

## ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУХПОЛЮСНИКОВ В ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

**Цель работы** - освоение приемов экспериментального и аналитического определения эквивалентных сопротивлений (проводимостей) двухполюсников в цепи синусоидального тока с использованием символического (комплексного) метода расчета; построение векторных и топографических диаграмм.

### 1. СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

На основе теории синусоидальных переменных токов известен аналитический метод определения функций, выражающих токи и напряжения в простых цепях. Применительно к сложным, цепям этот метод сопряжен с громоздкими операциями над тригонометрическими функциями. Известно, что ряд задач по расчету цепей может быть решен с помощью векторных диаграмм. Геометрические операции над векторами просты и наглядны, но они недостаточно точны. Этот недостаток может быть исключен, если векторы и соответствующие им синусоидальные функции представлять комплексными числами. В таком случае геометрические операции заменяются алгебраическими операциями.

Любое комплексное число  $A$  может быть представлено в трех формах:

$\underline{A} = A' + jA''$  - алгебраическая форма;

$\underline{A} = A(\cos \alpha + j \sin \alpha)$  - тригонометрическая форма;

$\underline{A} = A e^{j\alpha}$  - показательная форма.

Каждому комплексному числу соответствует на комплексной (гауссовой) плоскости, (рис.1) вполне определенная и единственная точка, а, следовательно, и единственный вектор, проведенный из начала координат в эту точку.

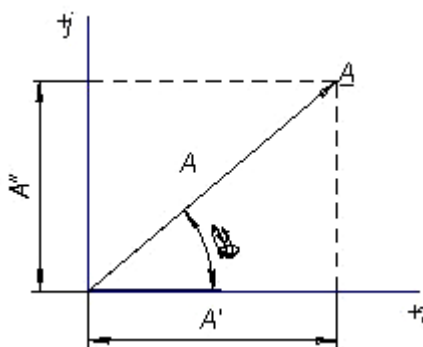


Рис. 1. Комплексное число на комплексной плоскости

Для перехода от одной формы записи комплексного числа к другим формам используются следующие соотношения:

$$A' = A \cos \alpha, \quad (1)$$

$$A'' = A \sin \alpha, \quad (2)$$

$$A = \sqrt{A'^2 + A''^2}, \quad (3)$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{A''}{A'} = \arccos \frac{A'}{A} = \arcsin \frac{A''}{A}, \quad (4)$$

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha \quad (\text{формула Эйлера}).$$

В приведенных выражениях  $e$  - основания натуральных логарифмов;  $j = \sqrt{-1}$ ;  $A$  - модуль комплексного числа;  $A'$  и  $A''$  - вещественная и мнимая части комплексного числа;  $\alpha$  - аргумент комплексного числа;  $e^{j\alpha}$  - оператор поворота вектора на угол  $\alpha$ . В электротехнике, как показано на рис.1, принято располагать ось  $+j$  сдвинутой на  $90^\circ$  от оси  $+1$  в направлении против вращения стрелки часов. В том же направлении отсчитываются от оси  $+1$  положительные значения угла  $\alpha$ .

Пользуясь соотношениями (1)-(4), нетрудно получить следующие равенства:

$$e^{j90} = j, \quad e^{-j90} = -j, \quad e^{\pm j180} = -1, \quad e^{j360} = e^{j0} = 1.$$

Следует иметь в виду, что  $\operatorname{tg} \alpha$  в формуле (4) не определяет угол  $\alpha$  однозначно. Угол уточняется сопоставлением знака  $\operatorname{tg} \alpha$  со знаками  $\sin \alpha$  или  $\cos \alpha$ .

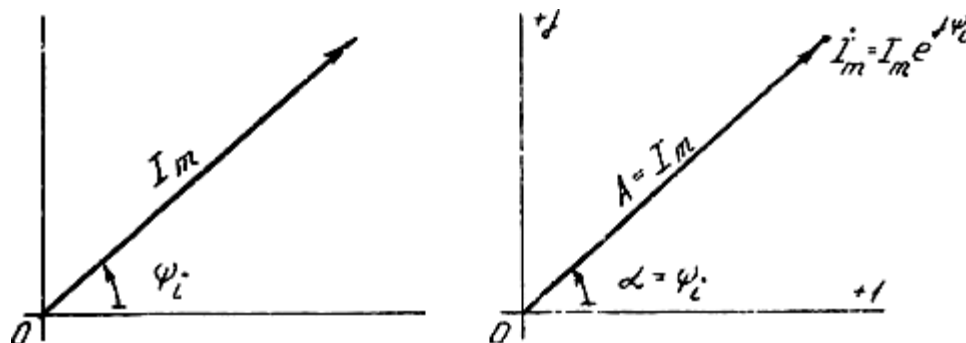


Рис. 2. Вектор на комплексной плоскости

В основах теории переменных токов для представления синусоидальных функций использовались неподвижные или вращающиеся с угловой скоростью  $\omega$  векторы в декартовой плоскости. Для перехода к комплексной плоскости (рис.2), в соответствии с изложенным выше, ось вещественных должна быть направлена по оси абсцисс, а ось мнимых - по оси ординат. Тогда в комплексной плоскости неподвижный вектор, изображающий, например, синусоидальный ток, есть комплексное число с модулем, равным амплитуде синусоидальной функции, и аргументом, равным ее начальной фазе, т.е.  $\dot{I}_m = I_m e^{j\psi_i}$ . Такое комплексное число носит название комплексной амплитуды тока.

Как в аналитическом, так и в комплексном методе, наибольший практический интерес представляют величины в  $\sqrt{2}$  раз меньшие амплитуд. Комплексные величины (5) называют соответственно комплексными действующими значениями тока и напряжения:

$$\dot{I} = \frac{\dot{I}_m}{\sqrt{2}} = I e^{j\psi_i}, \quad \dot{U} = \frac{\dot{U}_m}{\sqrt{2}} = U e^{j\psi_u} \quad (5)$$

Следует обратить внимание, что допускается для обозначения комплексных амплитудных и действующих значений величин, являющихся синусоидальными функциями времени, взамен способов, указанных выше,

над основным обозначением ставить точку. Именно такое обозначение и распространено в электротехнике.

Вращающемуся вектору на комплексной плоскости соответствует комплексное число с постоянным модулем и переменным аргументом, например  $U_m e^{j(\omega t + \psi_u)}$  (для вектора, изображающего синусоидальное напряжение). Такое комплексное число называют символическим изображением **синусоидальной функции** или ее **комплексным мгновенным значением**. Представим его в алгебраической форме (6):

$$U_m e^{j(\omega t + \psi_u)} = U_m \cos(\omega t + \psi_u) + j U_m \sin(\omega t + \psi_u). \quad (6)$$

Получаем: синусоидальная функция (в некоторых учебниках ее при этом называют **оригиналом**) может быть определена как мнимая часть ее символического изображения, взятая без  $j$ ,

В целях сокращения записи рассмотренных соотношений используется знак  $\leftrightarrow$ , который читается "соответствует" или "изображает" (7):

$$\begin{aligned} u &= U_m \sin(\omega t + \psi_u) \leftrightarrow U_m e^{j(\omega t + \psi_u)} \\ i &= I_m \sin(\omega t + \psi_i) \leftrightarrow I_m e^{j(\omega t + \psi_i)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Знак  $\leftrightarrow$  может быть поставлен также между комплексной амплитудой и синусоидальной функцией (8);

$$e = E_m \sin(\omega t + \psi_e) \leftrightarrow E_m e^{j\psi_e}. \quad (8)$$

Ниже приводятся основные формулы, применяемые при расчете цепей синусоидального тока комплексным методом и подробно излагаемые в лекционной части курса.

1. Символическое изображение производной синусоидальной функции:

$$\frac{di}{dt} \leftrightarrow j\omega I_m e^{j(\omega t + \psi_i)}.$$

2. Символическое изображение интеграла синусоидальной функции (с учетом того, что постоянная интегрирования равна нулю):

$$\int i \, dt \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} e^{j(\omega t + \psi_i)}.$$

3. Контурное уравнение для последовательного соединения приемников  $R$ ,  $L$ ,  $C$ , подключенного к источнику синусоидального напряжения  $u$ . Закон Ома в комплексной форме:

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i \, dt = u.$$

Это же уравнение в комплексной форме:

$$RI_m e^{j(\omega t + \psi_i)} + j\omega LI_m e^{j(\omega t + \psi_i)} + \frac{1}{j\omega C} I_m e^{j(\omega t + \psi_i)} = U_m e^{j(\omega t + \psi_u)}.$$

После сокращения на  $e^{j\omega t}$ :

$$\dot{I}_m (R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}) = \dot{U}_m.$$

4. Комплексное сопротивление цепи:

$$\underline{z} = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = R + j\omega L - j \frac{1}{\omega C}.$$

где  $R$ ,  $j\omega L$ ,  $-j\frac{1}{\omega C}$  - сопротивления элементов  $R$ ,  $L$ ,  $C$  в комплексной форме;

$$\underline{z} = Ze^{j\varphi} = Z \cos \varphi + jZ \sin \varphi = R + jX.$$

5. Комплексная проводимость цепи:

$$\underline{y} = \frac{\underline{I}_m}{\underline{U}_m} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{1}{Ze^{j\varphi}} = Y \cos \varphi - jY \sin \varphi = g - jb.$$

Следует обратить внимание на знак «-» перед реактивной проводимостью.

6. Комплексное сопротивление последовательного соединения участков:

$$\underline{z} = \sum_k \underline{z}_k = \sum_k R_k + j \sum_k X_k.$$

7. Комплексная проводимость параллельного соединения участков:

$$\underline{y} = \sum_k \underline{y}_k = \sum_k g_k + j \sum_k b_k.$$

8. Комплексное сопротивление участков с комплексными сопротивлениями  $\underline{z}_1$  и  $\underline{z}_2$  соединенных параллельно:

$$\underline{z} = \frac{\underline{z}_1 \underline{z}_2}{\underline{z}_1 + \underline{z}_2}.$$

Содержание п.п.3-8 позволяет заключить, что определение комплексных сопротивлений и проводимостей, а также комплексных действующих значений (амплитуд) токов и напряжений формально то же, что и при расчете простых цепей постоянного тока. Следовательно, пользуясь перечисленными комплексными величинами, можно выполнять расчет токов и напряжений исследуемой простой цепи, пользуясь всеми приемами, известными из теории цепей постоянного тока. Заключительным этапом такого расчета будет переход от найденных комплексных амплитуд или действующих значений токов и напряжений к соответствующим синусоидальным функциям.

Векторная диаграмма на комплексной плоскости, как следует из рис.1, 2, строится по комплексным числам, выражающим токи и напряжения. Пример построений по числовым данным показан в приложении на рис.10,а, 12.

Топографическая диаграмма – это особое взаимное расположение векторов на векторной диаграмме, которое будет широко использоваться в одном из последующих основных разделов курса, но с которым необходимо познакомиться первоначально на примере простой цепи.

Физический смысл топографической диаграммы состоит в следующем. Если потенциал одной из точек цепи принять равным нулю, то потенциалы остальных точек, изменяющиеся по закону синуса, могут быть представлены векторами. Последние, в свою очередь, могут быть получены с помощью векторов падений напряжения на участках цепи. Итак, понятие топографическая диаграмма относится только к векторам напряжений, векторы токов могут быть нанесены на нее как вспомогательные.

Определение топографической диаграммы не стандартизировано, поэтому в литературе встречается редко и в различной редакции. Наиболее рациональное следующее определение; векторная диаграмма электрической цепи может быть названа топографической, если векторы напряжений и ЭДС

на участках пристроены один к другому так, что начало и конец каждого из векторов выражают потенциалы соответствующих точек цепи.

Примеры топографических диаграмм с формулами, поясняющими определение потенциалов, даны в разделе 5. Как следует из формул и построений, потенциалы удобно определять (как аналитически, так и графически), обходя цепь в направлении, противоположном направлению тока.

## 2. ПРОГРАММА РАБОТЫ

1. Определение параметров (комплексного, активного и реактивного сопротивлений; комплексной, активной и реактивной проводимостей) каждого из четырех заданных приемников - двухполюсников.
2. Определение тока, напряжения и сдвига их по фазе для каждого из четырех приемников, соединенных последовательно. Построение векторной диаграммы токов и напряжений на комплексной плоскости.
3. Определение тока в неразветвленной части цепи и сдвига его по фазе по отношению к напряжению при параллельном соединении четырех приемников. Расчет токов в приемниках. Построение векторной диаграммы напряжения и токов на комплексной плоскости.
4. Расчет токов и напряжений на участках цепи со смешанным соединением трех приемников. Экспериментальное определение напряжений на участках и сдвига их по фазе по отношению к току неразветвленной части цепи. Построение векторной и топографической диаграммы на комплексной плоскости.

## 3. СХЕМЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ И ТАБЛИЦЫ ДАННЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

**П.1.2** Исследования проводятся по схеме последовательного соединения приемников (см. рис.3). Результаты наблюдений заносятся в табл.1 и 2.

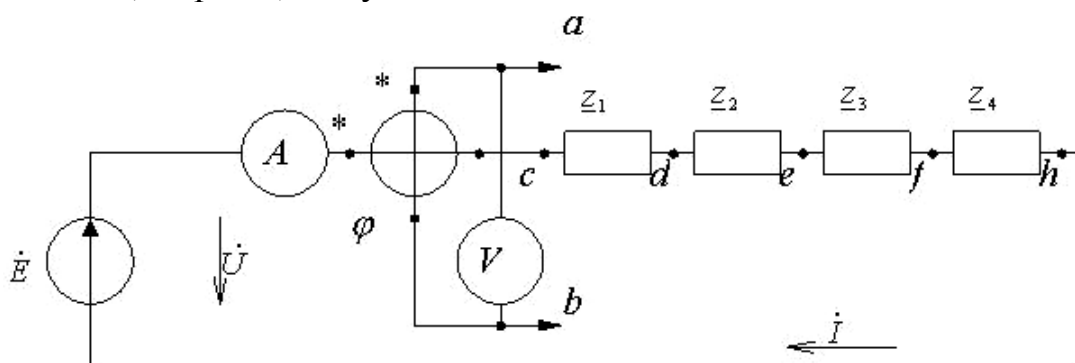


Рис. 3. Последовательное соединение приемников

Примеры расчетов к табл.1 и последующим таблицам даны в приложении.

Таблица 1

Приемник	Показания приборов			Результаты расчетов	
	$U, В$	$I, А$	$\varphi, \text{град}$	$\underline{z} = \dot{U}/\dot{I}, \text{Ом}$	$\underline{y} = \dot{I}/\dot{U}, \text{См}$
$\underline{z}_1$					

$z_2$					
$z_3$					
$z_4$					

Таблица 2

Показания приборов											Результаты расчетов	
$I$	$U$	$U_1$	$U_2$	$U_3$	$U_4$	$\varphi$	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\varphi_4$	$\underline{z} = \sum_{k=1}^4 \underline{z}_k$	$\dot{U} = \dot{I} \cdot \underline{z}$
A	В					град						

Примечание: при выполнении расчетов начальная фаза тока принимается равной нулю.

Фазометр в данном случае используется не только для измерения сдвига фаз между напряжением на зажимах источника ЭДС и током, но и между напряжениями на отдельных участках (приемниках) и током. При измерении сдвига фаз проводник  $a$  (соединенный с зажимом фазометра, обозначенный звездочкой) следует подключать к началу исследуемого участка, т.е. к зажиму, в который входит ток. Последнее замечание относится также к эксперименту по П.4 программы. Следует обратить внимание, что в данном эксперименте, а также в эксперименте по п.4 зажимы фазометра, обозначенные звездочками, не соединяют перемычкой.

**П.3** Исследования проводятся по схеме параллельного соединения приемников (рис.4). Результаты наблюдений заносятся в табл.3.

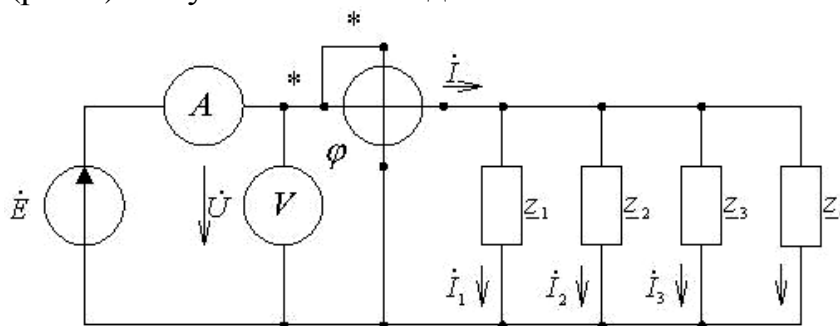


Рис. 4. Параллельное соединение приемников

Таблица 3

Показания приборов			Результаты расчетов						
$U$	$I$	$\varphi$	$i_1$	$i_2$	$i_3$	$i_4$	$y$	$i = \dot{U} y$	$i = \sum_{k=1}^4 i_k$
В	А	град							

Примечание: при выполнении расчетов начальная фаза напряжения принимается равной нулю.

**П.4** Исследования проводятся по схеме смешанного соединения трех приемников (рис.5). Результаты наблюдений заносятся в табл.4.

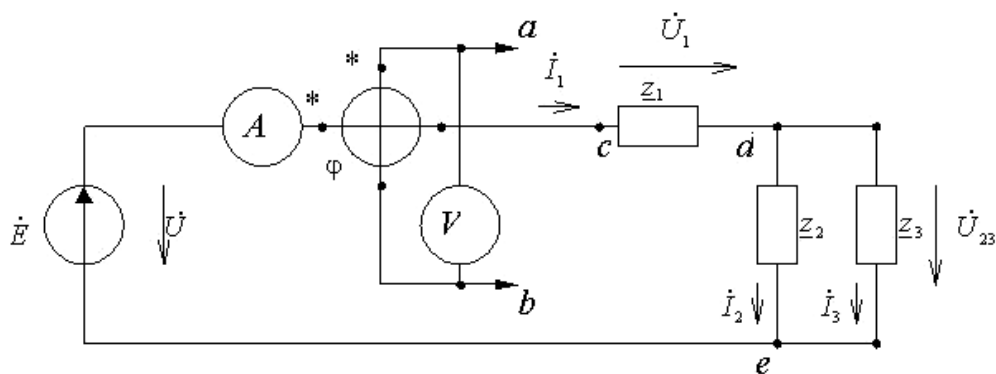


Рис. 5. Смешанное соединение приемников

Таблица 4

Показания приборов							Результаты расчетов				
$I_1$	$U$	$U_1$	$U_{23}$	$\varphi$	$\varphi_1$	$\varphi_{23}$	$\dot{U} = \dot{I}_1(z_1 + z_{23})$	$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 z_1$	$\dot{U}_{23} = \dot{I}_1 z_{23}$	$\dot{I}_2$	$\dot{I}_3$
А	В			град							

Примечания:

- 1) размещение ранее исследованных приемников (П.1) в схеме рис.5 может быть задано преподавателем;
- 2) при расчете токов и напряжений начальную фазу тока  $I_1$  принять равной нулю.

#### 4. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

1. Программа работы.
2. Схемы исследуемых цепей. Таблицу данных наблюдений и расчетов по каждому из пунктов программы, поясненные примерами вычислений. По п.4 программы расчет приводится полностью,
4. Векторные диаграммы по пп.2, 3 и 4 программы.
5. Топографическая диаграмма по п.4 программы

#### 5. ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

##### Пример 1.

В электрической цепи (рис.3) прибора показали:

$$U = 0,1 \text{ В}, I = 10 \text{ А}, \varphi = -30^\circ.$$

Требуется определить комплексные сопротивление и проводимость приемника в показательной и алгебраических формах.

Решение:

$$\underline{z} = \frac{U}{I} e^{j\varphi} = 0,01 e^{-j30} = 0,01 \cos(-30) + j0,01 \sin(-30) = 0,00867 - j0,005, \text{ Ом}$$

$$\underline{y} = \frac{I}{U} e^{-j\varphi} = 100 e^{j30} = 100 \cos(30) + j100 \sin(30) = 86,7 - j50, \text{ См}$$

Пример 2.

Измерения в электрической цепи (рис.3) показали:

Показания приборов										
$I$	$U$	$U_1$	$U_2$	$U_3$	$U_4$	$\varphi$	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\varphi_4$
А	В					град				
2	11,5	5	8,66	5,77	11,5	-30	0	90	-30	-90

Написать комплексные действующие значения тока и напряжений, приняв начальную фазу тока равной нулю. Построить векторную диаграмму тока и напряжений. Построить топографическую диаграмму, приняв потенциал точки  $h$  равным нулю.

Решение:

$$\dot{I} = 10; \dot{U} = U e^{j\varphi} = 11,5 e^{-j30}; \dot{U}_1 = 5; \dot{U}_2 = 8,66 e^{j90}; \dot{U}_3 = 5,77 e^{-j30}; \dot{U}_4 = 11,7 e^{-j90}.$$

Векторная и топографическая диаграммы приведены на рис.6.

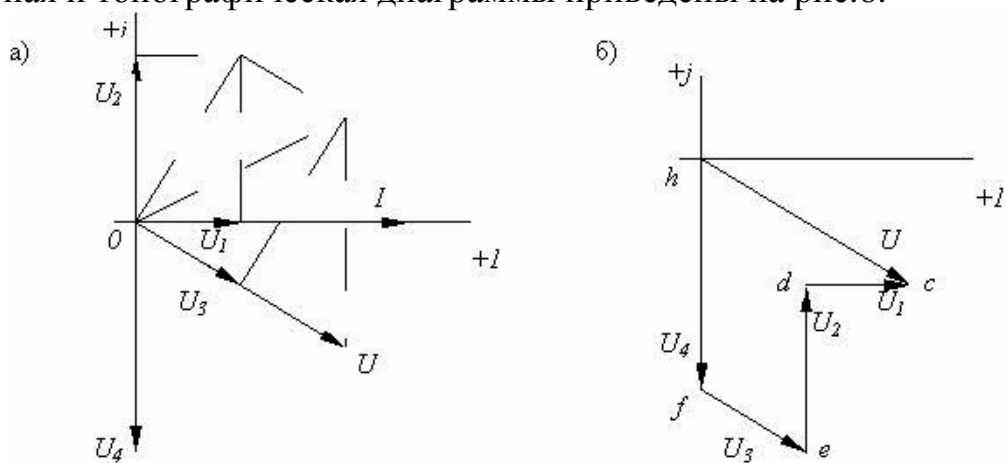


Рис.6. Векторная и топографическая диаграммы для последовательного соединения приемников

## 6. ЛИТЕРАТУРА

1. Нейман Л.Р., Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники, Т.1.-Л.: Энергоиздат, 1981.
2. Зевеке Г.В., Ионкин П.А., Нетушил А.В. Основы теории цепей. -М.: Энергия, 1975.