Расчет

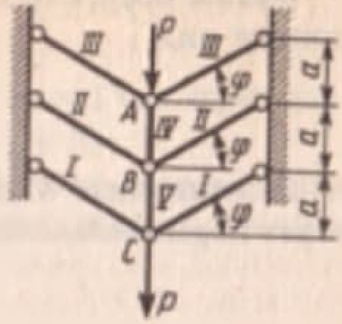

Рис. 4.1

1. **Определение наибольшей допускаемой нагрузки на систему из расчета на прочность по методу допускаемых напряжений.** а) Общее число неизвестных нормальных сил, возникающих в стержнях и подлежащих определению, равно числу стержней, составляющих систему. Поскольку заданная система является симметричной (см. рис. 4.1), число неизвестных сил в этой системе равно пяти. Для плоской системы сил можно составить три независимых уравнения статики. Следовательно, две неизвестные силы являются дополнительными, а потому заданная система является дважды статически неопределимой.

б) Предполагаем, что от внешних нагрузок все стержни системы испытывают растяжение. Поскольку нормальные силы в стержнях являются внутренними, то для их определения используем метод сечений. Вырезая узлы A, B, C (см. рис. 4.1), составляем уравнения статики как сумму проекций на ось y (рис. 4.2, *а — в*) сил внешних и внутренних, действующих на каждый из указанных узлов.

Для узла A (рис. 4.2, *а*) $\Sigma Y=0$;

$$2N_{III}\sin\varphi - N_{IV} - P = 0 \text{ или при } \varphi = 30^\circ \; N_{III} - N_{IV} = P.$$

Для узла B (рис. 4.2, *б*) $\Sigma Y=0$;

$$2N_{II}\sin\varphi + N_{IV} - N_{V} = 0 \text{ или } N_{II} + N_{IV} - N_{V} = 0.$$

Для узла C (рис. 4.2, *в*)

$$2N_{I}\sin\varphi + N_{V} - P = 0 \text{ или } N_{I} + N_{V} = P.$$

Таким образом, получили три уравнения статики, в которых пять неизвестных нормальных сил.

в) Составляем первое уравнение совместности перемещений точек A и B, соединенных стержнем IV (рис. 4.3). Так как было предположено, что все стержни системы растягиваются, то перемещение точки B (δ_B) больше перемещения точки A (δ_A) на удлинение стержня IV:

$$\delta_B = \delta_A + \Delta l_{IV}.$$

Перемещение точки A связано с удлинением стержня III:

$$\delta_A = \Delta l_{III}/\sin\varphi = 2\Delta l_{III}, \text{ а } \delta_B = \Delta l_{II}/\sin\varphi = 2\Delta l_{II}.$$

Таким образом, первое уравнение совместности перемещений примет вид

$$2\Delta l_{II}=2\Delta l_{III}+\Delta l_{IV}.$$

Абсолютные удлинения стержней заменим по закону Гука через нормальные силы и начальные размеры стержней:

$$2\frac{N_{II}l_{II}}{EF_{II}}=2\frac{N_{III}l_{III}}{EF_{III}}+\frac{N_{IV}l_{IV}}{EF_{IV}}.$$

Учитывая, что $l_{II}=l_{III}=a/\sin\varphi=2a$, $l_{IV}=a$, $F_{II}=F_{III}=4\cdot10^{-4}$ м^2, $F_{IV}=1\cdot10^{-4}$ м^2, после подстановки и сокращения получим

$$N_{II}=N_{III}+N_{IV}.$$

Второе дополнительное уравнение составим из условия совместности перемещений точек B и C (см. рис. 4.3)

$$\delta_C=\delta_B+\Delta l_V$$

или через удлинения стержней

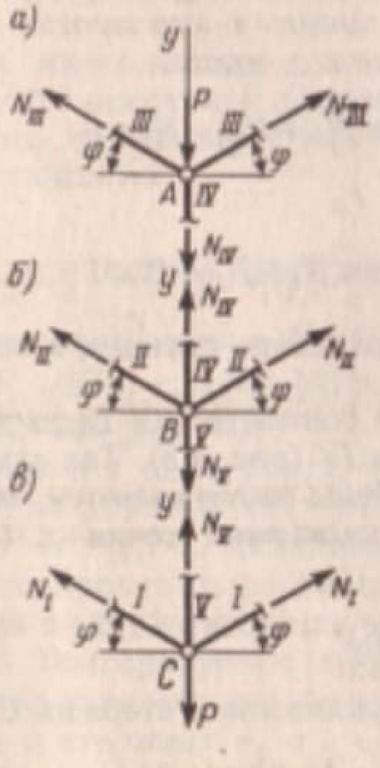

Рис. 4.2

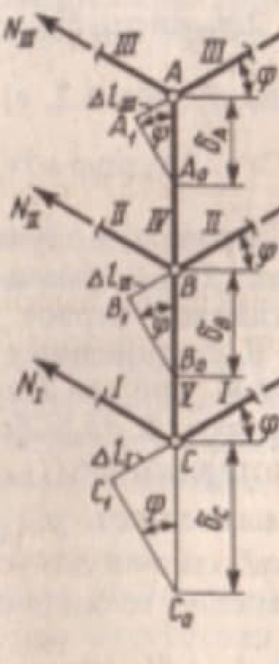

Рис. 4.3

$$2\Delta l_I = 2\Delta l_{II} + \Delta l_V.$$

После замены абсолютных удлинений по закону Гука через нормальные силы и сокращений получим $N_I = N_{II} + N_V$.

г) Составленные уравнения статики и условия совместности перемещений позволили получить следующую систему из пяти уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &N_{III} - N_{IV} = P; \\ &N_{II} + N_{IV} - N_V = 0; \\ &N_I + N_V = P; \\ &N_{II} - N_{III} - N_{IV} = 0; \\ &N_I - N_{II} - N_V = 0. \end{aligned}\right\}$$

Решая эту систему относительно искомых нормальных сил, получим: $N_I = 0{,}75P$, $N_{II} = 0{,}5P$, $N_{III} = 0{,}75P$, $N_{IV} = -0{,}25P$, $N_V = 0{,}25P$. Знак минус нормальной силы в стержне *IV* указывает, что принятое ранее предположение о растяжении этого стержня оказалось неверным. Стержень *IV* испытывает сжатие. Правильность вычисленных нормальных сил следует проверить подстановкой их значений в исходные уравнения. Зная нормальные силы, вычисляем значения нормальных напряжений в стержнях:

$$\sigma_I = \frac{N_I}{F_I} = \frac{0{,}75P}{4 \cdot 10^{-4}} = 1875P, \ \sigma_{II} = \frac{N_{II}}{F_{II}} = \frac{0{,}5P}{4 \cdot 10^{-4}} = 1250P,$$

$$\sigma_{III} = \frac{0{,}75P}{4 \cdot 10^{-4}} = 1875P, \ \sigma_{IV} = -\frac{0{,}25P}{10^{-4}} = -2500P, \ \sigma_V = \frac{0{,}25P}{10^{-4}} = 2500P.$$

д) Как видно из выполненного расчета, наиболее напряженными оказались стержни *IV* и *V*.

Условие прочности по методу допускаемых напряжений состоит в том, что $\sigma_{max} \leqslant [\sigma]$, где допускаемое напряжение $[\sigma] = \sigma_т / n_т = 240/1{,}5 = 160$ МПа $= 160 \cdot 10^6$ Па.

Подставляя вместо σ_{max} значение σ_V, получим $2500P \leqslant 160 \cdot 10^6$. Отсюда наибольшая допускаемая сила

$$P_{max} = \frac{160 \cdot 10^6}{2500} = 64 \cdot 10^3 \text{ Н} = 64 \text{ кН}.$$

При такой нагрузке напряжения в стержнях будут иметь следующие значения: $\sigma_I=120\cdot10^6$ Па$=120$ МПа, $\sigma_{II}=80\cdot10^6$ Па$=80$ МПа, $\sigma_{III}=120$ МПа, $\sigma_{IV}=-160$ МПа, $\sigma_V=160$ МПа.

2. **Определение наибольшей допускаемой нагрузки из расчета на прочность по несущей способности системы.** Так как стержень V является наиболее напряженным, то при статическом увеличении нагрузки напряжение в этом стержне раньше, чем в других, достигает значения, равного пределу текучести $\sigma_т$. Тогда нормальная сила в стержне V будет $N_V=\sigma_т F_V$. При дальнейшем возрастании нагрузки нормальная сила в стержне V изменяться не будет, а в стержнях I она будет возрастать.

Несущая способность системы будет исчерпана при появлении текучести в стержнях I. Используя уравнение статики для узла C в предположении текучести стержней V и I (рис. 4.4), определим предельную нагрузку на систему:

$$\Sigma Y=0;\ \sigma_т F_V+2\sigma_т F_I\sin\varphi-P_{пред}=0,$$

откуда $P_{пред}=\sigma_т(F_V+F_I)$.

Наибольшую допускаемую нагрузку P'_{max} найдем, разделив предельную нагрузку на коэффициент запаса прочности:

$$P'_{max}=P_{пред}/n_т.$$

Учитывая, что $\sigma_т/n_т=[\sigma]$, получим

$$P'_{max}=[\sigma](F_V+F_I)=160\cdot10^6(1+4)\cdot10^{-4}=8\cdot10^4\ \text{Н}=80\ \text{кН}.$$

При других возможных вариантах исчерпания несущей способности системы значение P'_{max} оказывается большим чем 80 кН, что является недопустимым для системы.

Таким образом, грузоподъемность системы при расчете по несущей способности больше ее грузоподъемности при расчете системы по методу допускаемых напряжений:

$$\eta=\frac{P'_{max}-P_{max}}{P_{max}}100\%=\frac{80-64}{64}100\%=25\%.$$

3. **Определение температурных напряжений.** Считаем, что внешние силы отсутствуют и в соответствии с заданием повышается температура только в стержне IV на величину $\Delta t^\circ_{IV}=80\,^\circ$C (рис. 4.5). При этом можно предположить, что в стержнях I и II будут возникать растягивающие усилия, а в стержнях III, IV и V — сжимающие. Приняв такое предположение, составляем

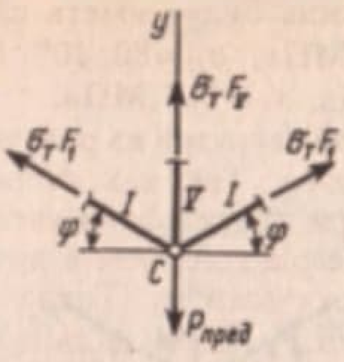

Рис. 4.4

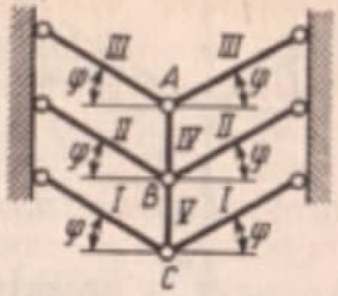

Рис. 4.5

уравнения статики как условия равновесия узлов A, B и C (рис. 4.6).

Для узла A $\Sigma Y=0$; $N_{IV}-N_{III}=0$.

Для узла B $\Sigma Y=0$; $N_V-N_{IV}+N_{II}=0$.

Для узла C $\Sigma Y=0$; $N_I-N_V=0$.

Для определения этих усилий необходимо составить еще два уравнения совместности перемещений. При повышении температуры стержня IV его длина увеличивается; точки A и B (рис. 4.7) переместятся соответственно в точки A_0 и B_0. При этом AA_0+ $+BB_0=\Delta l_{IV}$,

$$AA_0=2\Delta l_{III}=2\frac{N_{III}l_{III}}{EF_{III}}=4\frac{N_{III}a}{EF_{III}};$$

$$BB_0=2\Delta l_{II}=2\frac{N_{II}l_{II}}{EF_{II}}=4\frac{N_{II}a}{EF_{II}};$$

$$\Delta l_{IV}=\alpha\Delta t^{\circ}a-\frac{N_{IV}a}{EF_{IV}}.$$

Подставив эти значения в уравнение совместности перемещений и произведя сокращения, получим

$$N_{II}+N_{III}+N_{IV}=\alpha\Delta t^{\circ}_{IV}E\cdot 10^{-4}.$$

Для составления второго уравнения совместности перемещений запишем связь между перемещениями точек B и C, соединенных стержнем V (см. рис. 4.7).

Так как мы предположили, что стержень V сжимается, то $BB_0-CC_0=\Delta l_V$ или $2\Delta l_{II}-2\Delta l_I=\Delta l_V$.

Выражая изменения длин стержней по закону Гука через продольные силы, получим

$$N_{II}-N_I=N_V.$$

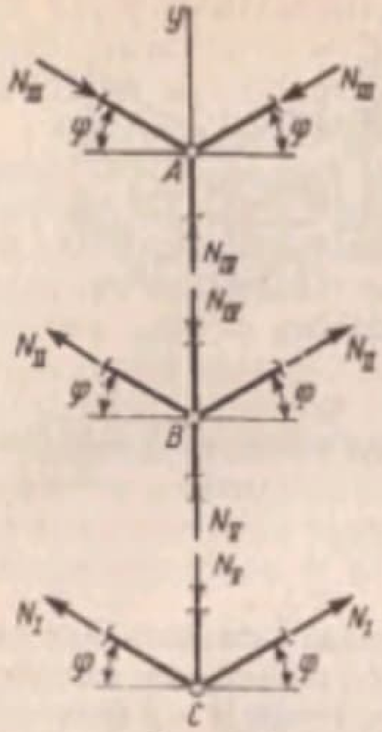

Рис. 4.6

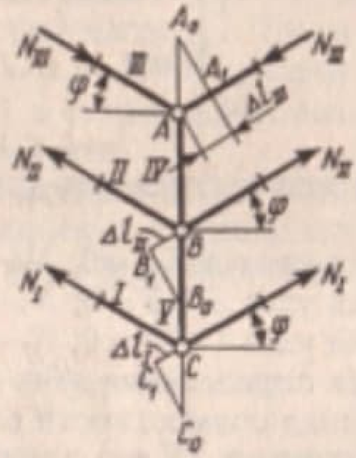

Рис. 4.7

Таким образом, получили систему из пяти уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&N_{IV}-N_{III}=0;\\
&N_{V}-N_{IV}+N_{II}=0;\\
&N_{I}-N_{V}=0;\\
&N_{II}+N_{III}+N_{IV}=\alpha\Delta t^{\circ}_{IV}E\cdot 10^{-4};\\
&N_{II}-N_{I}=N_{V}.
\end{aligned}\right\}$$

Решив эту систему, получим значения нормальных сил, возникающих в стержнях при повышении температуры стержня *IV*:

$$N_{I}=N_{V}=\frac{1}{8}\alpha\Delta t^{\circ}_{IV}E\cdot 10^{-4};\ N_{II}=\frac{1}{4}\alpha\Delta t^{\circ}_{IV}E\cdot 10^{-4};$$

$$N_{III}=N_{IV}=\frac{3}{8}\alpha\Delta t^{\circ}_{IV}E\cdot 10^{-4}.$$

Отсюда значения температурных напряжений в стержнях

$$\sigma_{I}=\frac{\alpha\Delta t^{\circ}_{IV}E\cdot 10^{-4}}{8F_{I}}=\frac{125\cdot 10^{-7}\cdot 80\cdot 2\cdot 10^{11}\cdot 10^{-4}}{8\cdot 4\cdot 10^{-4}}=$$

$$=6{,}25\cdot 10^{6}\ \text{Па}=6{,}25\ \text{МПа};$$

$$\sigma_{IIt}=\frac{\alpha\Delta t^{\circ}_{IV}E\cdot 10^{-4}}{4F_{II}}=\frac{125\cdot 10^{-7}\cdot 80\cdot 2\cdot 10^{11}\cdot 10^{-4}}{4\cdot 4\cdot 10^{-4}}=$$

$$=12{,}5\cdot 10^{6}\text{ Па}=12{,}5\text{ МПа;}$$

$$\sigma_{IIIt}=\frac{3\alpha\Delta t^{\circ}_{IV}E\cdot 10^{-4}}{8F_{III}}=\frac{3\cdot 125\cdot 10^{-7}\cdot 2\cdot 10^{11}\cdot 10^{-4}}{8\cdot 4\cdot 10^{-4}}=$$

$$=18{,}7\cdot 10^{6}\text{ Па}=18{,}7\text{ МПа;}$$

$$\sigma_{IVt}=\frac{3\alpha\Delta t^{\circ}_{IV}E\cdot 10^{-4}}{8F_{IV}}=\frac{3\cdot 125\cdot 10^{-7}\cdot 2\cdot 10^{11}\cdot 10^{-4}}{8\cdot 1\cdot 10^{-4}}=$$

$$=75\cdot 10^{6}\text{ Па}=75\text{ МПа;}$$

$$\sigma_{Vt}=\frac{\alpha\Delta t^{\circ}_{IV}E\cdot 10^{-4}}{8F_{V}}=\frac{125\cdot 10^{-7}\cdot 2\cdot 10^{11}\cdot 10^{-4}}{8\cdot 1\cdot 10^{-4}}=$$

$$=25\cdot 10^{6}\text{ Па}=25\text{ МПа.}$$

4. **Определение монтажных напряжений.** В соответствии с заданием принимаем, что стержень *III* изготовлен короче на $\Delta_{III}=0{,}7$ мм (рис. 4.8). Можно ожидать, что после сборки системы в стержнях *III*, *IV* и *V* появятся растягивающие усилия, а стержни *I* и *II* будут испытывать сжатие. Исходя из такого предположения, составим уравнения статики как условия равновесия сил, действующих на узлы *A*, *B*, *C* (рис. 4.9):

$$N_{III}-N_{IV}=0;\ N_{IV}-N_{V}-N_{II}=0;\ N_{V}-N_{I}=0.$$

Для составления уравнения совместности перемещений воспользуемся тем, что заданная неточность изготовления Δ_{III} при сборке выбирается за счет удлинения стержня *III* и перемещения точки *A* (см. рис. 4.8):

$$AA_2+A_2A_1=\Delta_{III}.$$

Отрезок $AA_2=AA_0\sin\varphi=\frac{1}{2}AA_0$, но так как перемещение

$$AA_0=\Delta l_{IV}+\Delta l_{V},\text{ то }AA_2=\frac{1}{2}(\Delta l_{IV}+\Delta l_{V}),\text{ а }A_2A_1=\Delta l_{III}.$$

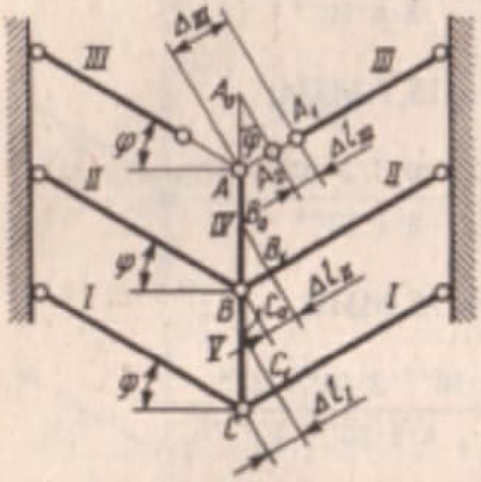

Рис. 4.8

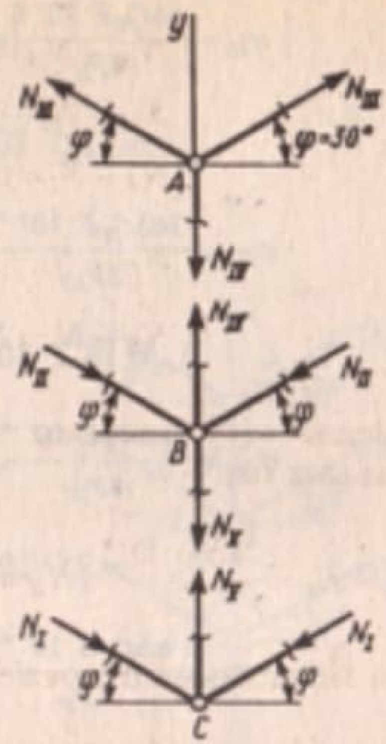

Рис. 4.9

Следовательно, первое уравнение совместности перемещений принимает вид

$$\frac{1}{2}(\Delta l_{IV}+\Delta l_V)+\Delta l_{III}=\Delta_{III}.$$

После замены удлинений через нормальные силы и начальные размеры стержней получим

$$N_{IV}+N_V+N_{III}=\frac{2E\Delta_{III}\cdot 10^{-4}}{a}.$$

Для составления второго дополнительного уравнения свяжем перемещения узлов B и C с удлинением стержня V (см. рис. 4.8):

$$BB_0-CC_0=\Delta l_V.$$

Так как $BB_0=\Delta l_{II}/\sin\varphi=2\Delta l_{II}$, $CC_0=2\Delta l_I$, то $2\Delta l_{II}-2\Delta l_I=\Delta l_V$, или, используя закон Гука, после сокращений получим

$$N_{II}-N_I=N_V.$$

Следовательно, для определения нормальных сил, возникающих в стержнях после сборки, получим следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &N_{III}-N_{IV}=0;\\ &N_{IV}-N_{V}-N_{II}=0;\\ &N_{V}-N_{I}=0;\\ &N_{IV}+N_{V}+N_{III}=\frac{2E\Delta_{III}\cdot 10^{-4}}{a};\\ &N_{II}-N_{I}=N_{V}. \end{aligned}\right\}$$

Решение этой системы приводит к следующим значениям нормальных сил

$$N_I=N_V=\frac{2E\Delta_{III}\cdot 10^{-4}}{7a};\ N_{II}=\frac{4E\Delta_{III}\cdot 10^{-4}}{7a};\ N_{III}=N_{IV}=\frac{6E\Delta_{III}\cdot 10^{-4}}{7a}.$$

Отсюда монтажные напряжения в стержнях равны:

$$\sigma_I=\frac{2\cdot 2\cdot 10^{11}\cdot 0{,}7\cdot 10^{-3}\cdot 10^{-4}}{7\cdot 1\cdot 4\cdot 10^{-4}}=10^7\ \text{Па}=10\ \text{МПа},$$

$$\sigma_{II}=\frac{4\cdot 2\cdot 10^{11}\cdot 0{,}7\cdot 10^{-3}\cdot 10^{-4}}{7\cdot 1\cdot 4\cdot 10^{-4}}=2\cdot 10^7\ \text{Па}=20\ \text{МПа},$$

$$\sigma_{III}=\frac{6\cdot 2\cdot 10^{11}\cdot 0{,}7\cdot 10^{-3}\cdot 10^{-4}}{7\cdot 1\cdot 4\cdot 10^{-4}}=3\cdot 10^7\ \text{Па}=30\ \text{МПа},$$

$$\sigma_{IV}=\frac{6\cdot 2\cdot 10^{11}\cdot 0{,}7\cdot 10^{-3}\cdot 10^{-4}}{7\cdot 1\cdot 1\cdot 10^{-4}}=12\cdot 10^7\ \text{Па}=120\ \text{МПа},$$

$$\sigma_V=\frac{2\cdot 2\cdot 10^{11}\cdot 0{,}7\cdot 10^{-3}\cdot 10^{-4}}{7\cdot 1\cdot 10^{-4}}=4\cdot 10^7\ \text{Па}=40\ \text{МПа}.$$

4.4. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Варианты заданий обозначены двумя числами, разделенными точкой. Первое число указывает номер расчетной схемы на рис. 4.10, а второе — исходные данные к этой схеме в табл. 4.1.

Для материала всех стержней принять модуль продольной упругости $E=2\cdot 10^5$ МПа, предел текучести $\sigma=240$ МПа, коэффициент запаса прочности $n_т=1{,}5$, коэффициент линейного расширения $\alpha=125\cdot 10^{-7}$.