

# Электротехника

## Домашняя работа № 2

### «Расчёт электрической цепи однофазного синусоидального тока»

#### Образец выполнения

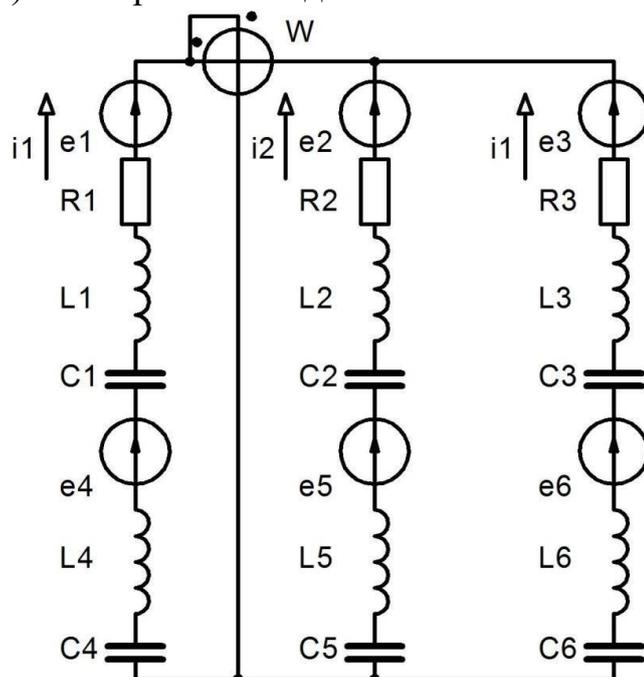
#### Задание

Номер варианта соответствует  
двум последним цифрам номера студенческого билета

#### ЗАДАНИЕ ДЛЯ ВСЕХ ВАРИАНТОВ

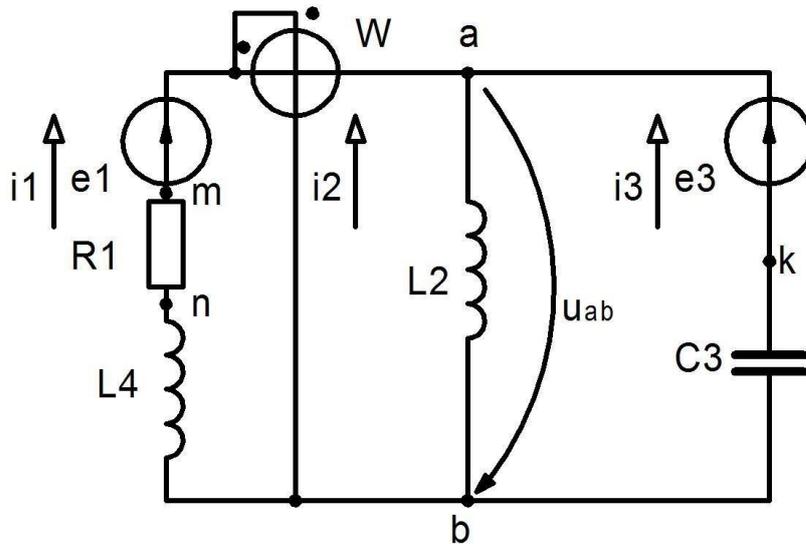
Для схемы, соответствующей Вашему варианту, выполнить следующее:

1. По законам Кирхгофа составить систему уравнений для расчёта токов во всех ветвях, записав её в двух формах:
  - а) для мгновенных значений (дифференциальная форма);
  - б) для комплексов (символическая форма).
2. Определить комплексы токов в ветвях любым методом.
3. Определить показание ваттметра двумя способами:
  - а) с помощью выражения для комплексов тока и напряжения;
  - б) по формуле  $UI\cos\varphi$ .Построить векторную диаграмму тока и напряжения для ветви, в которой измерялась мощность. На векторной диаграмме указать угол  $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ .
4. Построить векторную топографическую диаграмму токов и напряжений.
5. Записать выражение для мгновенного значения тока  $i_1$  и построить график зависимости  $i_1(\omega t)$  в интервале от 0 до  $2\pi$ .



**Замечание:** общее условие и общий рисунок в Ваш отчёт вставлять необязательно!  
В отчёте должны быть рисунок и данные, соответствующие Вашему варианту.

# МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ РАСЧЁТА. ПРИМЕР РАСЧЁТА



Дано:

$R1 = 42 \text{ Ом},$   
 $L2 = 0,59 \text{ Гн},$   
 $C3 = 76 \text{ мкФ},$   
 $L4 = 0,40 \text{ Гн},$   
 $E_{m1} = 51 \text{ В},$   
 $\psi_1 = 70^\circ,$   
 $E_{m3} = 99 \text{ В},$   
 $\psi_3 = 200^\circ,$   
 $f = 63 \text{ Гц}$

Рис. 1.

**Замечание:** Все расчёты проводятся в основных единицах, поэтому первым шагом необходимо провести соответствующие преобразования исходных данных (т.е. заменить дольные приставки на соответствующие множители: мили на  $10^{-3}$ , микро на  $10^{-6}$  и т.д.). В этом случае результаты тоже будут выражены в основных единицах, и размерность будем писать только в конце.

## 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РАСЧЁТЫ

Прежде, чем приступать к выполнению поставленных задач, выполним некоторые подготовительные действия:

### 1.1. Вычисление комплексов ЭДС ветвей

По условию для каждой ЭДС заданы амплитуда  $E_m$  и начальная фаза  $\psi$ . Чтобы записать комплексы ЭДС  $\underline{E}$ , нужно для каждой ЭДС вычислить ещё действующее значение  $E$ , действительную  $\text{Re } \underline{E}$  и мнимую  $\text{Im } \underline{E}$  части:

$$\underline{E} = \text{Re} \underline{E} + j \text{Im} \underline{E} = E e^{j\psi}$$

$$E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \quad \text{Re} \underline{E} = E \cos \psi \quad \text{Im} \underline{E} = E \sin \psi$$

Для наших данных получим:

$$E_1 = \frac{51}{\sqrt{2}} = 36,1 \quad \text{Re } \underline{E}_1 = 36,1 \cos 70^\circ = 12,33 \quad \text{Im } \underline{E}_1 = 36,1 \sin 70^\circ = 33,9$$

$$E_3 = \frac{99}{\sqrt{2}} = 70,0 \quad \text{Re } \underline{E}_3 = 70,0 \cos 200^\circ = -65,8 \quad \text{Im } \underline{E}_3 = 70,0 \sin 200^\circ = -23,9$$

## 1.2. Вычисление полных комплексных сопротивлений ветвей

Полное комплексное сопротивление ветви определяется по формуле:

$$\underline{Z} = R + jX = R + j(X_L - X_C)$$

где  $R$  – активное сопротивление ветви;

$X = X_L - X_C$  – реактивное сопротивление;

$X_L = \omega L$  – реактивное индуктивное сопротивление;

$X_C = 1 / \omega C$  – реактивное ёмкостное сопротивление;

$\omega = 2\pi f$  – угловая частота.

Подставив числовые значения, получим:

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_4 = R_1 + jX_{L4} = 42,0 + 158,3j$$

$$\underline{Z}_2 = j\omega L_2 = jX_{L2} = 234j$$

$$\underline{Z}_3 = 1 / j\omega C_3 = -jX_{C3} = -33,2j$$

Все сопротивления получены в Омах.

## 2. ПО ЗАКОНАМ КИРХГОФА СОСТАВИТЬ СИСТЕМУ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ РАСЧЁТА ТОКОВ ВО ВСЕХ ВЕТВЯХ, ЗАПИСАВ ЕЁ В ДВУХ ФОРМАХ

### 2.1. Для мгновенных значений (дифференциальная форма):

При составлении уравнений по законам Кирхгофа в дифференциальной форме нужно помнить связь между токами и напряжениями на отдельных элементах для мгновенных значений:

для активного сопротивления:

$$u = Ri$$

для индуктивности:

$$u = L \frac{di}{dt}$$

для ёмкости:

$$u = \frac{1}{C} \int idt$$

Отметим для удобства три дополнительные точки: m, n и k (см. рис. 1), не являющиеся узлами.

Данная цепь (рис. 1) имеет 3 ветви и 2 узла (a и b). Поэтому необходимо составить систему трёх уравнений с тремя неизвестными. Одно уравнение составим по 1-му закону Кирхгофа, два – по второму:

уравнение для узла a:

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

уравнение для левого контура abnma:

$$-L_2 \frac{di_2}{dt} + L_4 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 = 0$$

уравнение для правого контура akba:

$$-\frac{1}{C_3} \int i_3 dt + L_2 \frac{di_2}{dt} + R_1 i_1 = e_1$$

Таким образом, получаем систему 3 интегро-дифференциальных уравнений с 3 неизвестными токами  $i_1, i_2, i_3$ :

$$\begin{cases} i_1 + i_2 + i_3 = 0 \\ -L_2 \frac{di_2}{dt} + L_4 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 = 0 \\ -\frac{1}{C_3} \int i_3 dt + L_2 \frac{di_2}{dt} + R_1 i_1 = e_1 \end{cases}$$

## 2.2. Для комплексов (символическая форма):

Связь между комплексами токов и напряжений на отдельных элементах имеет вид:

для активного сопротивления:

$$\underline{U} = R \underline{I}$$

для индуктивности:

$$\underline{U} = j\omega L \underline{I} = jX_L \underline{I}$$

для ёмкости:

$$\underline{U} = \frac{1}{j\omega C} \underline{I} = -jX_C \underline{I}$$

уравнение для узла а:

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$$

уравнение для левого контура akba:

$$-jX_{L2} \underline{I}_2 + jX_{L4} \underline{I}_1 + R_1 \underline{I}_2 = \underline{E}_1$$

уравнение для правого контура amnbka:

$$-(-jX_{C3} \underline{I}_3) + jX_{L2} \underline{I}_2 = -\underline{E}_3$$

Получаем систему 3 уравнений с 3 неизвестными токами:  $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3$ :

$$\begin{cases} \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0 \\ -jX_{L2} \underline{I}_2 + jX_{L4} \underline{I}_1 + R_1 \underline{I}_2 = \underline{E}_1 \\ -(-jX_{C3} \underline{I}_3) + jX_{L2} \underline{I}_2 = -\underline{E}_3 \end{cases}$$

## 3. ОПРЕДЕЛИТЬ КОМПЛЕКСЫ ТОКОВ В ВЕТВЯХ

Поскольку данная цепь (рис. 1) имеет 2 узла (а и б), для её расчёта воспользуемся методом двух узлов.

В общем случае уравнение для комплекса межузлового напряжения имеет вид:

$$\underline{U}_{ab} = \frac{\sum_k \frac{\pm \underline{E}_k}{\underline{Z}_k}}{\sum_n \frac{1}{\underline{Z}_n}}$$

где в числителе стоит сумма по всем активным ветвям, а в знаменателе – по всем ветвям. Знак «+» в числителе выбирается, если ЭДС направлена против межузлового напряжения  $\underline{U}_{ab}$ .

Для рассматриваемой цепи (рис. 1) получим:

$$\underline{U}_{ab} = \frac{\frac{E_1}{Z_1} + \frac{E_3}{Z_3}}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}}$$

Подставляя числовые значения, получим:

$$\underline{U}_{ab} = -96,1 - 54,8j$$

Токи в ветвях найдём по закону Ома для активной ветви:

$$\underline{I}_1 = \frac{E_1 - \underline{U}_{ab}}{Z_1} = 0,693 - 0,501j$$

$$\underline{I}_2 = \frac{E_5 - \underline{U}_{ab}}{Z_2} = 0,235 - 0,412j$$

$$\underline{I}_3 = \frac{E_3 - \underline{U}_{ab}}{Z_3} = -0,927 + 0,913j$$

## 4. ОПРЕДЕЛИТЬ ПОКАЗАНИЕ ВАТТМЕТРА ДВУМЯ СПОСОБАМИ

### 4.1. Определить показание ваттметра с помощью выражения для комплексов тока и напряжения на ваттметре

Активная мощность  $P$  двухполюсника, характеризуемого комплексом тока  $\underline{I}$  и комплексом напряжения  $\underline{U}$ , определяется выражением:

$$P = \operatorname{Re}(\underline{U} \cdot \underline{I}^*)$$

где  $\underline{I}^*$  – сопряжённый комплекс тока,  $\operatorname{Re}Z$  – действительная часть числа  $Z$ .

Ваттметр на рис. 1 включён так, что измеряет активную мощность участка (двухполюсника), расположенного справа от ваттметра. Комплекс тока этого двухполюсника  $\underline{I}_1$ , комплекс напряжения  $\underline{U}_{ab}$ .

Подставив числовые значения, получим:

$$P = \operatorname{Re}((-96,1 - 54,8j) \cdot (0,693 + 0,501j)) = -39,2 \text{ (Вт)}$$

### 4.2. Определить показание ваттметра по формуле $UI \cos \varphi$ :

Стрелка ваттметра отклоняется на величину, равную  $UI \cos \varphi$ , где  $U$  – действующее напряжение на обмотке напряжения ваттметра,  $I$  – действующее значение тока, втекающего в обмотку тока ваттметра,  $\varphi$  – угол сдвига фаз между током и напряжением.

В рассматриваемом случае (рис. 1) напряжение на обмотке напряжения ваттметра  $u_{ab}$ , ток, втекающий в обмотку тока  $i_1$ . Действующие значения:

$$U_{ab} = |\underline{U}_{ab}| = |-96,1 - 54,8j| = 110,6 \text{ (В)}$$

$$I_1 = |I_{\underline{1}}| = |0,693 - 0,501j| = 0,855 \text{ (A)}$$

Угол сдвига фаз между током и напряжением  $\varphi$  равен разности начальных фаз напряжения и тока:

$$\varphi = \psi_{U_{ab}} - \psi_{I_1} = \arctg\left(\frac{\text{Im}(U_{ab})}{\text{Re}(U_{ab})}\right) - \arctg\left(\frac{\text{Im}(I_1)}{\text{Re}(I_1)}\right) = 245^\circ$$

Тогда активная мощность:

$$P = U_{ab} \cdot I_1 \cdot \cos \varphi = 110,6 \cdot 0,855 \cdot \cos 245^\circ = -39,2 \text{ (Вт)}$$

**4.3. На векторной диаграмме тока и напряжения ваттметра указать угол  $\varphi = \psi_U - \psi_I$ .**

На комплексной плоскости построим векторы  $U_{ab}$  и  $I_1$ .

Исходя из величин действующих значений  $U_{ab}$  и  $I_1$ , выберем следующие масштабы для векторов напряжения и тока:

$$m_I = 0,1 \frac{\text{A}}{\text{см}}; m_U = 10 \frac{\text{В}}{\text{см}}$$

Векторная диаграмма изображена на рис. 2.

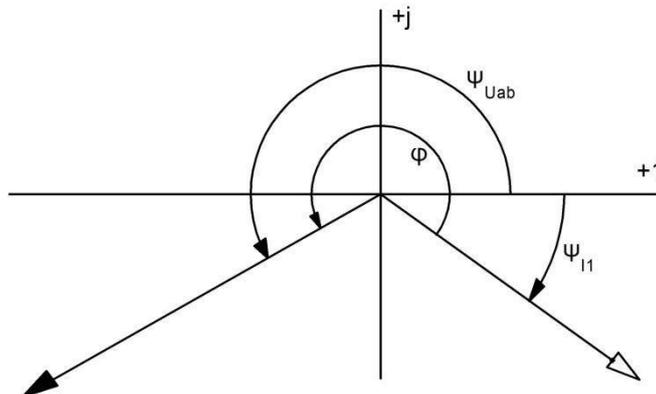


Рис. 2.

## 5. ПОСТРОИТЬ ВЕКТОРНУЮ ТОПОГРАФИЧЕСКУЮ ДИАГРАММУ ТОКОВ И НАПРЯЖЕНИЙ

Векторная топографическая диаграмма токов и напряжений – это изображение на комплексной плоскости векторов всех токов и напряжений на всех элементах цепи. Причём векторы напряжений должны быть расположены в том же порядке, что и элементы цепи. Рекомендуется сначала разместить на комплексной плоскости точки, соответствующие комплексным потенциалом всех точек цепи, а потом соединить соседние точки. Тогда каждый отрезок диаграммы будет соответствовать элементу цепи.

Выберем за уровень отсчёта потенциала точку  $b$  на рис. 1:  $\varphi_b = 0$ .

Тогда потенциалы остальных точек могут быть найдены путём подсчёта изменения потенциала при движении от точки  $b$  (или от других точек с известным потенциалом) к этим точкам. При выборе исходной точки и пути можно руководствоваться простотой расчётов.

$$\varphi_a = \varphi_b + \underline{U}_{ab} = \underline{U}_{ab} = -96,1 - 54,8j$$

$$\varphi_n = \varphi_b - jX_{L4} \cdot I_1 = -jX_{L4} \cdot I_1 = -79,4 - 109,7j$$

$$\varphi_m = \varphi_a - \underline{E}_1 = \underline{U}_{ab} - \underline{E}_1 = -108,5 - 88,7j$$

$$\varphi_k = \varphi_a - \underline{E}_3 = \underline{U}_{ab} - \underline{E}_3 = -30,3 - 30,8j$$

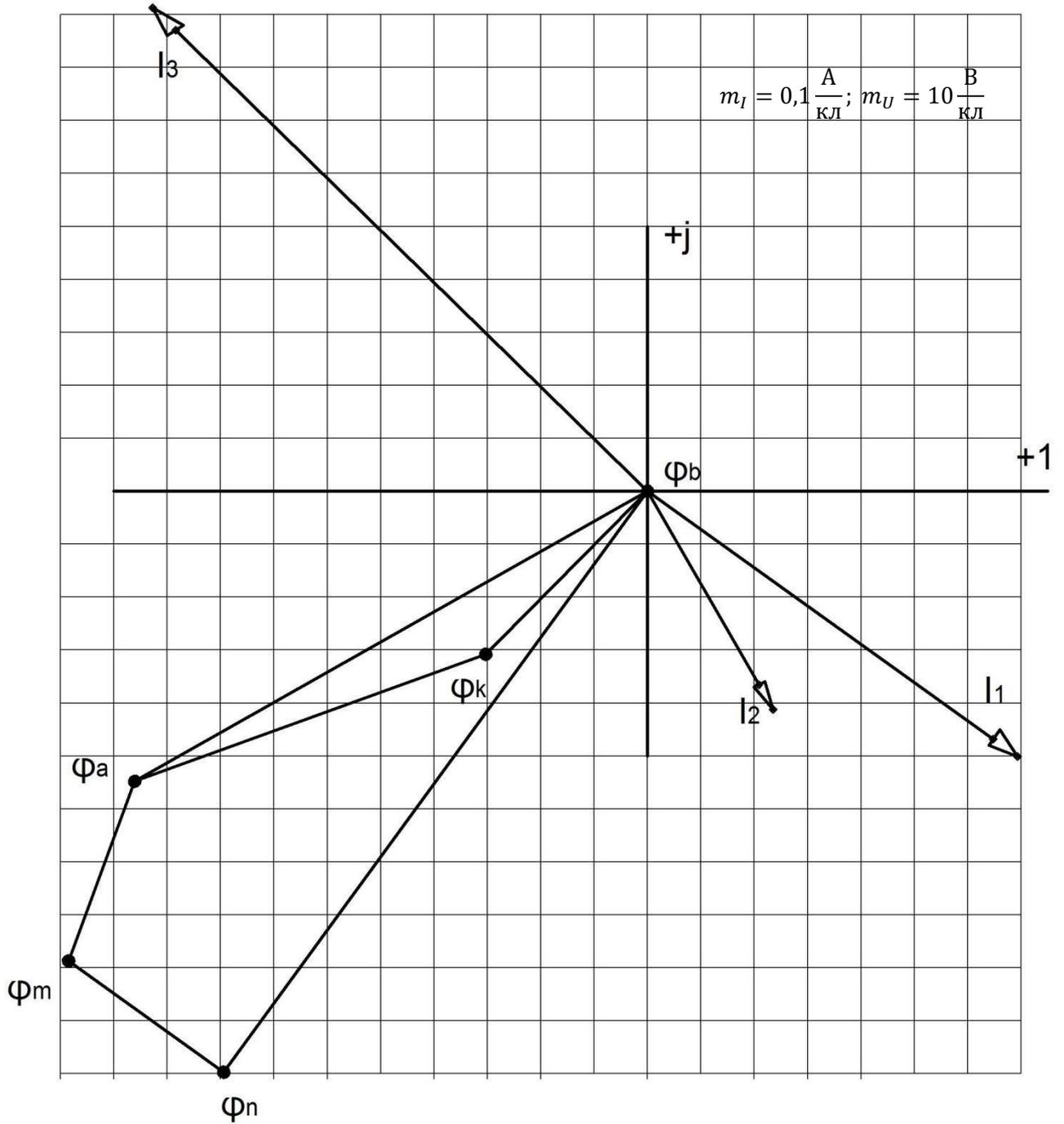


Рис. 3.

## 6. ЗАПИСАТЬ ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ МГНОВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ТОКА $i_1$ И ПОСТРОИТЬ ГРАФИК ЗАВИСИМОСТИ $i_1(\omega t)$ В ИНТЕРВАЛЕ ОТ 0 ДО $2\pi$ .

Выражение для мгновенного значения тока имеет вид:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_1)$$

где  $I_m = \sqrt{2}I$  – амплитуда тока;  $I_m = \sqrt{2} \cdot 0,855 = 1,209$  (А);

$I$  – действующее значение;  $I_1 = 0,855$ ;  $\omega = 2\pi f$  – угловая частота;

$\psi_1$  – начальная фаза тока;  $\psi_{11} = \operatorname{arctg} \frac{-0,501}{0,693} = -0,626$  (рад).

**Замечание:** если бы действительная часть тока была меньше нуля:  $\operatorname{Re}I_1 < 0$ , тогда к начальной фазе необходимо было бы добавить  $\pi$ .

Итак, получаем:

$$i_1 = 1,209 \sin(\omega t - 0,626)$$

График этой функции имеет вид:

