Векторная алгебра

вектор; равенство векторов; нуль-вектор; единичный вектор (орт); сумма геометрических векторов; произведение геометрического вектора на число; орт вектора; коллинеарность векторов; компланарность векторов; линейно-зависимые векторы; линейно-независимые векторы; базис; линейная комбинация векторов базиса; координаты вектора в базисе; сложение векторов в координатной форме; умножение вектора на число в координатной форме; коллинеарность векторов в координатной форме; ортонормированный базис; правая (левая) тройка векторов; проекция вектора на вектор (на ось); направляющие косинусы вектора; прямоугольная система координат; радиус-вектор; расстояние между точками; скалярное произведение векторов; косинус угла между векторами; векторное произведение векторов; геометрический смысл векторного произведения; смешанное произведение; геометрический смысл смешанного произведения.

1. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 4$. Найти:

1) $(\bar{a}, \bar{b})$;

2) $(\bar{a})^2$;

3) $(\bar{b})^2$;

4) $(\bar{a} + \bar{b})^2$;

5) $(3\bar{a} - 2\bar{b})(\bar{a} + 2b)$;

6) $(\bar{a} - \bar{b})^2$;

7) $(3\bar{a} + 2\bar{b})^2$.

2. Найти координаты вектора $\bar{x}$, если известно, что он перпендикулярен векторам $\bar{a}_1 = (4, -2, -3)$ и $\bar{a}_2 = (0,1,3)$, образует с ортом $\bar{j}$ тупой угол и $|\bar{x}| = 26$.

3. Найти координаты вектора $\bar{x}$, если он перпендикулярен векторам $\bar{a}_1 = (2, -3,1)$ и $\bar{a}_2 = (1, -2,3)$, а также удовлетворяет условию: $\bar{x} \cdot (\bar{\imath} + 2\bar{j} - 7\bar{k}) = 10$.

4. Даны точки A(4,2,5), B(0,7,2), C(0,2,7). Коллинеарны ли векторы $\bar{m}$ и $\bar{n}$, если $\bar{m} = 2\overline{AB} - 3\overline{CB}$, $\bar{n} = \overline{CA}$?

5. Компланарны ли данные векторы:

а) $\bar{a} = -2\bar{\imath} + \bar{\jmath} + \bar{k},\ \ \bar{b} = \bar{\imath} - 2\bar{\jmath} + 3\bar{k},\ \ \bar{c} = 14\bar{\imath} - 13\bar{\jmath} + 7\bar{k}$;

б) $\bar{a} = 2\bar{\imath} + \bar{\jmath} - 3\bar{k},\ \ \bar{b} = 3\bar{\imath} - 2\bar{\jmath} + 2\bar{k},\ \ \bar{c} = \bar{\imath} - 4\bar{\jmath} + \bar{k}$?

6. При каком λ векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ будут компланарны, если:

а) $\bar{a} = (\lambda, 3,1),\ \bar{b} = (5, -1,2),\ \bar{c} = (-1,5,4)$;

б) $\bar{a} = (1,2\lambda, 1), \bar{b} = (1, \lambda, 0), \bar{c} = (0, \lambda, 1)$?

7. Даны точки A(–3;2;–1), B(1;–1;4), C(2;0;1), D(1;–3;5). Найдите:

а) длину отрезка AB;

б) косинус угла B в треугольнике ABC;

в) $\text{пр}_{\overline{AB}}\left(2\overline{BC} - \overline{AD}\right)$;

г) $\overline{AB}^0$ и направляющие косинусы вектора $\overline{AB}$;

д) площадь треугольника ABC;

е) высоту h треугольника ABC, опущенную из вершины C на сторону AB;

ж) объём пирамиды ABCD.

8. Дано:$\bar{a}_1(3, -1,2), \bar{a}_2(1,2, -1)$. Найти:

а) $[\bar{a}_1, \bar{a}_2]$;

б) $[2\bar{a}_1 + \bar{a}_2, \bar{a}_2]$;

в) $[2\bar{a}_1 - \bar{a}_2, 2\bar{a}_1 + \bar{a}_2]$.

9. Даны векторы: $\bar{a} = m\bar{\imath} + 3\bar{\jmath} + 4\bar{k},\ \ \bar{b} = 4\bar{\imath} + m\bar{\jmath} - 7\bar{k}$. При каком значении m эти векторы перпендикулярны?

10. Даны четыре векторы: $\bar{a}(2,1,0)$, $\bar{b}(1, -1,2)$, $\bar{c}(2,2, -1)$, $\bar{d}(3,7, -7)$. Найти разложение каждого из этих четырех векторов, принимая в качестве базиса три остальных.