{c}$ существует решение $\mathbf{x}(t)$ системы (2.2) такое, что

$$\lim_{t \to +\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{c}.$$

2.5. Исследовать на устойчивость по Ляпунову линейную однородную систему с постоянной матрицей $\mathbf{A}$, если

а) $\mathbf{A}^2 = \mathbf{E}$; б) $\mathbf{A}^2 = -\mathbf{A}$;

в) $\mathbf{A}^2 = -\mathbf{E}, \quad n = 2m, \quad m \in \mathbb{N}$;

г) $\mathbf{A} = \mathbf{a}\mathbf{b}^*, \quad \mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)^*, \quad \mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)^*$;

д) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & a & \ldots & a \\ a & a & \ldots & a \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a & a & \ldots & a \end{pmatrix}$.

2.6. Сформулировать критерии устойчивости в терминах фундаментальной матрицы системы (2.2). Воспользоваться ими для анализа устойчивости систем:

а) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -tx_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = (1 - t^2)x_1 + x_2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \cos t + x_2 \sin t, \\ \dot{x}_2 = x_2 \cos t - x_1 \sin t; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{2x_1}{(t+1)^2} + \dfrac{2x_2}{t+1}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{tx_1 + x_2}{t^2+1}, \\ \dot{x}_2 = \dfrac{-x_1 + tx_2}{t^2+1}. \end{cases}$

2.7. Доказать, что для устойчивости уравнения

$$\ddot{x} + (1 + \varphi(t))x = 0,$$

где $\varphi(t)$ — непрерывно дифференцируемая при $t \geq 0$ функция, достаточно, чтобы выполнялись условия

а) $\varphi(t) \to 0$ при $t \to +\infty$;

б) $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\dot{\varphi}(t)| dt < +\infty$.

2.8. Выяснить, при каких значениях параметра устойчивы следующие уравнения:

а) $\ddot{x} + \left(1 + \dfrac{\sin t}{(t+1)^\alpha}\right) x = 0$; б) $\ddot{x} + (1 + \sin t^\alpha)\, x = 0$.

2.9. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{0}, \tag{2.5}$$

где $\mathbf{x}$ — n-мерный вектор, $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ — постоянные $(n \times n)$-матрицы, причем $\mathbf{A}$ — симметрическая и положительно-определенная, $\mathbf{C}$ — симметрическая. Доказать следующие утверждения:

а) если матрица $\mathbf{C}$ не имеет нулевых собственных чисел и имеет нечетное число отрицательных собственных чисел, то система (2.5) неустойчива;

б) если матрица $\mathbf{B}$ кососимметрическая ($\mathbf{B}^* = -\mathbf{B}$), то система (2.5) не является асимптотически устойчивой;

в) если матрица $\mathbf{C}$ имеет четное число отрицательных собственных чисел, а все остальные ее собственные числа положительны, то существует кососимметрическая матрица $\mathbf{B}$, для которой система (2.5) устойчива.

2.10. Пусть в системе (2.5) матрица $\mathbf{B}$ нулевая. Доказать следующие утверждения:

а) если у матрицы $\mathbf{C}$ существует хотя бы одно отрицательное собственное число, то система (2.5) неустойчива;

б) если матрица $\mathbf{C}$ положительно определена, то система (2.5) устойчива.

2.11. Пусть в системе (2.5) матрица $\mathbf{B}$ кососимметрическая и $\mathbf{C} = \mathbf{O}$. Доказать следующие утверждения:

а) если матрица $\mathbf{B}$ невырождена, то система (2.5) устойчива, а в противном случае — неустойчива;

б) при нечетном n система (2.5) неустойчива.

2.12. Рассмотрим систему

$$\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{G}\mathbf{x} = \mathbf{0}, \tag{2.6}$$

где $\mathbf{x}$ — n-мерный вектор, $\mathbf{G}$ — постоянная кососимметрическая матрица. Доказать, что система (2.6) неустойчива.

§ 3. Корневые критерии устойчивости линейных стационарных систем

Для применения теоремы 2.4 необходимо иметь различные критерии отрицательности вещественных частей всех собственных чисел матрицы $\mathbf{A}$. Поскольку собственные числа являются корнями характеристического многочлена, то задача сводится к вопросу о расположении его корней на комплексной плоскости.

В начале рассмотрим более общую задачу. Пусть $f(\lambda)$ — многочлен переменной λ степени n с вещественными коэффициентами:

$$f(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n. \tag{3.1}$$

Для многочлена $f(\lambda)$ требуется указать коэффициентные критерии отрицательности вещественных частей всех его корней. Не умаляя общности, будем считать, что $a_0 > 0$.

Теорема 3.1. *Для того чтобы все корни многочлена* (3.1) *имели отрицательные вещественные части (лежали в левой полуплоскости), необходимо, чтобы выполнялись неравенства*

$$a_j > 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

В случае, когда $n = 2$, это условие является и достаточным.

Пример 3.1. Все корни многочлена

$$f(\lambda) = 2\lambda^2 + 3\lambda + 4$$

лежат в левой полуплоскости, так как $n = 2$ и все его коэффициенты положительны.

С другой стороны, у многочлена третьей степени

$$f(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda + 30$$

есть корни с положительными вещественными частями: $\lambda_{1,2} = 1 \pm 3i$. Следовательно, при $n > 2$, условие теоремы 3.1 не является достаточным.

По коэффициентам многочлена (3.1) построим матрицу Гурвица:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

На главной диагонали этой матрицы стоят числа $a_1, \dots, a_n$. В каждой строке индекс каждого элемента на единицу меньше индекса предыдущего элемента. Элементы с индексами $j > n$ или $j < 0$ полагаются нулями.

Рассмотрим главные миноры матрицы Гурвица:

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \ \dots \ , \ \Delta_n = a_n \Delta_{n-1}. \tag{3.3}$$

Теорема 3.2 (критерий Рауса — Гурвица). *Для того чтобы все корни многочлена* (3.1) *имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы были положительны все главные миноры матрицы Гурвица* (3.2).

Пример 3.2. Определим, при каких значениях параметров a и b вещественные части корней многочлена

$$f(\lambda) = \lambda^4 + a\lambda^3 + b\lambda^2 + a\lambda + 1$$

отрицательны.

Составим матрицу Гурвица (3.2) для данного многочлена:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ a & b & a & 1 \\ 0 & 1 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

По теореме 3.2 условия отрицательности вещественных частей корней многочлена имеют вид

$$\Delta_1 = a > 0, \quad \Delta_2 = a(b-1) > 0, \quad \Delta_3 = a^2(b-2) > 0.$$

Таким образом, должны выполняться неравенства $a > 0, b > 2$.

Теорема 3.3 (критерий Льенара — Шипара). *Для того чтобы все корни многочлена* (3.1) *имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

$$1) \ \ a_j > 0, \quad j = 1, \ldots, n;$$

$$2) \ \ \Delta_{n-1} > 0, \quad \Delta_{n-3} > 0, \quad \Delta_{n-5} > 0, \ \ldots\ ,$$

где Δ_j *определяются по формулам* (3.3).

Замечание 3.1. Если n четно, то по теореме 3.3 должны быть положительны миноры нечетного порядка в последовательности (3.3), а если n нечетно — миноры четного порядка.

Замечание 3.2. Критерий Льенара — Шипара требует для доказательства расположения корней многочлена (3.1) в левой полуплоскости проверки вдвое меньшего числа детерминантных неравенств, однако это преимущество условно, поскольку для вычисления каждого определителя в последовательности (3.3) необходимо вычислить все определители меньшего порядка.

Замечание 3.3. В сочетании с критерием Рауса — Гурвица критерий Льенара — Шипара показывает, что если все элементы матрицы Гурвица некоторого многочлена положительны, то из положительности ее главных миноров четного (нечетного) порядка вытекает положительность ее главных миноров нечетного (четного) порядка.

Замечание 3.4. Поскольку собственные числа матрицы $\mathbf{A}$ являются корнями характеристического многочлена и находятся из уравнения

$$\det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) = 0, \tag{3.4}$$

то для исследования вопроса об устойчивости при помощи теоремы 2.4 необходимо применить один из приведенных коэффициентных критериев к характеристическому многочлену

$$f(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n.$$

Здесь всегда $a_0 = 1$.

Приведем еще один способ выяснения вопроса, лежат ли все корни уравнения (3.4) в левой полуплоскости комплексного переменного λ.

Предположим, что выполнено условие

$$\det(\mathbf{E} - \mathbf{A}) \neq 0. \tag{3.5}$$

Рассмотрим преобразование

$$\lambda = \frac{\varrho - 1}{\varrho + 1},$$

переводящее левую полуплоскость в единичный круг плоскости комплексного переменного ϱ. При этом преобразовании корни уравнения (3.4) перейдут в корни уравнения

$$\det\Big(\mathbf{A} - \mathbf{E}\frac{\varrho - 1}{\varrho + 1}\Big) = 0. \tag{3.6}$$

Умножая (3.6) на $(1 + \varrho)^n$, имеем

$$\det(\mathbf{A} + \mathbf{E} - \varrho(\mathbf{E} - \mathbf{A})) = 0.$$

В последнем уравнении, меняя ϱ на $-\varrho$ и умножая обе части на $\det\big((\mathbf{A} - \mathbf{E})^{-1}\big)$, получим

$$\det(\mathbf{B} - \varrho\mathbf{E}) = 0. \tag{3.7}$$

Здесь $\mathbf{B} = (\mathbf{A} - \mathbf{E})^{-1}(\mathbf{A} + \mathbf{E})$. Таким образом, если $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$, то все собственные числа матрицы $\mathbf{B}$ лежат в единичном круге.

Обозначим корни (3.7) через $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$. Известно, что матрица $\mathbf{B}^k$ будет иметь собственные числа $\varrho_1^k, \ldots, \varrho_n^k$.

Теорема 3.4. *Пусть выполнено условие* (3.5). *Тогда для того чтобы собственные числа матрицы* $\mathbf{B}$ *лежали в единичном круге, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\mathbf{B}^k \to \mathbf{O} \quad \textit{при} \quad k \to \infty. \tag{3.8}$$

Замечание 3.5. Условие (3.8) будет выполнено, если для какого-либо k окажется, что модуль каждого элемента $b_{ij}^{(k)}$ матрицы $\mathbf{B}^k$ не превосходит числа α/n, где $0 < \alpha < 1$, т.е. если

$$|b_{ij}^{(k)}| \le \frac{\alpha}{n}. \tag{3.9}$$

Для практического применения критерия необходимо построить матрицу

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A} - \mathbf{E})^{-1}(\mathbf{A} + \mathbf{E}) = (\mathbf{A} - \mathbf{E})^{-1}((\mathbf{A} - \mathbf{E}) + 2\mathbf{E}),$$

откуда

$$\mathbf{B} = \mathbf{E} + 2(\mathbf{A} - \mathbf{E})^{-1}. \tag{3.10}$$

Следовательно, матрица (3.10) будет построена, если вычислить матрицу $(\mathbf{A} - \mathbf{E})^{-1}$.

Пример 3.3. Рассмотрим матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix},$$

собственные числа которой $\lambda_{1,2} = (-3 \pm i\sqrt{11})/2$, лежат в левой полуплоскости. Матрица $\mathbf{B}$, вычисленная по формуле (3.10), имеет вид

$$\mathbf{B} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix},$$

причем условие (3.9) в данном случае выполняется при $k = 3$:

$$\mathbf{B}^3 = \frac{1}{729}\begin{pmatrix} 323 & 222 \\ 318 & 117 \end{pmatrix}, \quad |b_{ij}^{(3)}| \le 0.45.$$

Здесь $n = 2$, а $\alpha = 0.9$.

Упражнения

3.1. Исследовать на устойчивость системы, пользуясь одним из корневых критериев:

а) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 5 & -4 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}$;   б) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}$;

в) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}$;   г) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$;

д) $x^{(5)} + 3x^{(4)} + 15x^{(3)} + 24\ddot{x} + 10\dot{x} + 5x = 0$;

е) $x^{(5)} + 6x^{(4)} + 11x^{(3)} + 20\ddot{x} + 7\dot{x} = 0$;

ж) $x^{(5)} + 3x^{(4)} + 10x^{(3)} + 22\ddot{x} + 23\dot{x} + 11x = 0$;

з) $x^{(5)} + 5x^{(4)} + 15x^{(3)} + 48\ddot{x} + 44\dot{x} + 74x = 0$.

3.2. Определить область асимптотической устойчивости в пространстве параметров:

а) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -1 & \alpha & 0 \\ \beta & -1 & \alpha \\ 0 & \beta & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$;   б) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \gamma - 2 & -\gamma & -\gamma - \beta \\ 1 - \gamma & \gamma & \gamma + \beta \end{pmatrix} \mathbf{x}$;

в) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta + 1 & \beta \end{pmatrix} \mathbf{x}$;   г) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -2 & -\beta & -1 - \alpha \\ 0 & \beta + 1 & \alpha - 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$;

д) $x^{(3)} + 5\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$;

е) $ax^{(4)} + x^{(3)} + 2\ddot{x} + \dot{x} + bx = 0$;

ж) $x^{(4)} + x^{(3)} + a\ddot{x} + 3\dot{x} + bx = 0$.

Задачи

3.1. Определить условия, при выполнении которых корни полинома $f(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$ лежат внутри единичного круга.

3.2. Доказать, что критерий Льенара — Шипара остается в силе, если у характеристического многочлена (3.4) положительны лишь коэффициенты $a_0, a_2, \ldots, a_{2m}$ с четными индексами, а при нечетном n — еще и коэффициент a_n.

3.3. Доказать, что для асимптотической устойчивости системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -a_1x_1 + b_1x_n, \\ \dot{x}_2 = b_2x_1 - a_2x_2, \\ \dot{x}_3 = b_3x_2 - a_3x_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n = b_nx_{n-1} - a_nx_n, \end{cases}$$

где a_i, b_i — положительные постоянные, $i = 1, \ldots, n$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие:

$$a_1 \ldots a_n > b_1 \ldots b_n.$$

3.4. Составить алгоритм и написать программу, позволяющую проверять критерий (3.8). Входными данными считать матрицу системы $\mathbf{A}$ и величину параметра α. На выходе показать значение k, для которого выполнено условие (3.9). Проверить работу программы на примерах из упражнений 3.1, 3.2.

§ 4. Критерий Михайлова. Устойчивость линейных систем с неопределенными параметрами

4.1. Критерий Михайлова. Прежде чем сформулировать основные утверждения и теоремы настоящего параграфа, рассмотрим еще один геометрический критерий расположения корней полинома на комплексной плоскости. Речь пойдет о так называемом частотном критерии А. В. Михайлова.

Пусть

$$f(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n, \tag{4.1}$$