

## ГЛАВА ВТОРАЯ

### ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

#### 2.1. Краткие сведения из теории [1]

Переходные, или неустановившиеся процессы, имеют место при переходе от одного установившегося состояния электрической цепи к другому и возникают при изменении величины напряжения или параметров цепи вследствие изменения конфигурации цепи.

Установившимися режимами, как правило, являются режим периодического синусоидального тока, режим постоянного тока или режим отсутствия тока в цепи.

Длительность переходных процессов обычно невелика, порядка долей секунды, и зависит от численных значений параметров электрической цепи. Изучение этих процессов представляет интерес, поскольку они часто сопровождаются возникновением значительных напряжений и токов по сравнению с этими же величинами при установившемся режиме. Знание законов протекания переходных процессов позволяет решать вопросы, связанные с состоянием электрических цепей установок, где переходные процессы представляют собой нормальный режим.

Переходные процессы возникают вследствие невозможности мгновенного изменения запасов энергии электрического и магнитного полей, связанных с соответствующими элементами электрической цепи, характеризуемыми сосредоточенными параметрами  $C$  и  $L$

$$W_{\text{э}} = \frac{Cu_C^2}{2}, W_M = \frac{Li_L^2}{2}$$

Переходные процессы в цепи с элементами, характеризуемыми сосредоточенными параметрами  $r$  и  $L$  (рис.2.1), описываются уравнением, составленным по второму закону Кирхгофа

$$u_L + ri = U \text{ или } L \frac{di}{dt} + ri = U$$

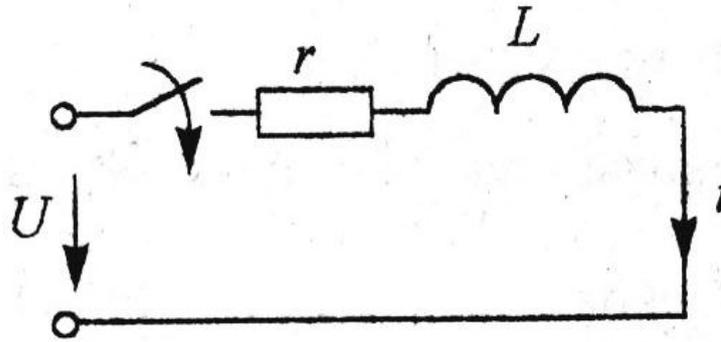


Рис.2.1

Таким образом, отыскание тока как функции времени есть решение дифференциального уравнения.

Решение есть сумма частного решения неоднородного дифференциального уравнения

$$L \frac{di}{dt} + ri = U \rightarrow i = \frac{U}{r}$$

плюс общее решение однородного уравнения

$$L \frac{di}{dt} + ri = 0 \rightarrow i = Ae^{pt},$$

где  $A$  и  $p$  – некоторые постоянные, не зависящие от времени. Следовательно, решение дифференциального уравнения запишется в виде выражения для полного тока

$$i = \frac{U}{r} + Ae^{pt}$$

Частное решение дифференциального уравнения называют принужденной составляющей. Она представляет собой составляющую, изменяющуюся с той же частотой, что и действующая в схеме принуждающая ЭДС.

Если в схеме действует синусоидальная ЭДС частотой  $\omega$ , то и принужденная составляющая также является синусоидальным током с частотой  $\omega$ . В цепи синусоидального тока принужденная составля-

ющая определяется с помощью символического метода.

Если в схеме действует источник постоянной ЭДС, то принужденная составляющая есть постоянный ток и его находят с помощью методов расчета цепей постоянного тока. Необходимо помнить: постоянный ток через емкость не проходит, поэтому принужденная составляющая тока в ветви с емкостью равна нулю; падение напряжения на индуктивности от неизменного во времени тока равно нулю.

Общее решение однородного уравнения (уравнение без правой части) называют свободной составляющей, т.е. свободной от вынуждающей силы. Сумма принужденной и свободной составляющих дает действительную величину тока или напряжения.

Законы коммутации.

**Ток через индуктивность не может изменяться скачком.**

Если допустить, что ток через индуктивность может изменяться скачком, то

$$\frac{di}{dt} = \infty$$

тогда уравнение

$$L \frac{di}{dt} + ri = U$$

превратится в

$$\infty + ri = U$$

и второй закон Кирхгофа выполняться не будет. Напряжение на индуктивности может изменяться скачкообразно. Это не противоречит второму закону Кирхгофа.

**Напряжение на емкости не может изменяться скачком.**

Уравнение по второму закону Кирхгофа для цепи с емкостью (рис. 2.2)

$$u_c + ri = U \quad \text{или} \quad u_c + rC \frac{du_c}{dt} = U .$$

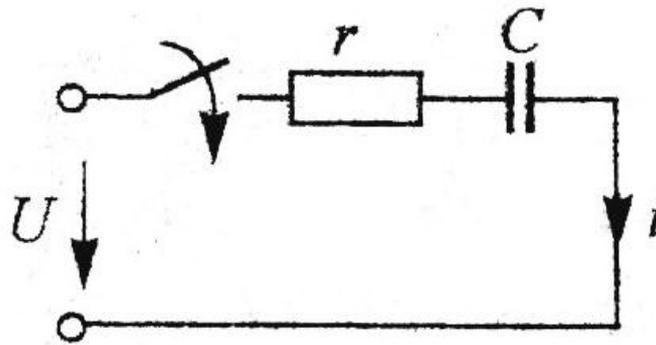


Рис.2.2

Если допустить, что напряжение на емкости может изменяться скачком, то

$$\frac{du_C}{dt} = \infty$$

и уравнение принимает вид

$$u_C + \infty = U.$$

Это противоречит второму закону Кирхгофа.

Из указанных рассуждений следуют два закона коммутации.

**Первый закон коммутации:** ток через индуктивность непосредственно до коммутации равен току через ту же индуктивность непосредственно после коммутации.

**Второй закон коммутации:** напряжение на емкости непосредственно до коммутации и напряжение на ней непосредственно после коммутации равны.

Остальные величины: напряжения на индуктивностях, активных сопротивлениях, токи через емкости и активные сопротивления могут изменяться скачком. Поэтому их значения непосредственно после коммутации часто оказываются неравными их значениям до коммутации.

Значение токов через индуктивности и напряжения на емкостях, известные из докоммутационного режима, называют **независимыми начальными значениями или условиями**. Значения остальных токов и напряжений при  $t = 0+$  в послекоммутационной схеме, определяе-

мые по независимым начальным значениям из законов Кирхгофа, называют **зависимыми начальными значениями или условиями**.

Классический метод расчета переходных процессов.

Для расчета переходных процессов разработаны различные аналитические методы. При классическом методе решение дифференциальных уравнений ведется методами классической математики. При операторном методе расчет переходного процесса переносится в область функций комплексного переменного, в которой дифференциальные уравнения преобразуются в алгебраические.

Классический метод расчета переходных процессов состоит из следующих этапов:

1. Расчет цепи до коммутации в установившемся режиме для определения начальных значений  $i_L(0-)$ ,  $u_C(0-)$ .

2. Расчет цепи после коммутации в установившемся режиме. Определение принужденной составляющей искомого тока  $i_{ip}(t)$ .

3. Составление системы дифференциальных уравнений по I, II законам Кирхгофа относительно мгновенных значений токов цепи. При этом используются равенства:

$$u_R = ri_R, u_L = L \frac{di_L}{dt}, u_C = \frac{1}{C} \int i_C dt$$

4. Составление характеристического уравнения для системы однородных дифференциальных уравнений методом приведения к одному уравнению высокого порядка, методом определителя или методом операторного сопротивления (проводимости).

5. Решение характеристического уравнения и запись свободной составляющей искомого тока в виде, содержащем неизвестные постоянные ( $A_1, A_2$  для цепи с двумя реактивными элементами):

$$i_{св} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

6. Определение зависимых начальных условий через независимые, т. е. переход от значений  $i_L(0-), u_C(0-)$  к значениям  $i(+0), di(+0)/dt$ .

7. Составление уравнений и определение постоянных интегрирования  $A_1, A_2$ , после чего записывается искомый ток в виде

$$i(t) = i_{np}(t) + i_{св}(t).$$

Составление уравнений переходного процесса.

Уравнения для послекоммутационной схемы (рис. 2.3) составляются для полных токов и напряжений по обычным правилам: выбирают произвольно положительные направления токов и составляют уравнения по первому и второму законам Кирхгофа

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0$$

$$i_1 r_1 + L \frac{d i_1}{d t} + i_2 r_2 = E$$

$$i_2 r_2 - \frac{1}{C} \int i_3 d t = 0$$

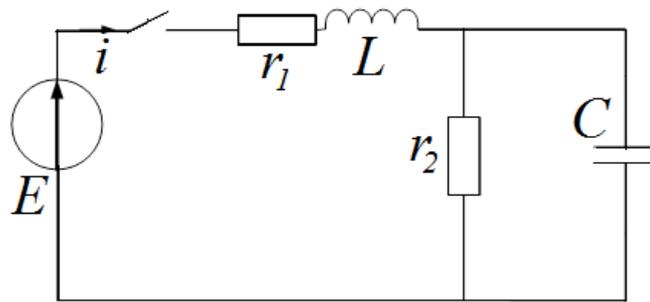


Рис. 2.3

Чтобы перейти к уравнениям для свободных токов освобождают систему от вынуждающих ЭДС

$$i_{1св} - i_{2св} - i_{3св} = 0$$

$$i_{1св} r_1 + L \frac{d i_{1св}}{d t} + i_{2св} r_2 = 0$$

$$i_{2св} r_2 - \frac{1}{C} \int i_{3св} d t = 0$$

Алгебраизация уравнений для свободных токов.

Решением однородного дифференциального уравнения является показательная функция

$$i_{cв} = Ae^{pt},$$

где  $A$  – постоянная интегрирования для каждого тока своя;

$p$ - показатель затухания одинаковый для всех свободных токов.

Найдем производную свободного тока по времени

$$\frac{di_{cв}}{dt} = \frac{d(Ae^{pt})}{dt} = pAe^{pt} = pi_{cв}$$

Найдем интеграл от свободного тока

$$\int i_{cв} dt = \int Ae^{pt} dt = \frac{1}{p} Ae^{pt} = \frac{1}{p} i_{cв}$$

Следовательно, свободное напряжение на емкости равно

$$u_C = \frac{1}{C} \int i_{cв} dt = \frac{1}{Cp} i_{cв},$$

а свободное напряжение на индуктивности равно

$$u_L = L \frac{di_{cв}}{dt} = Lpi_{cв}.$$

Подставив полученные выражения в систему дифференциальных уравнений, получим

$$\begin{aligned} i_{1cв} - i_{2cв} - i_{3cв} &= 0 \\ i_{1cв}r_1 + Lp i_{cв} + i_{2cв}r_2 &= 0 \\ i_{2cв}r_2 - \frac{1}{Cp} i_{3cв} &= 0 \end{aligned}$$

Данная система уравнений, не содержащая дифференциалов и интегралов, есть результат алгебраизации дифференциальных уравнений.

Подключение неразветвленной цепи с индуктивным и резистивным элементами к источнику постоянной ЭДС (рис. 2.1).

Составляем уравнение по второму закону Кирхгофа

$$L \frac{di}{dt} + ri = E$$

Находим принужденную составляющую полного тока. Она равна

установившемся току после окончания переходного процесса

$$i_{np} = \frac{E}{r}$$

Записываем уравнение для свободной составляющей тока

$$Lp i_{св} + r i_{св} = 0$$

Уравнение без свободного тока называют характеристическим

$$Lp + r = 0$$

Отсюда находим корень характеристического уравнения, он же показатель затухания

$$p = -\frac{r}{L}$$

Записываем полный ток

$$i = i_{np} + i_{св} = \frac{E}{r} + A e^{-\frac{r}{L}t}$$

Определяем постоянную интегрирования, используя первый закон коммутации

$$i_l(0_-) = i_L(0_+)$$

В докоммутационной схеме ток был равен нулю

$$i_l(0_-) = 0$$

При  $t=0_+$  в послекоммутационной схеме

$$i(0_+) = \frac{E}{r} + A e^{-\frac{r}{L}0} = \frac{E}{r} + A \quad \text{или} \quad 0 = \frac{E}{r} + A$$

Отсюда находим постоянную интегрирования

$$A = -\frac{E}{r}$$

Записываем закон изменения полного тока в цепи

$$i = i_{np} + i_{св} = \frac{E}{r} - \frac{E}{r} e^{-\frac{r}{L}t} = \frac{E}{r} (1 - e^{-\frac{r}{L}t})$$

Закон изменения напряжения на резистивном элементе

$$u_r = ri = E(1 - e^{-\frac{r}{L}t})$$

Закон изменения напряжения на индуктивном элементе

$$u_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{E}{r} \frac{d(1 - e^{-\frac{r}{L}t})}{dt} = L \frac{E}{r} \frac{r}{L} e^{-\frac{r}{L}t} = E e^{-\frac{r}{L}t}$$

Временные графики для мгновенных значений напряжений и тока приведены на рис. 2.4

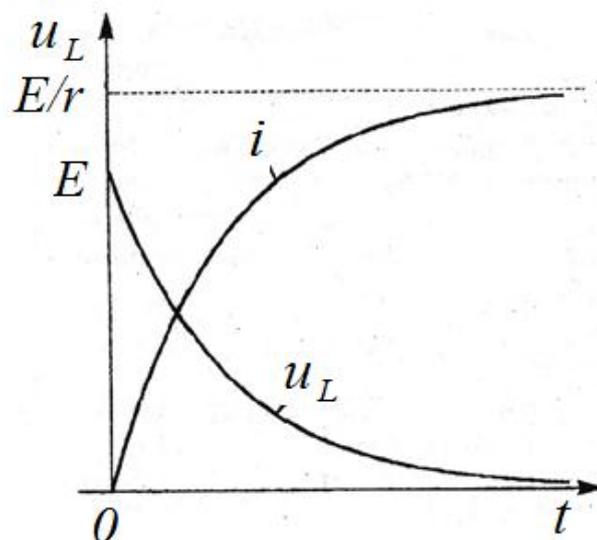


Рис. 2.4

Подключение неразветвленной цепи с емкостным и резистивным элементами к источнику постоянной ЭДС (рис. 2.5).

Составляем уравнение по второму закону Кирхгофа

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E$$

Находим принужденную составляющую напряжения на конденсаторе. Она равна установившемуся значению после окончания переходного процесса

$$u_{np} = E$$

Записываем уравнение для свободной составляющей напряжения

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

Уравнение без свободной составляющей называют характеристическим

$$RCp + 1 = 0$$

Отсюда находим корень характеристического уравнения, он же показатель затухания

$$p = -\frac{1}{RC}$$

Записываем выражение для полного напряжения на конденсаторе

$$u_C = u_{Cnp} + u_{Cсв} = E + Ae^{-\frac{1}{RC}t}$$

Определяем постоянную интегрирования, используя второй закон коммутации

$$u_C(0_-) = u_C(0_+)$$

В докоммутационной схеме напряжение было равно нулю

$$u_C(0_-) = 0$$

при  $t=0_+$  в послекоммутационной схеме

$$u_C(0_+) = E + Ae^{-\frac{1}{RC}0} = E + A \text{ или } 0 = E + A$$

Отсюда постоянная интегрирования равна

$$A = -E$$

Записываем закон изменения полного напряжения на конденсаторе

$$u_C = u_{np} + u_{св} = E - Ee^{-\frac{1}{RC}t} = E(1 - e^{-\frac{1}{RC}t})$$

Закон изменения тока

$$i = C \frac{du_C}{dt} = C \frac{E d(1 - e^{-\frac{1}{RC}t})}{dt} = CE \frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t} = \frac{E}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}$$

Закон изменения напряжения на резистивном элементе

$$u_r = ri = E(1 - e^{-\frac{1}{rC}t})$$

Временные графики для мгновенных значений напряжений и тока приведены на рис. 17

Графики будут меняться при изменении параметров схемы R и C. Величина напряжения от них не зависит. Величина тока обратно пропорциональна сопротивлению R и не зависит от емкости C. Длительность переходного процесса прямо пропорциональна значениям R и C.

Теоретически переходный процесс длится бесконечно долго. Практически переходный процесс заканчивается через  $(3-5)\tau$

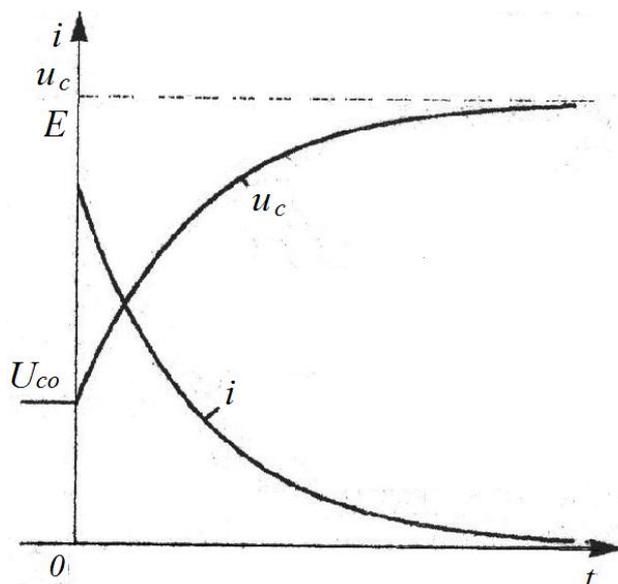


Рис. 2.5

Постоянная времени  $\tau$  – это время, в течение которого свободные составляющие уменьшаются в  $e$ -раз (см. рис. 2.6). Постоянную времени можно определить по известному графику изменения свободной составляющей и  $R=100\text{Ом}$  и  $C=100\text{мкФ}$ ,

$$\tau = R \cdot C = 100 \cdot 100 \cdot 10^{-6} = 0,01\text{с}$$

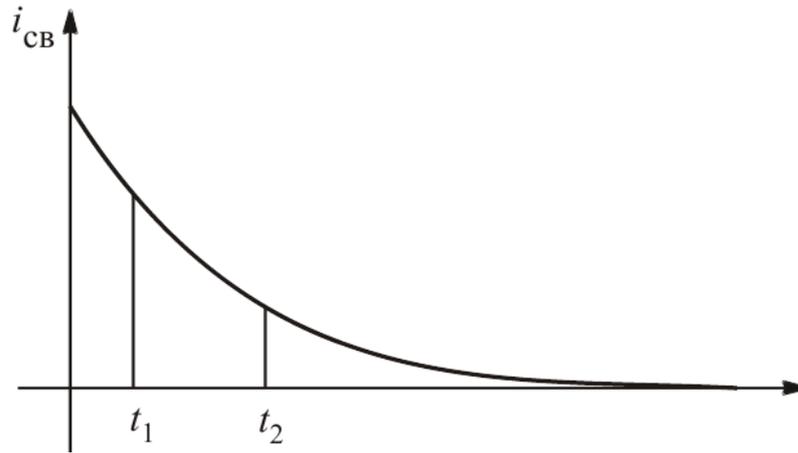


Рис. 2.6

Подключение неразветвленной цепи с индуктивным и резистивным элементами к источнику синусоидального напряжения (рис. 2.1)

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u) .$$

$$L \frac{di_L}{dt} + ri_L = u$$

$$i_L = i_{Lnp} + i_{Lсв}$$

$$I_{Lmnp} = \frac{U_m}{R + j \omega L} = \frac{U_m e^{j \psi_u}}{Z e^{j \varphi}} = I_{Lmnp} e^{j(\psi_u - \varphi)} = I_{Lmnp} e^{j \psi_{np}}$$

$$i_{Lсв} = A e^{pt}$$

$$Lp + R = 0$$

$$p = -\frac{R}{L}$$

$$0 = I_{Lmnp} \sin \psi_{np} + A$$

$$A = -I_{Lmnp} \sin \psi_{np}$$

$$i_L = I_{Lmnp} \sin(\omega t + \psi_{np}) - I_{Lmnp} \sin \psi_{np} e^{-\frac{R}{L}t}$$

График тока  $i$  (см. рис. 2.7) получаем как сумму графиков  $i_{Lnp}$  и  $i_{Lсв}$ . Составляющая тока  $i_{Lnp}$  меняется по синусоидальному закону. На рис. 19 свободная составляющая меняется по закону экспоненты и стремится к нулю.

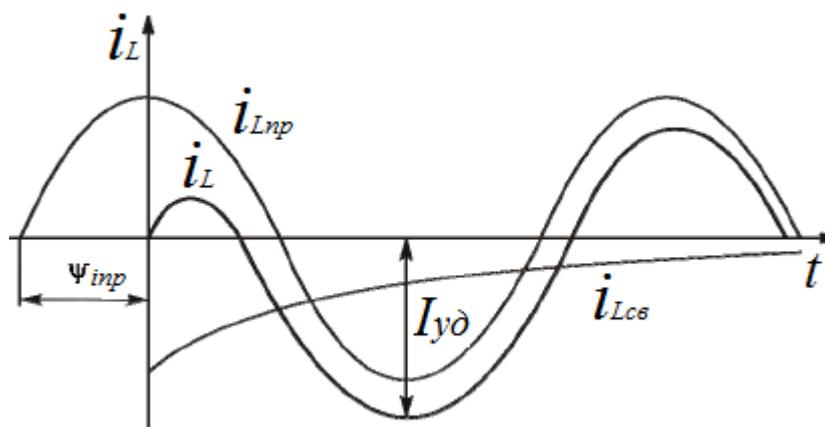


Рис. 2.7

В те промежутки времени, когда  $i_{Lnp}$  и  $i_{Lcs}$  имеют одинаковые знаки, ток  $i_L$  имеет значения, большие задаваемых источником. Говорят об ударном токе  $I_{y\delta}$ .

Рассмотрим, какие процессы могут возникнуть на практике при коммутациях в цепи с катушкой (рис. 2.8).

Ток  $i_L$  не может измениться скачком. В момент, наступивший сразу после коммутации, ток останется тем же, что и до коммутации. На месте разрыва возникает перенапряжение, так как сопротивление воздушного промежутка велико. Это приводит к пробое, появляется искрение (электрическая дуга), портящее оборудование.

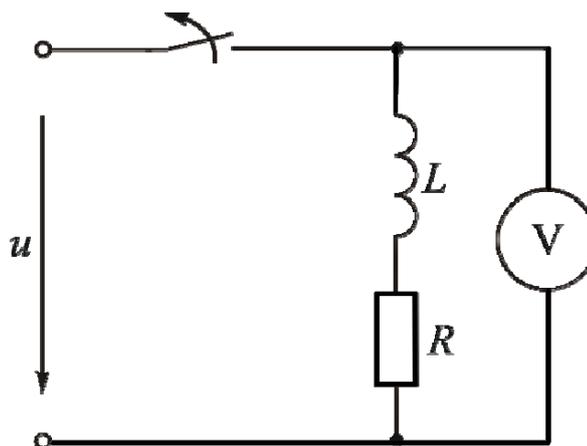


Рис. 2.8

Ситуация ухудшается, если к зажимам индуктивной катушки подключен вольтметр (см. рис. 2.8). Сопротивление вольтметра велико, ток в нем при нормальной работе мал. При размыкании ключа большой ток индуктивной катушки, который не может измениться

скачком, будет замыкаться через вольтметр, сопротивление которого все же меньше, чем у воздушного промежутка. На вольтметре возникает перенапряжение, прибор может выйти из строя. Такое же напряжение будет и на индуктивной катушке, что может привести к пробоем ее изоляции.

Поэтому сначала нужно убрать напряжение либо параллельно подключить ветвь для замыкания тока катушки. Нельзя отключать незашунтированную катушку с током.

Подключение неразветвленной цепи с индуктивным, емкостным и резистивным элементами к источнику постоянной ЭДС (рис. 2.9).

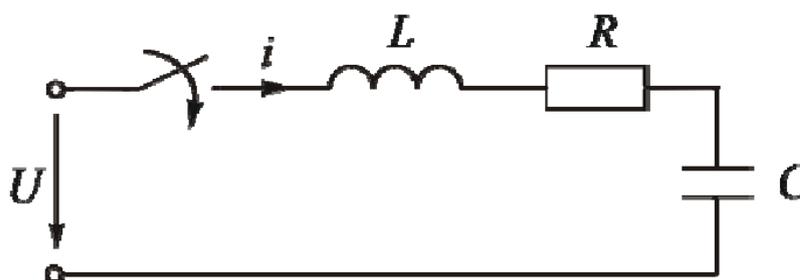


Рис. 2.9

Уравнение электрического состояния

$$u_{Cсв} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

Поскольку ток  $i = i_C = C \frac{du_C}{dt}$ , то

$$\text{получаем } LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + rC \frac{du_C}{dt} + u_C = U$$

дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{r}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = \frac{U}{LC}$$

Будем искать решение в виде

$$u_C = u_{Cнр} + u_{Cсв}$$

После окончания переходного процесса конденсатор зарядится до напряжения источника  $u_{Cнр} = U$

Характеристическое уравнение

$$p^2 + \frac{r}{L}p + \frac{1}{LC} = 0$$

Находим корни

$$p_{1,2} = -\frac{r}{2L} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

Апериодический переходный процесс - корни действительные и разные. Свободная составляющая представляется в виде

$$u_{Cсв} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

При  $t=0+$

$$u_C(0+) = u_{Cнр}(0+) + u_{Cсв}(0+)$$

$$0 = U + A_1 + A_2$$

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{du_{Cнр}}{dt} + \frac{du_{Cсв}}{dt}$$

Уравнение в начальный момент  $t=0+$  имеет вид

$$\frac{i_C(0+)}{C} = p_1 A_1 + p_2 A_2$$

До коммутации ток в цепи не протекал.

$$0 = p_1 A_1 + p_2 A_2$$

Таким образом

$$\begin{cases} 0 = U + A_1 + A_2 \\ 0 = p_1 A_1 + p_2 A_2 \end{cases}$$

Отсюда находим постоянные интегрирования

$$A_1 = \frac{p_2 U}{p_1 - p_2}$$

$$A_2 = -\frac{p_1 U}{p_1 - p_2}$$

Закон изменения напряжения на конденсаторе

$$u_C = U + \frac{U}{p_1 - p_2} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t})$$

Закон изменения тока

$$i = C \frac{du_C}{dt} = \frac{CU}{p_1 - p_2} (p_2 p_1 e^{p_1 t} - p_1 p_2 e^{p_2 t})$$

Поскольку произведение корней равно свободному члену

$$p_1 p_2 = \frac{1}{LC}, \text{ то}$$

$$i = \frac{U}{L(p_1 - p_2)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t})$$

График переходного процесса (рис. 2.10).

В точке перегиба кривой напряжения ток имеет максимальное значение.

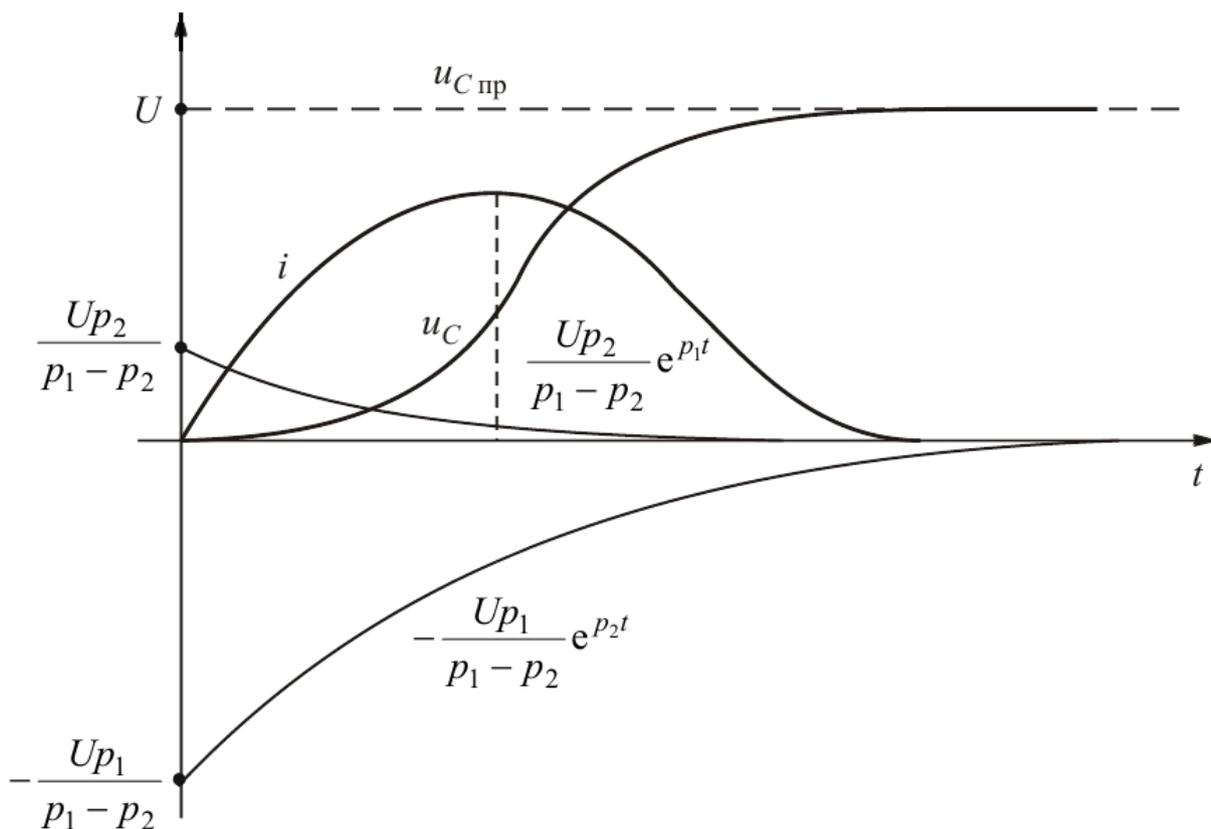


Рис. 2.10

Критический или предельный апериодический переходный процесс – корни действительные и равные.

Свободная составляющая напряжения имеет вид

$$u_{Cсв} = (A_1 + A_2 t)e^{pt}$$

При  $t=0+$

$$0 = U + A_1$$

Второе уравнение в начальный момент времени имеет вид

$$\frac{i_C(0+)}{C} = pA_1 + A_2$$

До коммутации ток в цепи не протекал

$$0 = pA_1 + A_2$$

Таким образом

$$\begin{cases} 0 = U + A_1 \\ 0 = pA_1 + A_2 \end{cases}$$

Отсюда находим постоянные интегрирования

$$A_1 = -U$$

$$A_2 = pU$$

Закон изменения напряжения на конденсаторе

$$u_C = U + (-U + pUt)e^{pt}$$

Закон изменения тока

$$i = C \frac{du_C}{dt} = CpUe^{pt} + Cp(-U + pUt)e^{pt} = Cp^2Ute^{pt}$$

Колебательный переходный процесс - корни комплексные сопряженные  $p_{1,2} = -\delta \pm j \omega$

$\delta$  - коэффициент затухания,

$\omega_0$  - угловая частота собственных колебаний.

Свободная составляющая записывается в виде

$$u_{Cсв} = Ae^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi)$$

Из второго закона коммутации следует

$$0 = U + A \sin \varphi \quad A = -\frac{U}{\sin \varphi}$$

Второе уравнение в начальный момент времени имеет вид

$$\frac{i_C(0+)}{C} = -A \delta \sin \varphi + A \omega \cos \varphi$$

$$\text{Отсюда} \begin{cases} 0 = U + A \sin \varphi \\ 0 = -A \delta \sin \varphi + A \omega \cos \varphi \end{cases}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\delta}$$

Произведение корней равно свободному члену характеристического уравнения:

$$p_1 p_2 = (\delta^2 + \omega_0^2) = \frac{1}{LC}$$

Получаем прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ и углом при } \delta, \text{ равным } \varphi.$$

Отсюда

$$i_1(0_-) = i_2(0_-) = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{120}{50 + 10} = 2A$$

Закон изменения напряжения на конденсаторе

$$u_C = U - \frac{U}{\omega \sqrt{LC}} e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi)$$

Закон изменения тока

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} = \frac{U}{\omega L} e^{-\delta t} \sin \omega t$$

График изменения напряжения и тока (рис. 2.11)

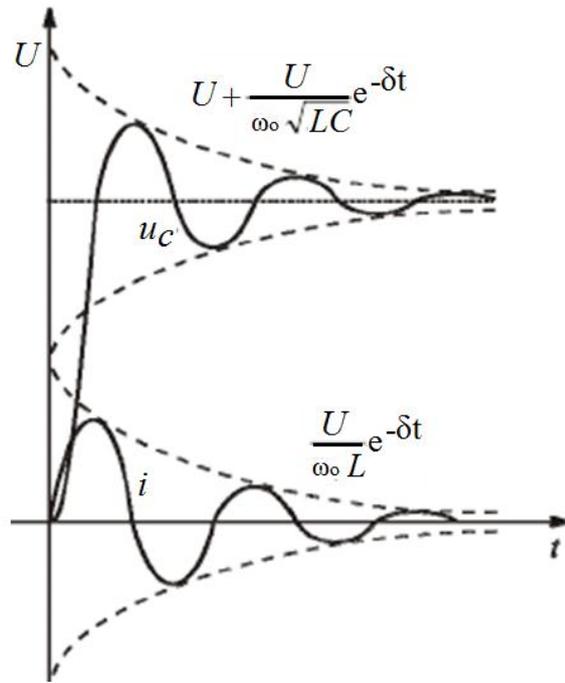


Рис. 2.11

## 2.2. Расчет переходных процессов в цепи с двумя реактивными элементами

В заданной электрической схеме (рис. 2.12) с источником постоянной ЭДС  $E=90$  В и параметрами  $R_1=20$  Ом,  $R=10$  Ом,  $L=10$  мГн,  $C=100$  мкФ происходит коммутация. Определим классическим методом ток в ветви с катушкой индуктивности.

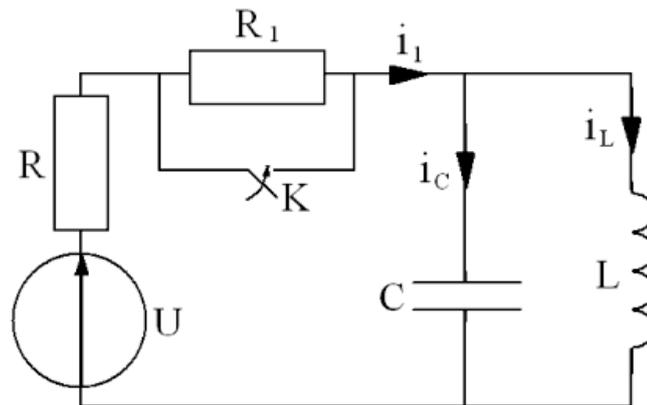


Рис. 2.12

Определим независимые начальные условия

$$i_L(0^-) = i_L(0^+) = \frac{U}{R_1 + R} = \frac{90}{20 + 10} = 3 \text{ A}$$

$$u_C(0-) = 0$$

Т.к. конденсатор включен параллельно катушке индуктивности, а сопротивление катушки индуктивности постоянному току равно 0.

Определим величину принужденного тока для послекоммутационной цепи

$$i_{Lnp} = \frac{U}{R} = \frac{90}{10} = 9A$$

Составим и решим характеристическое уравнение

$$Z_{ex}(p) = R + \frac{Lp \cdot \frac{1}{Cp}}{Lp + \frac{1}{Cp}}; Z_{ex}(p) = 0;$$

$$RLp + \frac{R}{Cp} + \frac{Lp}{Cp} = 0;$$

$$RLCp^2 + Lp + R = 0;$$

$$10 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-4} + 10^{-2} p + 10 = 0;$$

$$10^{-5} p^2 + 10^{-2} p + 10 = 0;$$

$$p = \frac{-10^{-2} \pm \sqrt{10^{-4} - 4 \cdot 10^{-4}}}{2 \cdot 10^{-5}} = \frac{-10^{-2} \pm j1,73 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-5}}$$

$$p_1 = -500 + j866c^{-1}; p_2 = -500 - j866c^{-1}.$$

Корни характеристического уравнения комплексно-сопряженные, следовательно функция свободного тока имеет вид:

$$i_{Cсв} = A \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\delta = 500c^{-1}; \omega = 866 рад/c.$$

Постоянными интегрирования в уравнении будут А и φ.

Составим систему уравнений для определения постоянных интегрирования

$$i_L = i_{Lnp} + i_{Lсв} = 9 + A \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega t + \varphi);$$

$$\frac{di_L}{dt} = A \cdot \omega e^{-\delta t} \cdot \cos(\omega t + \varphi) - \delta \cdot A \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

Независимые начальные условия

$$i_L(0-) = 3 \text{ A}; u_C(0-) = 0; \left( \frac{di_L}{dt} \right)_{t=0} = 0;$$
$$u_C(0+) = u_C(0-) = L \left( \frac{di_L}{dt} \right)_{t=0+}.$$

Решим систему для  $t=0+$

$$\begin{cases} 3 = 9 + A \cdot \sin \varphi \\ 0 = A \cdot \omega \cos \varphi - \delta \cdot A \cdot \sin \varphi \\ -6 = A \cdot \sin \varphi \\ 866A \cdot \cos \varphi = 500A \cdot \sin \varphi \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{866}{500} = 1,732, \quad \varphi = 60^\circ$$

$$A = -\frac{6}{\sin \varphi} = -\frac{6}{0,866} = -6,928$$

Закон изменения тока в ветви с катушкой индуктивности

$$i_L = 9 - 6,928e^{-500t} \cdot \sin(866t + 60^\circ) \text{ A}$$

### 2.3. Компьютерная модель электрической цепи

Моделирование в среде виртуальной лаборатории Multisim (рис. 2.13).

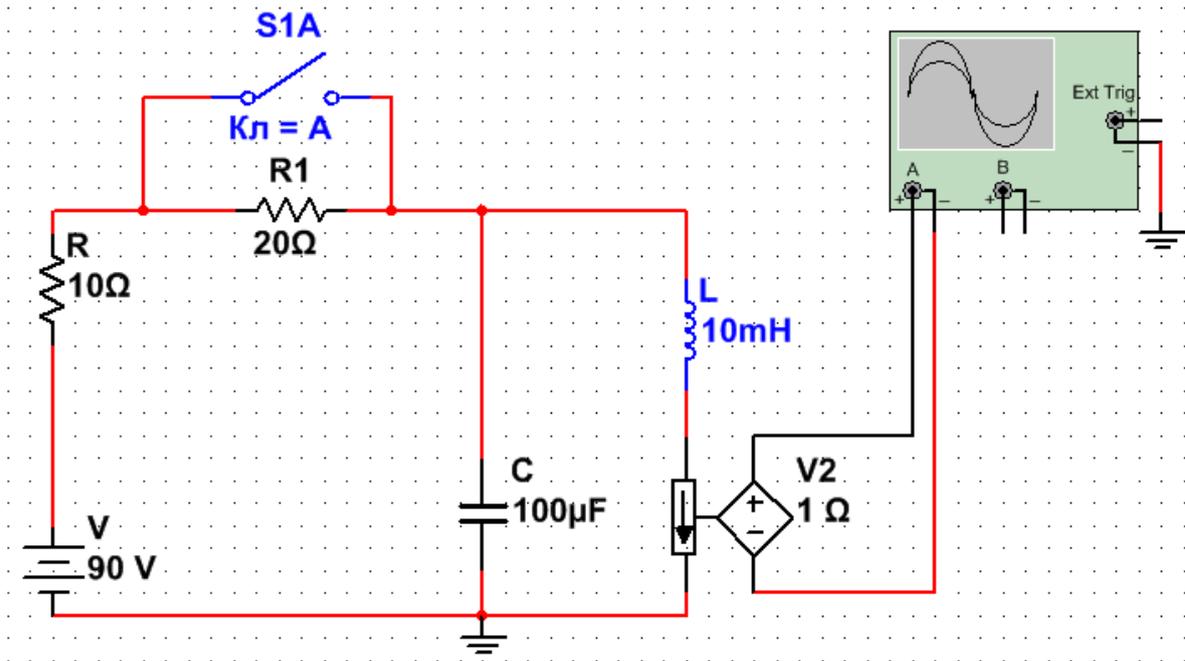
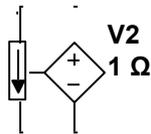


Рис. 2.13



Источник ЭДС, управляемый током. Значение ЭДС зависит от входного тока в управляющей ветви. Входной ток и выходное напряжение образуют параметр, называемый передаточным сопротивлением  $H$ , который представляет собой отношение выходного напряжения к управляющему току. Передаточное сопротивление имеет размерность сопротивления и задается в омах

$$H = \frac{V_{out}}{I_{in}}$$

На осциллограмме можно наблюдать график переходного процесса (рис. 2.14). Согласно осциллограмме установившееся значение тока в катушке до коммутации  $i_{ycm} = 3A$ , после коммутации  $i_{ycm} = 9A$ .

Время переходного процесса составляет  $T2-T1=8,89$  с, что укладывается в диапазон  $(3 \div 5)\tau = 6 \div 10$ мс. Постоянная времени  $\tau$  равна

$$\tau = \frac{1}{|\delta|} = \frac{1}{500} = 2мс$$

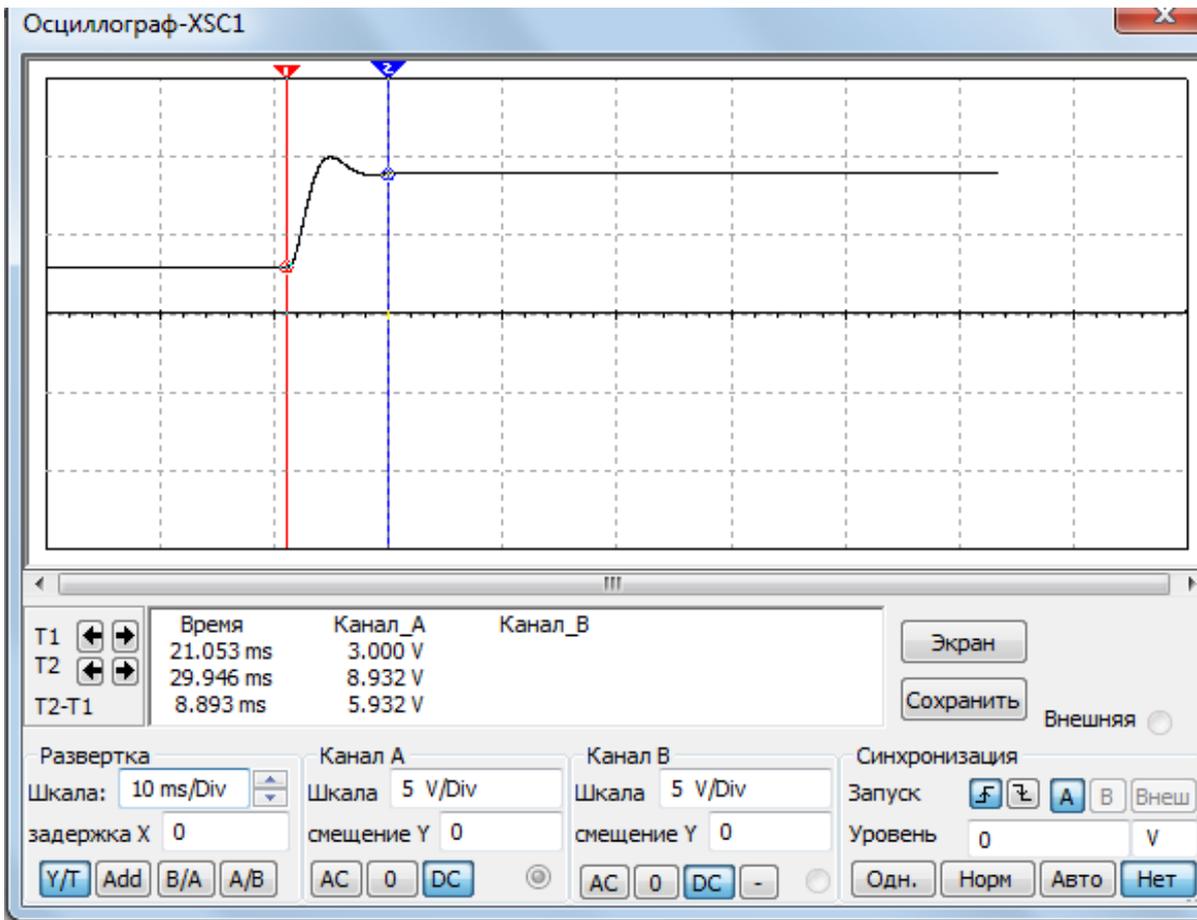


Рис. 2.14

## 2.4. Задачи для самостоятельного решения.

Задание для анализа переходных процессов в линейной электрической цепи с двумя реактивными элементами.

В заданной электрической цепи с источником постоянной ЭДС (значение ЭДС  $E$  и рисунок схемы задаются преподавателем) происходит коммутация. Требуется рассчитать токи и напряжения на элементах схемы одним из методов расчета переходных процессов (классическим или операторным). Выполнить компьютерное моделирование в виртуальной электронной лаборатории Multisim. Сравнить результаты эксперимента и результаты расчета.

Выполнить анализ заданной электрической цепи с источником переменной ЭДС. Амплитуда ЭДС  $E$  и частота  $\omega$  задаются преподавателем.

До коммутации был установившийся режим.

Пример. Исходная схема рис. 2.15.

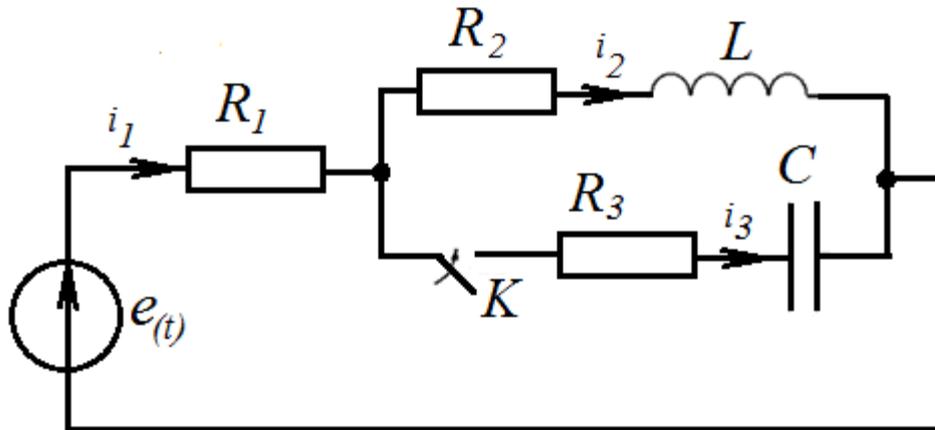


Рис. 2.15

Ключ замыкается в третьей ветви.  $e(t) = 120V$ .  $R_1 = 50\text{Ом}$ ,  $R_2 = 10\text{Ом}$ ,  $R_3 = 50\text{Ом}$ ,  $L_2 = 2\text{Гн}$ ,  $C = 150\text{мкФ}$ .

Решение.

Установившееся значение тока во второй ветви до коммутации

$$i_1(0_-) = i_2(0_-) = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{120}{50 + 10} = 2A$$

Установившееся значение тока после коммутации

$$i_{1np} = i_{2np} = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{120}{50 + 10} = 2A$$

Через конденсатор постоянный ток не проходит, поэтому

$$i_{3np} = 0$$

На катушке индуктивности падение напряжения от постоянного тока равно

$$u_{L2np} = 0$$

Падение напряжения на конденсаторе после коммутации равно падению напряжения на резисторе  $R_2$

$$u_{C_{np}} = 2 \cdot 10 = 20B$$

По первому закону коммутации

$$i_2(0_-) = i_2(0_+) = 2A$$

Полный ток

$$i_2(0_+) = i_{2np}(0_+) + i_{2cb}(0_+)$$

Отсюда

$$i_{2cb}(0_+) = i_2(0_+) - i_{2np}(0_+) = 2 - 2 = 0$$

По первому закону Кирхгофа

$$i_1(0_+) = i_2(0_+) + i_3(0_+)$$

$$i_1(0_+) = 2 + i_3(0_+)$$

По второму закону Кирхгофа для контура, образованного первой и третьей ветвями

$$i_1(0_+)R_1 + i_3(0_+)R_3 + u_c(0_+) = E$$

Так как

$$u_c(0_+) = 0, \text{ то}$$

$$i_1(0_+)R_1 + i_3(0_+)R_3 = E$$

$$i_3(0_+) = \frac{E - 2R_1}{R_1 + R_3} = \frac{120 - 2 \cdot 50}{50 + 50} = 0,2A.$$

Свободная составляющая тока

$$i_{3cb}(0_+) = i_3(0_+) - i_{3np}(0_+) = 0,2 - 0 = 0,2A.$$

По второму закону Кирхгофа для контура, образованного второй и первой ветвями

$$i_{1cb}(0_+)R_1 + i_{2cb}(0_+)R_2 + u_{Lcb}(0_+) = 0$$

Отсюда

$$u_{Lcb}(0_+) = -i_{1cb}(0_+)R_1 - i_{2cb}(0_+)R_2 = -0,2 \cdot 50 - 0 = -10B.$$

$$\text{Но } u_{Lcb} = L_2 \frac{di_{2cb}}{dt}.$$

Следовательно

$$\left. \frac{di_{2CB}}{dt} \right|_{0+} = \frac{u_{LCB}(0_+)}{L_2} = -\frac{10}{2} = -5 \text{ A/c.}$$

Свободное напряжение на конденсаторе при  $t=0+$

$$u_C(0-) = u_C(0+)$$

$$u_C(0+) = u_{Cnp}(0+) + u_{Ccb}(0+)$$

$$0 = 20 + u_{Ccb}(0+)$$

$$u_{Ccb}(0+) = -20 \text{ B}$$

Скорость изменения свободной составляющей напряжения на конденсаторе

$$\left. \frac{du_{Ccb}}{dt} \right|_{0+} = \frac{i_{3CB}(0_+)}{C} = \frac{0,2}{150 \cdot 10^{-6}} = 1333 \text{ B/c}$$

Составим характеристическое уравнение методом операторного сопротивления. Для этого разорвем одну из ветвей (например, удалив источник питания) и запишем операторное сопротивление между точками разрыва. Приведем к общему знаменателю и, приравнявая числитель нулю, получим характеристическое уравнение

$$p^2 L_2 C (R_1 + R_2) + p(C(R_2 R_3 + R_1 R_2 + R_1 R_3) + L_2) + R_1 + R_2 = 0$$

Уравнение имеет два комплексно-сопряженных корня

$$p_1 = -42,1 + j15,2 \text{ c}^{-1}$$

$$p_1 = -42,1 - j15,2 \text{ c}^{-1}$$

Свободная составляющая запишется в виде

$$A e^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \psi)$$

$\delta=42,1$  – коэффициент затухания,

$\omega_0=15,2$  – угловая частота собственных колебаний.

Постоянные  $A$  и  $\psi$  определяем по значению свободной составляющей и ее первой производной при  $t=0+$ .

$$A e^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \psi) = A \sin \psi$$

$$-A \delta e^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \psi) + A e^{-\delta t} \omega_0 \cos(\omega_0 t + \psi) = -A \delta \sin \psi + \omega_0 A \cos \psi$$

Найдем значения  $A$  и  $\psi$  для свободной составляющей тока  $i_2$

$$\begin{cases} A \sin \psi = 0 \\ -A \delta \sin \psi + \omega A \cos \psi = -5 \end{cases}$$

Совместное решение дает

$$A = -0,328 \text{ A}, \quad \psi = 0^\circ$$

Закон изменения тока во второй ветви

$$i_2 = i_{2np} + i_{2св} = 2 - 0,328 e^{-42,1t} \sin 15, 2 \text{ A}$$

Найдем значения  $A$  и  $\psi$  для свободной составляющей напряжения на конденсаторе  $u_C$

$$\begin{cases} A \sin \psi = -20 \\ -A \delta \sin \psi + \omega A \cos \psi = -1333 \end{cases}$$

Совместное решение дает

$$A = 37,9 \text{ A}, \quad \psi = 31^\circ 52'$$

Закон изменения напряжения на конденсаторе

$$u_C = u_{Cnp} + u_{Cсв} = 20 + 37,9 e^{-42,1t} \sin(15, 2 - 31^\circ 52') \text{ B}$$

Выполним компьютерное моделирование в виртуальной электронной лаборатории Multisim (рис. 2.16) [3]

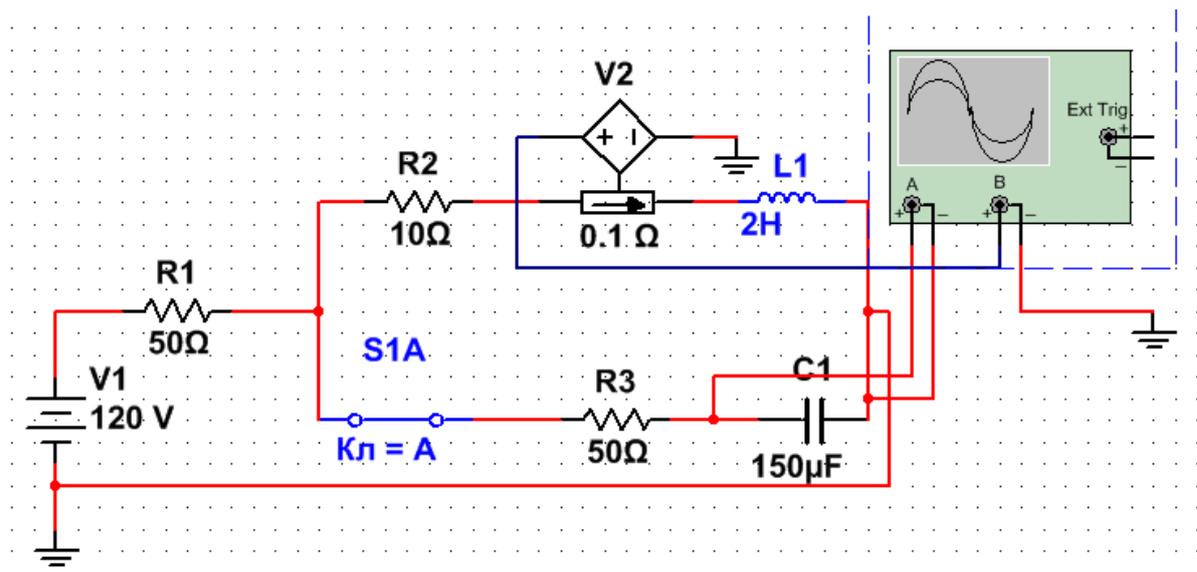


Рис. 2.16. Компьютерная модель

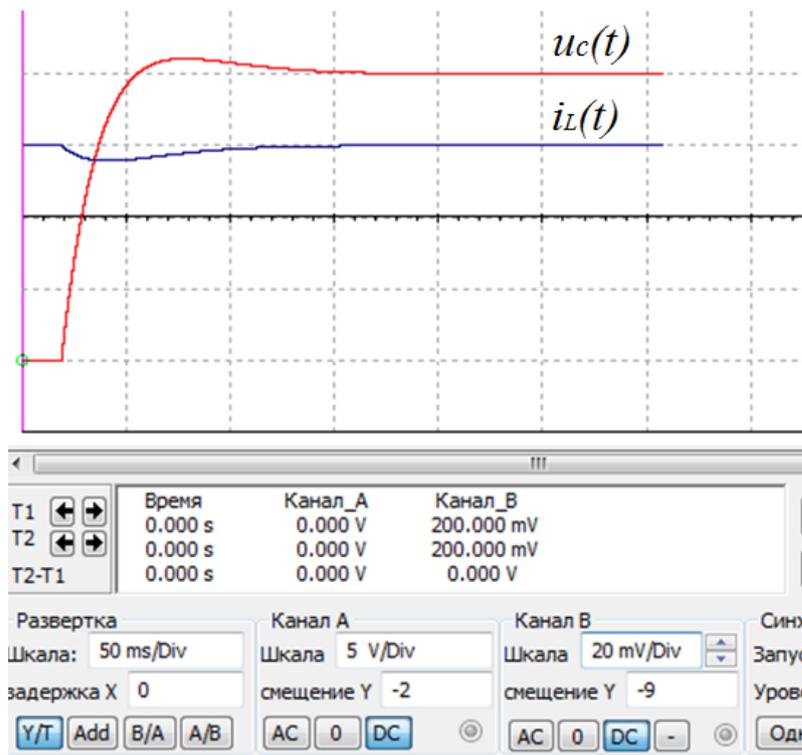


Рис. 2.17. Осциллограммы переходного процесса

Выполнить анализ заданной электрической цепи с источником переменной ЭДС

$$e(t) = 127\sin(314t + 40^\circ) \text{ В}$$

Требуется найти

$$i_{2c\phi}(0_+); \left. \frac{di_{2c\phi}}{dt} \right|_{0_+}; u_{C\phi}(0_+); \left. \frac{du_{C\phi}}{dt} \right|_{0_+};$$

$$i_L(t); u_C(t)$$

Токи до коммутации

$$I_{1m} = I_{2m} = \frac{E_m}{R_1 + R_2 + j\omega L_2} = \frac{127e^{j40^\circ}}{50 + 10 + j314 \cdot 2} = 0,202e^{-j44^\circ 30'} \text{ А}$$

$$i_1 = i_2 = 0,202\sin(314t - 44^\circ 30') \text{ А}$$

$$i_1(0-) = i_2(0-) = 0,202\sin(-44^\circ 30') = -0,1415 \text{ А}$$

Токи после коммутации

$$\underline{Z}_{ex} = R_1 + \frac{(R_2 + j\omega L_2)(R_3 - \frac{j}{\omega C})}{(R_2 + j\omega L_2) + (R_3 - \frac{j}{\omega C})} = 104,8e^{-j9^\circ 50'} \text{ Ом}$$

$$I_{1m} = \frac{E_m}{\underline{Z}_{ex}} = \frac{127e^{j40^\circ}}{104,8e^{-j9^\circ 50'}} = 1,213e^{j49^\circ 50'} \text{ А}$$

Мгновенное значение принужденного тока после коммутации

$$i_{1np} = 1,213\sin(314t + 49^\circ 50') \text{ А}$$

$$i_{1np}(0+) = 1,213\sin(49^\circ 50') = 0,923 \text{ А}$$

Комплексное сопротивление параллельных второй и третьей ветвей

$$\underline{Z}_{23} = \frac{(R_2 + j\omega L_2)(R_3 - \frac{j}{\omega C})}{(R_2 + j\omega L_2) + (R_3 - \frac{j}{\omega C})} = 56,3e^{-j18^\circ 35'} \text{ Ом}$$

Комплекс напряжения на второй ветви

$$U_{2m} = U_{3m} = I_{1m}\underline{Z}_{23} = 1,213e^{j49^\circ 50'} 56,3e^{-j18^\circ 35'} = 68,2e^{j31^\circ 15'} \text{ В}$$

Отсюда находим токи

$$I_{2m} = \frac{U_{2m}}{\underline{Z}_2} = \frac{68,2e^{j31^\circ 15'}}{10 + j628} = 0,1085e^{-j58^\circ 45'} \text{ А}$$

$$I_{3m} = \frac{U_{3m}}{\underline{Z}_3} = \frac{68,2e^{j31^\circ 15'}}{50 - j21,3} = 1,253e^{j54^\circ 20'} \text{ А}$$

Мгновенные значения принужденных токов после коммутации

$$i_{2np} = 0,1085\sin(314t - 58^\circ 45') \text{ А}$$

$$i_{3np} = 1,253\sin(314t + 54^\circ 20') \text{ А}$$

$$i_{2np}(0+) = 0,1085\sin(-58^\circ 45') = -0,0928 \text{ А}$$

$$i_{3np}(0+) = 1,253\sin(54^\circ 20') = 1,016 \text{ А}$$

Принужденное напряжение на конденсаторе

$$U_{Cnp} = I_{3m} \left( \frac{-j}{\omega C} \right) = 1,253e^{j54^\circ 20'} 21,3e^{-j90^\circ} = 26,7e^{-j35^\circ 40'} \text{ В}$$

Принужденное значение напряжения на конденсаторе

$$u_{Cnp} = 26,7 \sin(314t - 35^\circ 40') B$$

$$u_{Cnp}(0+) = 26,7 \sin(-35^\circ 40') = -15,57 B$$

По первому закону коммутации

$$i_2(0-) = i_2(0+) = -0,1415$$

$$i_{2np}(0+) + i_{2cв}(0-) = -0,1415$$

$$i_{2np}(0+) = 0,0928 A \quad i_{2cв}(0+) = -0,1415 + 0,0928 = -0,0487 A$$

Свободное напряжение на конденсаторе найдем по второму закону коммутации

$$u_C(0-) = u_{Cnp}(0+) + u_{Cсв}(0+)$$

$$u_{Cсв}(0+) = 0 - (-15,57) = 15,57 B$$

По второму закону Кирхгофа

$$i_{1cв}(0+) R_1 + i_{3cв}(0+) R_3 + u_{Cсв}(0+) = 0$$

Отсюда

$$i_{3cв}(0+) = \frac{-15,57 + 2,43}{50 + 50} = -0,1314 A$$

$$i_{1cв}(0+) = i_{2cв}(0+) + i_{3cв}(0+) = -0,0487 - 0,1314 = -0,18 A$$

Чтобы найти

$$u_{Lсв}(0_+) = L \left. \frac{di_{2св}}{dt} \right|_{0_+}$$

Составим уравнение для контура, образованного первой и второй ветвями

$$i_{1cв}(0+) R_1 + i_{2cв}(0+) R_3 + u_{Lсв}(0+) = 0$$

Отсюда

$$u_{Lсв}(0_+) = 9,487 B$$

$$\left. \frac{di_{2св}}{dt} \right|_{0_+} = \frac{u_{Lсв}(0_+)}{L} = \frac{9,487}{2} = 4,74 A/c$$

$$\left. \frac{du_{Cсв}}{dt} \right|_{0_+} = \frac{i_{3cв}(0_+)}{C} = \frac{0,1314}{150 \cdot 10^{-6}} = -876 B/c$$

$$i_{2np} = 0,1085 \sin(\omega t - 58^\circ 45'), \quad i_{2cв}(0_+) = -0,0487 A$$

$$i'_{2св}(0_+) = 4,74 A/c;$$

$$u_{Cnp} = 26,7 \sin(\omega t - 35^\circ 40') B; \quad u_{Cсв}(0_+) = 15,57 B$$

$$u'_{C_{св}}(0_+) = -876 \text{ В/с}$$

Характеристическое уравнение имеет два комплексно-сопряженных корня

$$p_1 = -42,1 + j15,2 e^{-1}$$

$$p_2 = -42,1 - j15,2 e^{-1}$$

Свободная составляющая запишется в виде

$$Ae^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \psi)$$

$\delta=42,1$  – коэффициент затухания,

$\omega_0=15,2$  – угловая частота собственных колебаний.

Постоянные  $A$  и  $\psi$  для тока определяем по значению свободной составляющей и ее первой производной при  $t=0+$ .

$$A \sin \psi = -0,0487;$$

$$-\delta A \sin \psi + \omega_0 A \cos \psi = 4,74$$

Откуда

$$A=0,184 \text{ А}, \quad \psi=-15^\circ 20'$$

Закон изменения тока в катушке индуктивности

$$i_2 = i_{2пр} + i_{2св} = 0,1085 \sin(\omega t - 58^\circ 45') + 0,184 e^{-42,1t} \sin(15,2t - 15^\circ 20') \text{ А}$$

Постоянные  $A$  и  $\psi$  для напряжения на конденсаторе определяем по значению свободной составляющей и ее первой производной при  $t=0+$ .

$$A \sin \psi = 15,57;$$

$$-\delta A \sin \psi + \omega_0 A \cos \psi = 876$$

Откуда

$$A=23,3 \text{ В}, \quad \psi=136^\circ 50'$$

Закон изменения напряжения на конденсаторе

$$u_C = u_{Cпр} + u_{Cсв} = 26,7 \sin(314t - 35^\circ 40') + 21,3 e^{-42,1t} \sin(15,2t - 136^\circ 50') \text{ В}$$

Выполним компьютерное моделирование в виртуальной электронной лаборатории Multisim (рис. 2.18)[3]

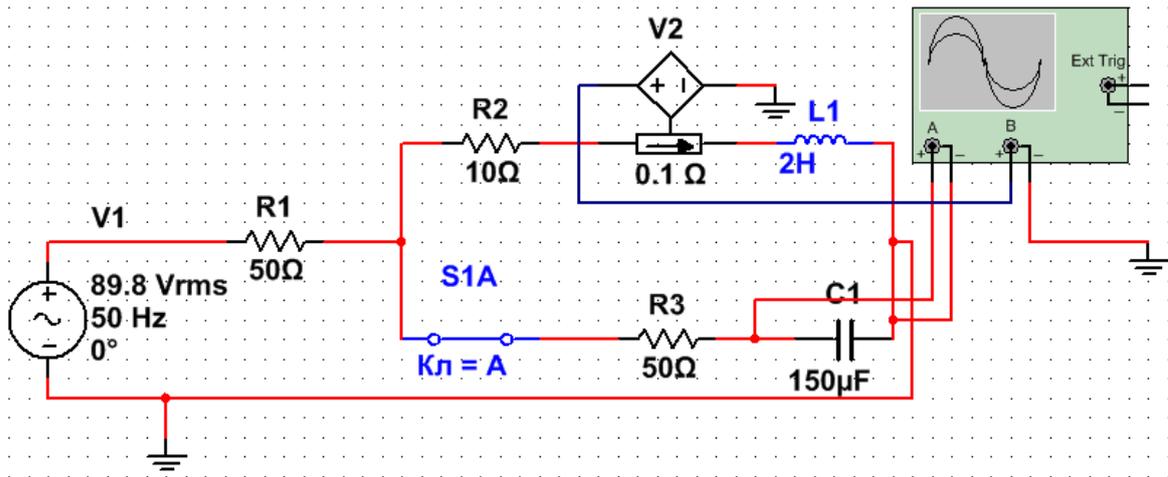


Рис. 2.18. Компьютерная модель

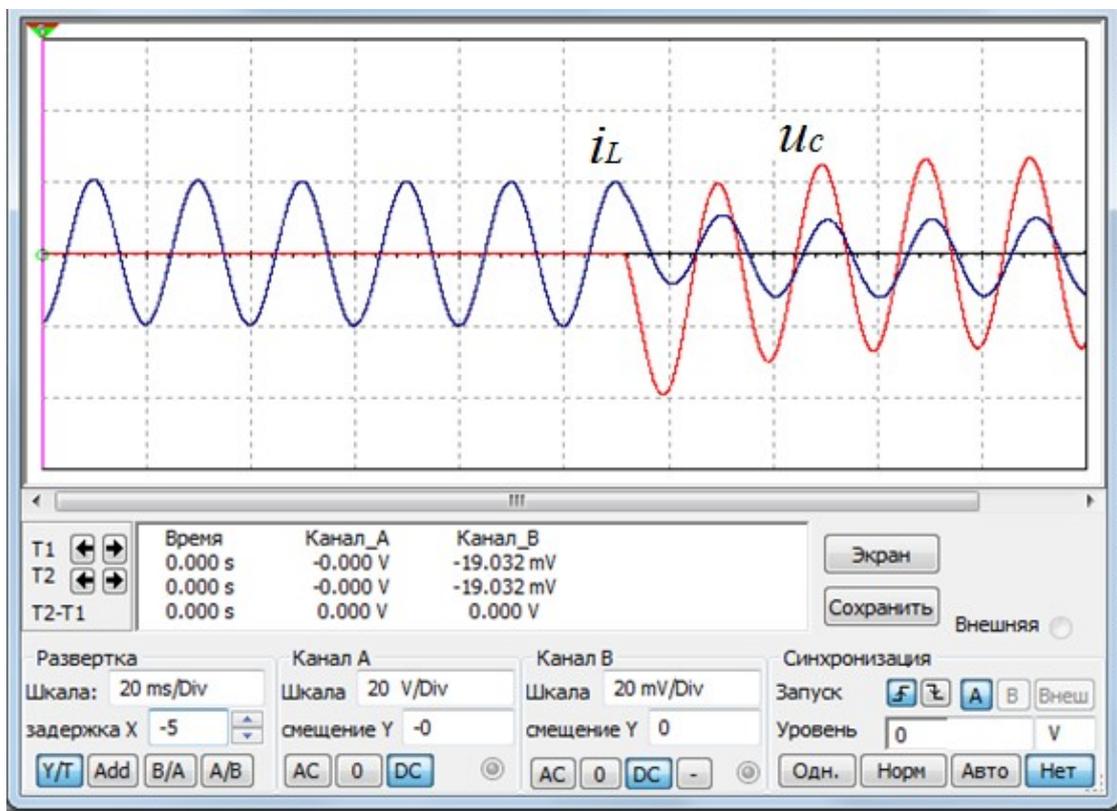


Рис. 2.19. Осциллограммы переходного процесса

Таблица 2.1

№ вар.	№ рис.	$R, \text{Ом}$	$L, \text{Гн}$	$C, \Phi$	$\psi, ^\circ$
1	2.20	5	5E-3	(1/36)E-3	10
2	2.21	10	5E-3	(5/2)E-2	20
3	2.22	5	2E-2	(1/9)E-5	30
4	2.23	10	5E-3	(1/2)E-4	40
5	2.24	5	1E-2	1E-4	50

Продолжение табл. 2.1

<i>№ вар.</i>	<i>№ рис.</i>	<i>R, Ом</i>	<i>L, Гн</i>	<i>C, Ф</i>	<i>ψ, °</i>
6	2.25	10	2E-2	(1/18)E-3	60
7	2.26	20	3E-2	(5/4)E-5	70
8	2.27	25	4E-2	2E-5	80
9	2.28	20	1,5E-3	5E-5	90
10	2.29	10	5E-2	(15/36)E-4	100
11	2.20	10	5E-2	(15/36)E-4	110
12	2.21	20	1,5E-3	5E-5	120
13	2.22	25	4E-2	2E-5	130
14	2.23	20	3E-2	(5/4)E-5	140
15	2.24	10	2E-2	(1/18)E-5	150
16	2.25	5	1E-2	1E-4	160
17	2.26	10	5E-3	(1/2)E-4	170
18	2.27	5	2E-2	(1/9)E-5	180
19	2.28	10	5E-3	(5/2)E-2	190
20	2.29	5	5E-3	(1/36)E-3	200
21	2.20	5	1E-2	1E-4	210
22	2.21	10	5E-3	(1/2)E-4	220
23	2.22	5	2E-2	(1/9)E-3	230
24	2.23	10	5E-3	(5/2)E-2	240
25	2.24	5	5E-3	(1/36)E-3	250
26	2.25	5	2E-2	(1/9)E-5	260
27	2.26	10	1E-3	(1/2)E-4	270
28	2.27	5	5E-3	1E-4	280
29	2.28	10	3E-2	(5/4)E-5	290
30	2.29	5	4E-2	2E-5	300
31	2.20	10	1,5E-2	5E-5	310
32	2.21	20	5E-2	(15/36)E-4	320
33	2.22	25	5E-2	(15/36)E-4	330
34	2.23	20	1,5E-3	5E-5	340
35	2.24	10	4E-2	2E-5	350
36	2.25	10	3E-2	(5/4)E-5	20
37	2.26	20	2E-2	(1/18)E-5	30
38	2.27	25	1E-2	1E-4	40
39	2.28	20	5E-3	(1/2)E-4	50
40	2.29	10	2E-2	(1/9)E-5	60
41	2.20	5	5E-3	(5/2)E-2	70
42	2.21	10	5E-3	(1/36)E-3	80
43	2.22	5	1E-2	1E-4	90
44	2.23	10	5E-3	(1/2)E-4	100
45	2.24	5	2E-2	(1/9)E-3	110
46	2.25	5	5E-3	(5/2)E-2	120

Окончание табл. 2.1

№ вар.	№ рис.	R, Ом	L, Гн	C, Ф	$\psi, ^\circ$
47	2.26	10	5E-3	(1/36)E-3	130
48	2.27	5	1E-3	(3/2)E-2	140
49	2.28	10	15E-3	2E-2	150
50	2.29	5	8E-3	1E-3	160

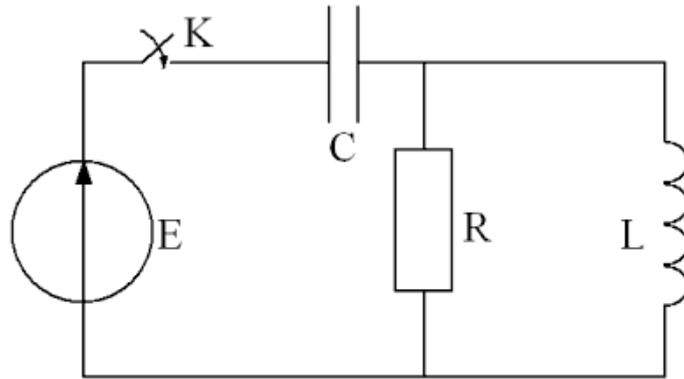


Рис. 2.20

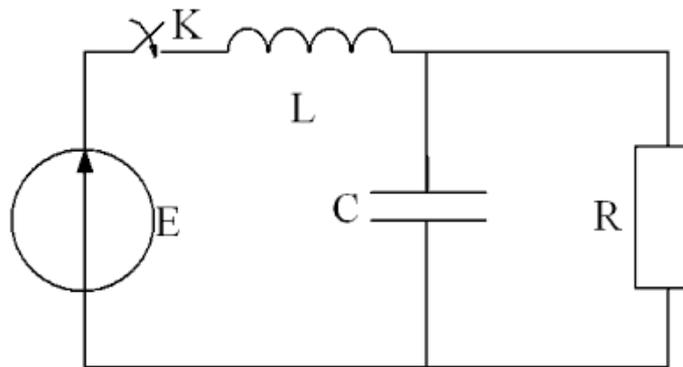


Рис. 2.21

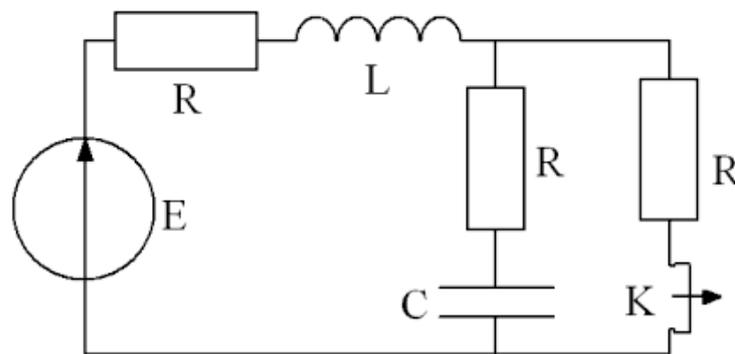


Рис. 2.22

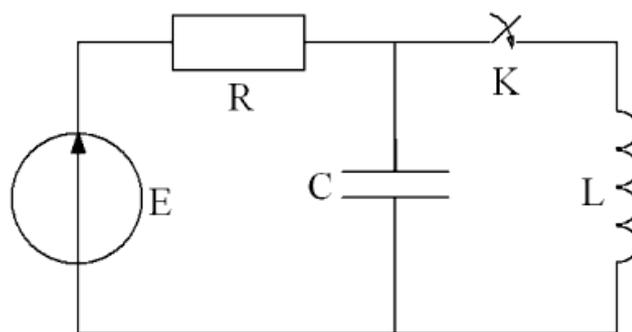


Рис. 2.23

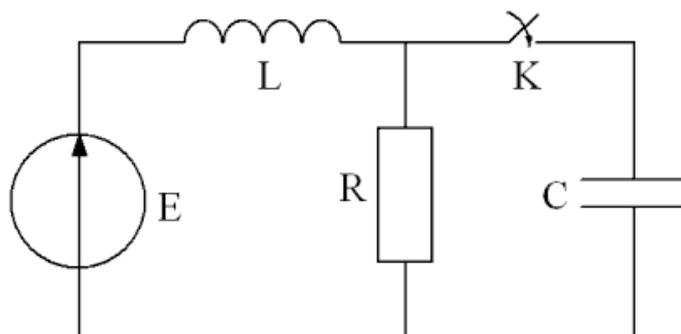


Рис. 2.24

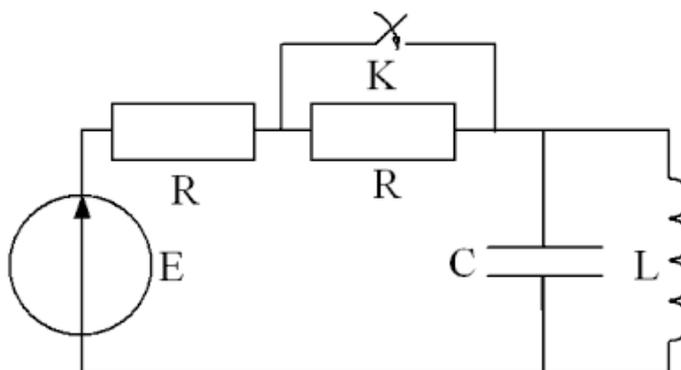


Рис. 2.25

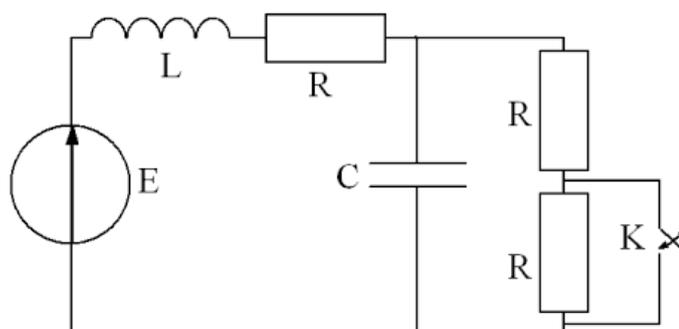


Рис. 2.26

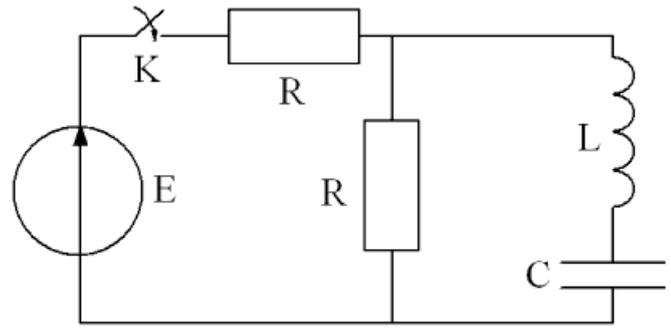


Рис. 2.27

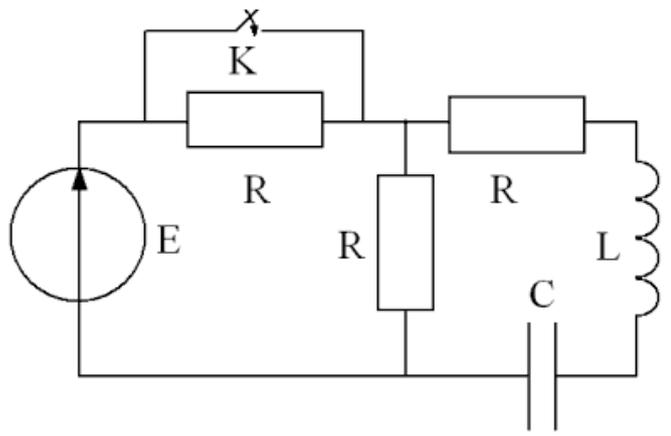


Рис. 2.28

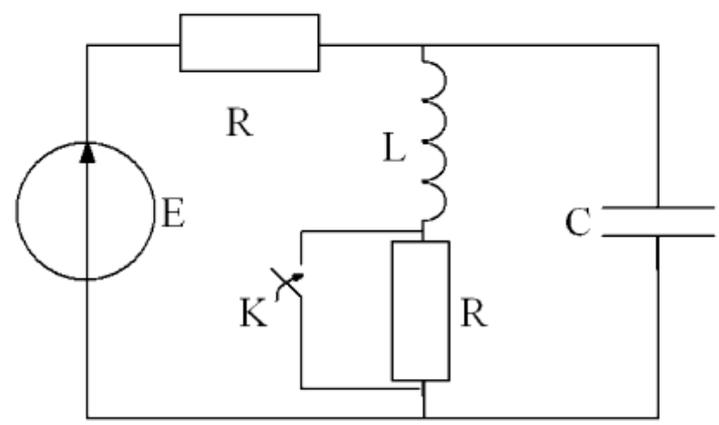


Рис. 2.29