## СОДЕРЖАНИЕ

1. Общие указания 4
   1. [Содержание работы 4](#_TOC_250005)
   2. [Оформление работы 5](#_TOC_250004)
2. [Задания и методические указания 6](#_TOC_250003)
   1. [Задание 1. Однократное измерение 6](#_TOC_250002)
   2. [Задание 2. Многократное измерение 18](#_TOC_250001)
   3. Задание 3. Обработка результатов нескольких серий измерений 24
   4. Задание 4. Функциональные преобразования результатов

измерений (косвенные измерения) 27

* 1. Задание 5. Обработка экспериментальных данных при изучении зависимостей (совместные измерения) 29

[Литература 35](#_TOC_250000)

Приложение Б. Форма титульного листа 39

Приложение В. Интегральная функция нормированного нормального распределения *Ф(t)* 40

Приложение Г. ν-критерий 41

Приложение Д. Составной критерий 42

Приложение Е. Распределение Стьюдента 43

Приложение Ж. Распределение Фишера 44

Приложение З. Критерий серий 45

Приложение К. Критерий инверсий 46

* + 1. **ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ**

## Содержание работы

Согласно федеральным государственным образовательным стандартам подготовки бакалавров, магистров и аспирантов по многим направлениям и специальностям предусмотрено формирование компетенций, связанных с орга- низацией метрологического обеспечения производства, с получением объек- тивной количественной информации о различных объектах путем проведения измерений. В этой связи учебные планы включают различные метрологические дисциплины. Так, например, по направлениям подготовки 12.03.01 - Приборо- строение и 12.03.04 Биотехнические системы и технологии предусматривается изучение дисциплины «Метрология, стандартизация и технические измере- ний».

При этом для формирования практических навыков в соответствие с формируемыми компетенциями учебные планы для различных направлений предполагают выполнение курсовых работ. Наряду со специфическими задача- ми изучения метрологической дисциплины для каждого направления подготов- ки есть общие цели и задачи для всех направлений.

Одной из основных задач изучения метрологических дисциплин является освоение методов получения достоверной измерительной информации и пра- вильного ее использования, а также приобретение практических навыков обра- ботки данных при выполнении различных видов измерений и экспериментов.

Решению указанной задачи и служат задания, изложенные в данных ме- тодических указаниях. При выполнении работы студент углубляет те- оретические знания и получает практические навыки в области обработки экс- периментальных данных при выполнении однократных и многократных изме- рений, нескольких серий измерений, при функциональных преобразованиях ре- зультатов измерений и исследовании физических зависимостей.

В настоящих методических указаниях представлены индивидуальные за- дания пяти видов (по 100 вариантов):

* задание 1. Однократное измерение;
* задание 2. Многократное измерение;
* задание 3. Обработка результатов нескольких серий измерений;
* задание 4. Функциональные преобразования результатов измерений;
* задание 5. Обработка экспериментальных данных при изучении зависи- мостей.

В зависимости от изучаемой дисциплины и планируемого объема работа может включать лишь некоторые из представленных пяти заданий.

## Оформление работы

Курсовые работы оформляются на листах стандартного формата А4 (297x210 мм). Форма титульного листа представлена в приложении А.

Работа должна включать по каждому заданию: условие задачи; экспери- ментальные данные; априорную информацию; выбранный алгоритм обработки с соответствующими пояснениями и промежуточные результаты обработки экспериментальных данных; полученный результат измерений; необходимые графики и диаграммы, поясняющие решение задач.

В конце работы необходимо представить список использованных источ- ников.

## ЗАДАНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

## Задание 1. Однократное измерение

## Условие задания

При однократном измерении физической величины получено показание средства измерения X = 10. Определить, чему равно значение измеряемой ве- личины, если экспериментатор обладает априорной информацией о средстве измерений и условиях выполнения измерений согласно данным таблицы 1.

## Указания по выполнению

1. Исходные данные студент выбирает из таблицы 1 по предпоследней и последней цифрам шифра; например шифру 96836 соответствует априорная информация, определяемая на пересечении строки 3 и столбца 6.
2. Априорная информация в таблице 1 представлена в двух вариантах. В первом варианте даются сведения о классе точности средства измерений: пре- делы измерений, класс точности, значение аддитивной (а) или мультиплика- тивной (м) поправки, значение неисключенной систематической погрешности (Δнсп) и цена деления (с). Например, данные: -50...50; 1,5; а = 0,5; Δнсп= ±0,2; с = 1 – означают, что средство измерения имеет диапазон измерений от -50 до 50, класс точности 1,5, значение аддитивной поправки равняется 0,5, при значении не исключенной систематической погрешности ±0,2 и цене деления 1.

Во втором варианте в качестве априорной информации даются сведения о видах и характеристиках распределения вероятности результата измерения: вид закона распределения, значение оценки среднего квадратического отклонения (Sx), доверительная вероятность (*Р*), значение аддитивной (а) или мультипли- кативной (м) поправки, значение неисключенной систематической погрешно- сти (Δнсп) и цена деления (с). Например, данные: норм.; Sx =0,5; Р = 0,95; м = 1,1; Δнсп= ±0,2; с = 1 означают, что закон распределения вероятности результата измерения нормальный, со значением оценки среднеквадратического отклоне- ния 0,5. При этом имеет место мультипликативная поправка (поправочный множитель) 1,1, а расширенную неопределенность следует рассчитывать с до- верительной вероятностью 0,95, при этом неисключенная систематическая по- грешность составляет ±0,2, а цена деления равна 1.

Таблица 1 – Исходные данные

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Предпо- следняя цифра  шифра | Последняя цифра шифра | | | | | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 1 | 0…100  1,0  Qa = 1  Δнсп=±0,2 с=1 | -50…+50 1,5  Qa = -1,2  Δнсп=±0,1 с=2 | 0…50  0,02/0,01  Qм = 1.1  Δнсп=±0,1 с=0,5 | 0…50  4,0  Qм = 0.9  Δнсп=±0,1 с=0,5 | -30…+30 1,5  Qм = 1.2 Δнсп=±0,08  с=0,5 | 0…50  0,2/0,1  Qа = -0.5 Δнсп=±0,15 с=1 | 0…100  4,0  Qа = 0  Δнсп=±0,4 с=2 | -50…+50 2,5  Qа = 0  Δнсп=±0,2 с=1 | 0…30  4,0  Qа = 1  Δнсп=±0,3 с=1 | -10…+10 1,0  Qм = 1,1 Δнсп=±0,05 с=0,5 |
| 2 | норм. Sx = 0,1  P = 0,9  Qa = 1  Δнсп=±0,2 с=1 | норм. Sx = 0,5  P = 0,95  Qa = 1,3  Δнсп=±0,1 с=2 | норм. Sx = 1  P = 0,9  Qa = -1  Δнсп=±0,1 с=2 | норм. Sx = 0,6  P = 0,98  Qa = 0,5  Δнсп=±0,1 с=0,5 | норм. Sx = 0,3  P = 0,9  Qa = 0 Δнсп=±0,08 с=0,5 | норм. Sx = 0,1  P = 0,95  Qa = -1,0  Δнсп=±0,4 с=2 | норм. Sx = 0,3  P = 0,99  Qa = 1,1  Δнсп=±0,1 с=1 | норм. Sx = 0,5  P = 0,8  Qa = 0  Δнсп=±0,2 с=1 | норм. Sx = 0,6  Qa = 1,0 Δнсп=±0,05 с=0,5 | норм. Sx = 0,2  P = 0,8  Qa = -0,8  Δнсп=±0,3 с=1 |
| 3 | -30…+50 2,5  Qa = 1  Δнсп=±0,1 с=1 | -50…+30 2,5  Qa = 1  Δнсп=±0,1с  =2 | 0…150  1,0  Qм = 1,1 Δнсп=±0,15 с=1,5 | -20…+20 1,5  Qм = 0,9  Δнсп=±0,1 с=0,5 | 0…50  2,5  Qa = 0 Δнсп=±0,15 с=0,5 | -10…+20 2,0  Qa = 0,1 Δнсп=±0,15 с=0,5 | 0…30  4,0  Qм = 1,2  Δнсп=±0,1 с=0,5 | 0…50  0,03/0,01  Qa = 0  Δнсп=±0,2 с=1 | 0…10  0,02/0,01  Qa = 1,0 Δнсп=±0,05 с=0,2 | 0…30  1,0  Qa = 1,1  Δнсп=±0,2 с=0,5 |
| 4 | норм. Sx = 0,2  P = 0,99  Qa = 0  Δнсп=±0,1с  =0,5 | норм. Sx = 0,3  P = 0,8  Qм = 1,0  Δнсп=±0,2 с=1 | норм. Sx = 0,4  P = 0,95  Qa = 0,8 Δнсп=±0,15 с=1 | равн. Sx = 0,4  P = 0,95  Qa = 1,0  Δнсп=±0,1 с=0,5 | равн. Sx = 0,8  P = 0,95  Qм = 0,9  Δнсп=±0,5 с=2 | равн. Sx = 0,6  P = 0,95  Qa = 1,0  Δнсп=±0,2 с=2 | норм. Sx = 0,6  P = 0,8  Qa = 0,5  Δнсп=±0,2 с=2 | норм. Sx = 0,2  P = 0,9  Qa = -0,5  Δнсп=±0,2 с=2 | равн. Sx = 0,5  P = 0,9  Qa = 0,6  Δнсп=±0,1 с=1 | равн. Sx = 0,3  P = 0,9  Qм = 1,2 Δнсп=±0,15 с=1 |
| 5 | 0…100  4,0  Qa = 1,0  Δнсп=±0,5 с=2,5 | -50…+50 1,5  Qм = 0,9 Δнсп=±0,15 с=1 | 0…30  4,0  Qa = -1,0  Δнсп=±0,1 с=1 | -20…+20 1,0  Qa = 0  Δнсп=±0,1 с=0,5 | -30…+30 0,04/0,02  Qa = 1,0  Δнсп=±0,1 с=1 | 0…50  4,0  Qa = 0,5  Δнсп=±0,1 с=2 | -100…100 0,1  Qa = 0,1  Δнсп=±0,1 с=2 | 1…100  0,2  Qa = 0  Δнсп=±0,1 с=2 | 0…30  0,5  Qa = 0,9  Δнсп=±0,1 с=1 | 0…50  0,25  Qa = 0,1 Δнсп=±0,15 с=1 |

Продолжение таблицы 1

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 0…100  4,0  Qa = -0,5  Δнсп=±0,1 с=2 | 0…50  0,4  Qa = -0,2  Δнсп=±0,1 с=1 | -10…+10 0,5  Qa = -0,5 Δнсп=±0,05 с=0,5 | -30…+50 0,25  Qм = 0,9  Δнсп=±0,1 с=1 | -100…100 0,1  Qa = 0,5  Δнсп=±0,1 с=2 | 0…10  1,0  Qa = 0,1 Δнсп=±0,05 с=0,5 | 0…50  0,1/0,2  Qм = 1,1  Δнсп=±0,1 с=1 | 0…100  0,2/0,1  Qм = 1,1  Δнсп=±0,1 с=2 | 0…50  6,0  Qa = 0,5  Δнсп=±0,2 с=2 | -20…+20 0,3/0,2  Qа = 0  Δнсп=±0,1 с=1 |
| 7 | норм. Sx = 0,5  P = 0,9  Qa = 0,3  Δнсп=±0,1 с=2 | норм. Sx = 0,2  P = 0,95  Qм = 1,1  Δнсп=±0,1 с=2 | норм. Sx = 0,4  P = 0,9  Qм = 1,1  Δнсп=±0,2 с=2 | норм. Sx = 0,6  P = 0,8  Qa = -1,0  Δнсп=±0,3 с=2 | равн. Sx = 0,1  P = 0,95  Qa = 0,3 Δнсп=±0,05 с=2 | равн. Sx = 0,2  P = 0,95  Qa = -0,1  Δнсп=±0,1 с=1 | равн. Sx = 0,4  P = 0,95  Qм = 0,8  Δнсп=±0,4 с=2,5 | равн. Sx = 0,3  P = 0,8  Qa = -0,5  Δнсп=±0,1 с=1 | норм. Sx = 0,1  P = 0,9  Qм = 0,95  Δнсп=±0,1 с=1 | норм. Sx = 0,4  P = 0,95  Qa = -0,1  Δнсп=±0,2 с=2 |
| 8 | 0…15  0,02/0,01  Qa = 1,1  Δнсп=±0,1 с=0,5 | 0…20  0,1  Qм= 1,1  Δнсп=±0,1 с=0,5 | -20…+30 0,25  Qa = -0,1  Δнсп=±0,2 с=1 | -30…+20 0,25  Qa = -0,1  Δнсп=±0,4 с= 1 | 0…80  0,05  Qa = -0,05 Δнсп=±0,05 с=1 | 0…100  0,1  Qм= 0,9  Δнсп=±0,1 с=1 | 0…50  6,0  Qм= 1,2  Δнсп=±0,5 с=1 | -10…20 4,0  Qм= 0,9  Δнсп=±0,2 с=1 | -20…+20 1,0  Qм= 1,0  Δнсп=±0,1 с=0,5 | -25…+25 1,5  Qa = -0,5  Δнсп=±0,1 с=1 |
| 9 | 0…50  0,02/0,01  Qм = 1,1  Δнсп=±0,2 с=1 | 0…10  0,1  Qa = 0,1 Δнсп=±0,05 с=0,2 | -10…20 0,25  Qм = 0,9 Δнсп=±0,05 с=0,5 | -50…+50 1,5  Qa = 0,1  Δнсп=±0,2 с=1 | 0…50  1,6  Qм = 0,01  Δнсп=±0,2 с=1 | 0…20  1,5  Qм = 1  Δнсп=±0,1 с=0,5 | 0…50  2,0  Qa = 1  Δнсп=±0,2 с=1 | -10…+10 0,01/0,02  Qм = 1,1  Δнсп=±0,1 с=0,5 | 0…15  0,5  Qa = 0,1 Δнсп=±0,05 с=0,5 | 0…10  0,1  Qa = 0,2 Δнсп=±0,05 с=0,2 |
| 0 | норм. Sx = 0,5  P = 0,9  Qa = 0,1  Δнсп=±0,2 с=2 | норм. Sx = 0,9  P = 0,9  Qa = 0,9  Δнсп=±0,2 с=2 | норм. Sx = 0,5  P = 0,8  Qм = 1,1  Δнсп=±0,1 с=1 | норм. Sx = 0,9  P = 0,8  Qa = 0  Δнсп=±0,1 с=2 | равн. Sx = 0,5  P = 0,95  Qa = 1,0  Δнсп=±0,1 с=0,5 | равн. Sx = 0,8  P = 0,95  Qa = 0,8  Δнсп=±0,5 с=2 | норм. Sx = 0,85  P = 0,95  Qa = 0,1  Δнсп=±0,4 с=2 | норм. Sx = 0,4  P = 0,99  Qa = 0  Δнсп=±0,4с  =1 | норм. Sx = 0,1  P = 0,95  Qм = 1,1  Δнсп=±0,1 с=0,5 | норм. Sx = 0,2  P = 0,9  Qa = 0,2  Δнсп=±0,2 с=1 |

# 8

## Порядок расчета

Обработка экспериментальных данных проводится по следующему алго- ритму:

* составление модельного уравнения;
* оценивание входных величин и стандартных неопределенностей входных величин;
* оценка числового значения измеряемой величины (условного значения);
* вычисление коэффициентов чувствит ельности и вкладов неопределенно- сти входных величин в неопределенность измеряемой величины;
* вычисление суммарной стандартной неопределенности;
* составление бюджет неопределенности;
* определение эффективного числа степеней свободы и расширенной неоп- ределенности;
* запись результата измерения с учетом неопределенности.

## Составление модельного уравнения

*Модель измерений* **-** математическая связь между всеми величинами, о ко- торых известно, что они причастны к измерению:

### Y = f (X1 X2......XN), (1)

где *Y* –выходная величина (измеряемая величина);

*X*1 *X*2 *XN* - входные величины .

*Входные величины –* это все величины, от которых зависит выходная вели- чина ***У***, они могут быть отсчетами при измерениях могут зависеть от других ве- личин, включая поправки и поправочные коэффициенты на систематические эффекты.

В данном случае модель измерения включает:

* отсчет ***Х***;
* основную погрешность измерения **Δх**, определяемую, в зависимости от априорной информации либо классом точности, либо информацией о законе распределения результата измерений и значения среднего квадратического от- клонения ***S*;**
* поправка на систематическую погрешность, *а* или м;
* неисключенную систематическую погрешность **Δнсп;**

**–** погрешность от дискретности отсчета **Δд.**

С учетом указанных входных величин модельное уравнение (уравнение из- мерений) имеет вид:

или

Y = X + **Δх +** *а* + **Δнсп+ Δд**

Y = (X + **Δх** + **Δнсп+ Δд)** *м*.

## Оценивание входных величин и стандартных неопределенностей входных величин

Входные величины X1 X2......XN в зависимости от способа получения и зна- чений и связанных с ними неопределенностей разделяются на две группы.

1. Первая группа – величины, значения и неопределенности которых опре- деляют непосредственно в текущем измерении. Эти значения и неопределенно- сти можно получить, например, в результате однократного наблюдения, по- вторных наблюдений или по основанным на опыте суждениям. Они могут включать определения поправок к показаниям приборов и поправок на влияю- щие величины, такие как окружающая температура, атмосферное давление и влажность. Это наилучшие значения, например, среднее значение при много- кратных *наблюдениях*, середина диапазона возможных значений отклонений и т.п.;
2. Вторая группа - величины, значения и неопределенности которых полу- чены из сторонних источников. К ним относятся величины, связанные с атте- стованными эталонами, стандартными образцами веществ и материалов, а так- же величины, значения которых указаны в справочниках, в нормативных доку- ментах.

Предполагается, что входные значения являются ***лучшими оценками вход- ных величин*** (откорректированы путем внесения поправок на учет влияний и эффектов, значимых для данной модели). В другом случае необходимые по- правки вводятся в модель в качестве отдельных входных величин. Если входная величина определяется путем многократных измерений, то в качестве значения величины принимают ***среднее значение****.* Если величина представляется диапа- зоном возможных значений, ограниченным предельным значениями, то в каче- стве лучшей оценки принимают ***средину диапазона***.

Каждую входную оценку **хi,** и связанную с ней стандартную неопределен- ность **u(хi)** получают ***из вероятностного распределения*** значений входной ве- личины **Хi** Это вероятностное распределение можно интерпретировать как час- тотную вероятность, основанную ***на серии наблюдений*** Xiк величины Xi, или как ***априорное распределение*** (заранее известное) .

### Существует два подхода к оценке неопределенности:

*-* оценки составляющих стандартной неопределенности по типу А основаны на частотном представлении вероятности;

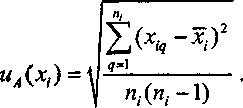
- оценки составляющих стандартной неопределенности по типу B основаны на априорных распределениях.

В обоих случаях распределения отражают некоторое модельное пред- ставление знаний о случайной величине

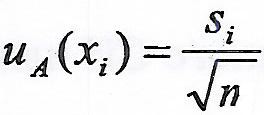
### Оценивание неопределенности по типу А

Применяется, когда для одной из входных величин при одинаковых услови- ях измерения проведены ***n*** независимых наблюдений.

1. Если метод измерения обладает достаточным разрешением, то получен- ные значения показывают наблюдаемый разброс. Тогда стандартная неопреде- ленность типа А определяется, оценкой среднеквадратического отклонения среднего арифметического:



Если количество наблюдений ***n*** мало, а метод измерений статистически хо- рошо исследован ранее проводимыми измерениями и известна оценка средне- квадратического отклонения результатов измерений *Si*, то



### Оценивание неопределенности по типу В

Применяется, когда неопределенность, связанная оценкой *xi входной вели- чины Xi* ***необходимо оценить*** *по методу, который не за*ключается в статисти- ческом анализе ряда наблюдений.

Стандартная неопределенность измерения *u(xi)* получается при этом *с* ***по- мощью метрологически обоснованной оценки изменчивости входной вели- чины Xi,*** *учитывая всю имеющуюся информа*цию:

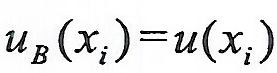
* значения из других, ранее проведенных измерений;
* значения, полученные в результате опыта или общих знаний о поведении и свойствах применяемых материалах или приборов;
* данные производителя;
* значения, содержащиеся в свидетельствах о калибровках или других удо- стоверениях;
* неопределенности измерения, связанные со справочными значениями из справочной литературы.

Процесс оценки неопределенности по типа В – творческий и неоднознач-

ный

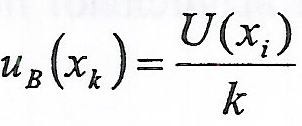
### Если известно только одиночное значение для величины Xi, напри-

*мер, одно измерен*ное значение, полученное из ранее проведенного измерения, справочное значение из литературы или поправка, то такое значение использу- ется в качестве оценки ***xi.***

* *Если при этом* также дается стандартная неопределенность измерения ***u(xi),*** *связанная со значением* ***xi,*** то необходимо в ***качестве неопределенности использовать это значение u(xi) .***

Если известна расширенная неопределенность ***U(xi)*** и коэффициент охвата

***k***, то стандартную неопределенность определяют:



Если коэффициент охвата не указан, то принимают:

***k* = 1.73** - если можно предположить *равномерный* закон распределения (например, при округлении результата)

***k* = 2,0** если можно предположить нормальное распределение и оценка ***U(xi)*** соответствует вероятности охвата 0,95 (например при аттестации рабочих эталонов, для которых установлена доверительная вероятность 0,95)

***k* = 2.6** если можно предположить нормальное распределение и оценка ***U(xi)*** соответствует вероятности охвата 0,99 (например при аттестации первич- ных и вторичных эталонов для доверительной вероятности 0,99);

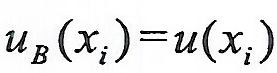
***k* = 3** если можно предположить нормальное распределение и оценка ***U(xi)*** пределом допускаемых изменений параметра, установленным в нормативной документации (например, предел допускаемой погрешности измерений);

***k* = 2** во всех остальных случаях, когда нет информации о виде распределе-

ния.

1. ***Если для величины Xi*** из теоретических или экспериментальных основ

***может предполагаться распределение вероятностей***, то математическое ожидание и квадратный корень из дисперсии этого распределения используются как, соответственно, оценка ***xi*** и связанная с ним стандартная неопределенность измерения ***u(xi).***



1. ***Если могут быть оценены для значения величины Xi только верхняя и нижняя граница а+ и а-*** (например, данные производителя об измерительном приборе, область изменчивости температуры, погрешность округления или от- брасывания вследствие автоматической обработки данных), то

* *При отсутствии другой информации* принимают равномерное или прямо- угольное распределение вероятностей входной величины *Xi* ***с постоянной плотностью вероятности.*** Для *этого с*лучая



* Если выполняется условие а**- = а+** , то



* Если можно ожидать, что значения, вблизи границ интервала менее веро- ятны, чем в центре, то прямоугольное распределение заменяют симметричным ***трапецеидальным распределением*** с шириной нижнего основания **а+ - а = 2а** и шириной верхнего основания **2ар**, где **0 < р < 1**. Тогда:



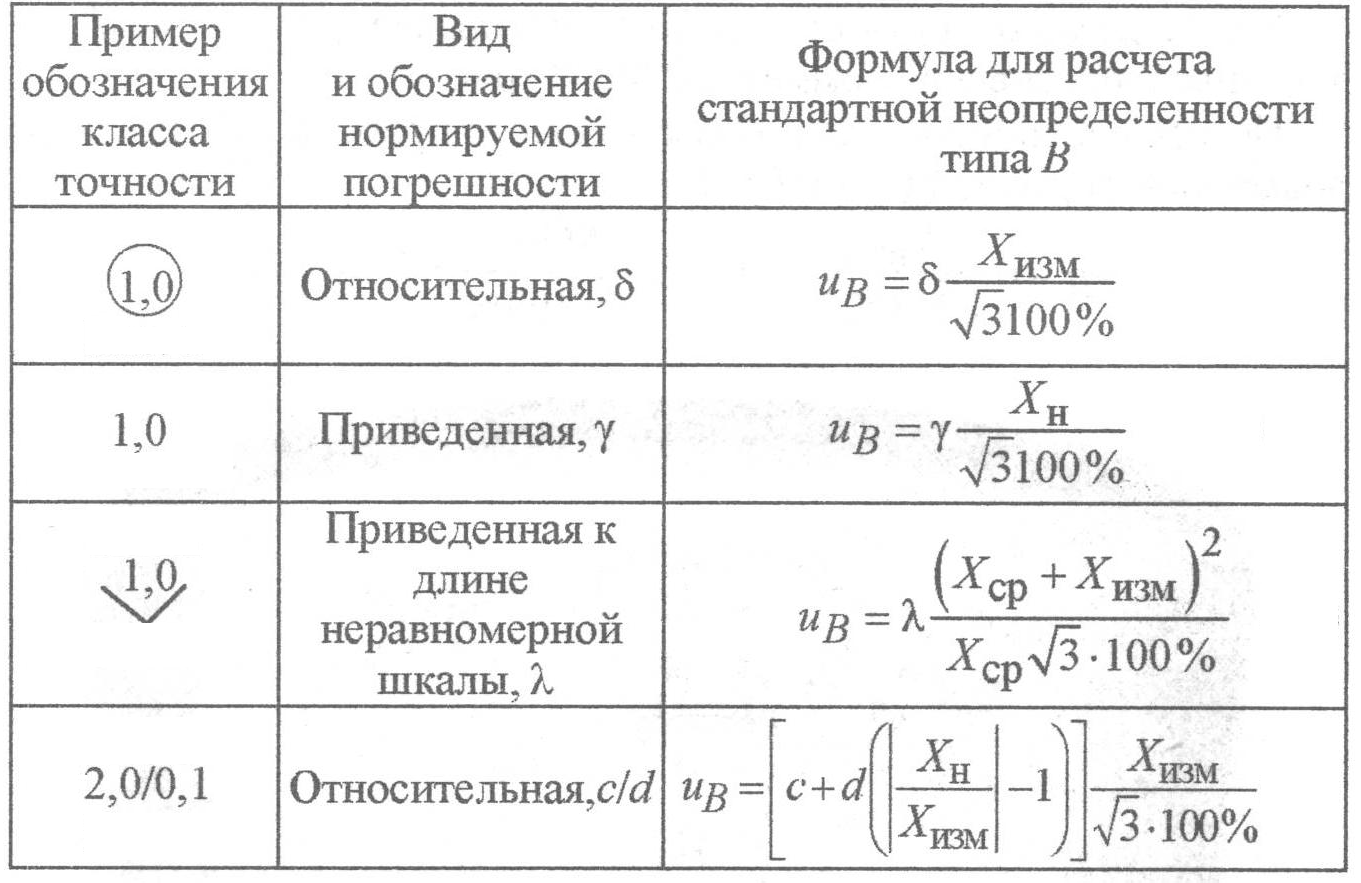
При р →1 это распределение стремится к прямоугольному, а при р → 0 — к

### треугольному



* Если имеется информация о классе точности, то можно воспользоваться зависимостями, представленными в таблице 2

Таблица 2

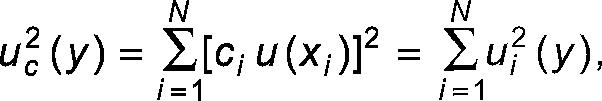


## Оценивание суммарной стандартной неопределенности результата измерения

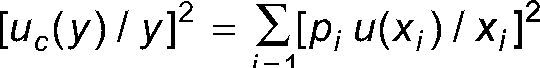
### Коэффициенты чувствительности

Неопределенность каждой входной величины ***u(xi)*** оказывает определенный вклад в неопределенность результата измерения ***ui (y)***. Этот вклад определяется в зависимости от *уравнения измерения* посредством умножения стандартной не- определенности входной величины на коэффициент чувствительности ***сi*** :

### ui (y). = u(xi)• сi ,

***Суммарная стандартная неопределенность для некоррелированных входных величин***

* Если модель измерения имеет вид степенной зависимости, то

* Если модель измерения является суммой или разностью входных величин,

то

Y = ΣpiXi u 2(y) =Σp 2•u2(x ).

c

i

i

## Построение бюджета неопределенности

Бюджет неопределенности – это таблица, в которой сведены все данные по учитываемым входным величинам, их оценкам, оценкам их стандартных неоп- ределенностей, вкладов в суммарную неопределенность, коэффициентам чувст- вительности, расширенной неопределенности. Возможный вид бюджета пред- ставлен в таблице 3

Таблица 3

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Входная величина | Оценка входной величи- ны | Стандарт- ная неоп- ределен- ность | Вид неопре- деленности, распределе- ние | Число степеней свободы | Коэффици- ент чувст- вительно- сти | Вклад в суммар- ную стан- дартную неопреде-  ленность |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| X |  |  |  |  |  |  |
| Δх |  |  |  |  |  |  |
| *а* |  |  |  |  |  |  |
| Δнсп |  |  |  |  |  |  |
| Δд |  |  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Выходная величина - ре- зультат измере- ния, **Y** | Оценка выход- ной ве- личины, ***y*** | Стандарт- ная сум- марная не- определен- ность,  ***u(y)*** | Эффектив- ное  число степеней свободы, | Уровень доверия, ***P*** | Коэффици- ент  охвата,  ***k*** | Расши- ренная неопреде- ленность, ***U*(y)** |
|  |  |  |  |  |  |  |

## ния

* + 1. **Оценивание расширенной неопределенности результата измере-**

***Расширенная неопределенность U*(*y*) -** произведение суммарной стандарт-

ной неопределённости ***u(y)*** и коэффициента охвата ***k.***

Тогда ***результат измерений*** представляется выражением:

***Y = y±U(y)***, или ***y-U(y)≤Y≤ y+U(y)***

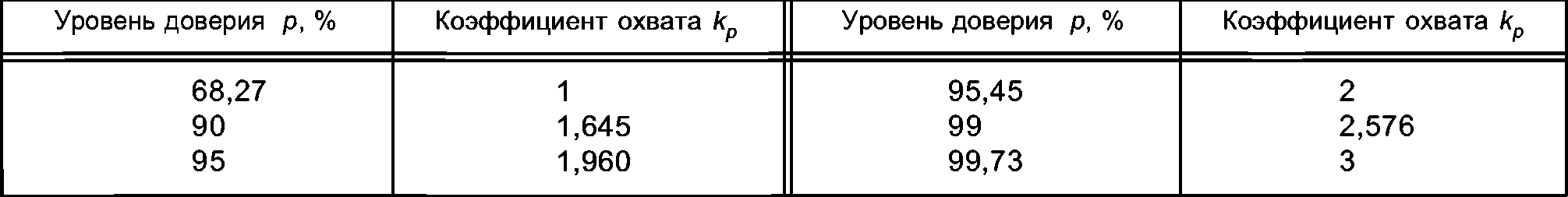
## Определение коэффициента охвата

Значение коэффициента охвата ***k*** *выбирают на основе уровня доверия* ***P****, требуемого для интервала. Обычно* ***k*** *принимает значения от 2 до 3, однако в особых случаях значение* ***k*** *может* находиться вне этих границ.

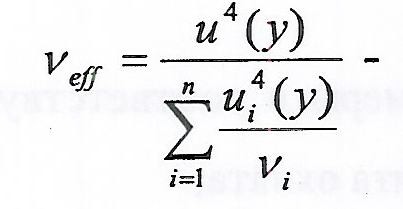
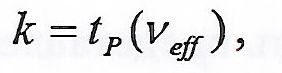
* + - 1. ***Если распределение вероятностей с оценками его параметров у и ис(у) близко к нормальному,*** *все неопределенности оценены по типу А, а число эффективных степеней* свободы при оценивании ***ис(у)*** достаточно велико, то на

практике принимают **k = 2** соответствует уровню доверия **95 %**, или **k = 3** — интервалу с уровнем доверия, близким **к 99 %.**

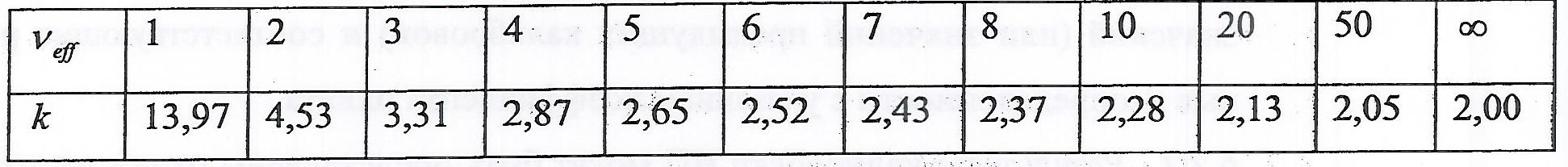
### Также можно подходить независимо от закона распределения состав- ляющих и типа их определения (А или В), если ни одна из них не является доминирующей, и их несколько

Более подробные данные для нормального закона распределения в табл. 4. Таблица 4

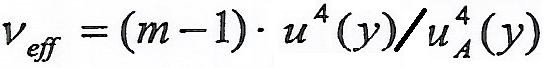
* + - 1. ***При многократных измерениях с небольшим n*** коэффициент охвата ***k*** принимают равным квантилю распределения Стьюдента при вероятности охва- та ***Р*** и *эффективном числе степеней свободы* ***νeff***



Здесь ***νi*** число степенней свободы при оценке ***i-***входной величины.

Значения коэффициента охвата для различных ***νeff*** представлены в таблице5 Таблица 5

* При оценке неопределенности входной величины по типу А при n ***по- вторных*** измерениях число степеней свободы ***νi*** принимается равным ***n*-1.**
* При оценке неопределенности входной величины по типу В число степе- ней свободы ***νi*** принимается равным ***∞.***
* Если по типу А оценивается неопределенность только одной входной ве- личины, то



* Если есть информация о нормальном законе распределения Y или нет ни- какой информации, то рекомендуется принять ***k*** = 2 (при этом *P* = 0.95).
  + - 1. ***В случае, когда все неопределенности определены по типу В при рав- номерном законе***, тогда значение коэффициента охвата определяется из табли- цы 6.

Таблица 6

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| **u2(y)/u1(y)** | **1 … 0,8** | **0,7** | **0,6** | **0,5** | **0,4** | **0,3** | **0,2** | **0,1** |
|  |  |  |  |  |  |  | |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  | |  |  |
| ***k*** | 1,94 | 1,93 | 1,92 | 1,90 | 1,87 | 1,82 |  | 1,75 | 1,68 |
|  |  |  |  |  |  |  | |  |  |

Здесь *u*1(*y*) и *u*2(*y*) два доминирующих равномерно распределенных вклада в неопределенность по типу В, причем *u*2(*y*) ≤ *u*1(*y*)

* + - 1. ***В случае, когда есть ОДНА доминирующая неопределенность по ти- пу В, распределенная по равномерному закону распределенная,*** значение ко- эффициента охвата определяется : *k* = p·1,73. Таким образом, для вероятности охвата p = 95%, соответствующий коэффициент охвата составляет *k = 1,65.*
      2. Если есть ***ДВЕ доминирующие неопределенности, которые описыва- ются прямоугольными распределениями*** с полуширинами интервалов *a1 и a2 , результатом их свертки является симметричное* ***трапецеидальное*** распреде- ление с полушириной основания и вершины, соответственно:

*а = a1 + a2* и *b = a1 − a2*.

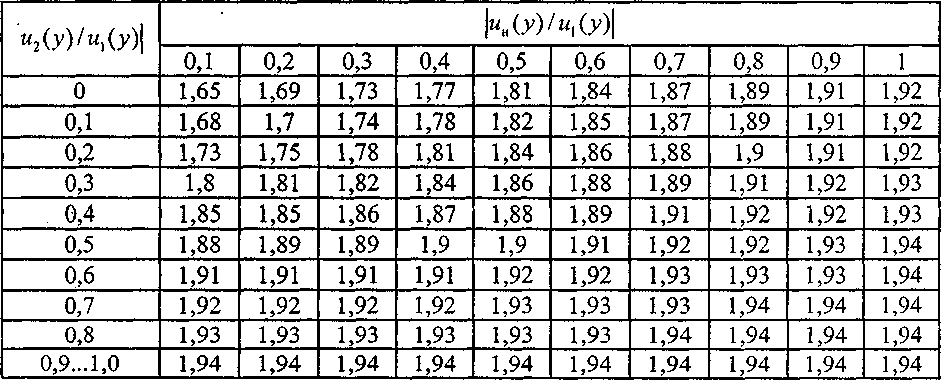
Тогда определяют коэффициент *β = b/a* и рассчитывают:



* + - 1. ***При наличии нормально распределенных*** вкладов неопределенности их объединяют в единый вклад ***u*н(*y*).** Тогда значение ***k*** определяют из таблицы 7 в зависимости от:

***- u*н(*y*) / *u*1(*y*) –** отношение вклада нормально распределенных величин к наибольшему вкладу равномерно распределенной величины

- ***u*2(*y*) / *u*1(*y*) -** отношение второго по величине равномерно распределенно- го вклада к наибольшему равномерно распределенному вкладу.

Таблица 7

## Запись результата измерений

Результат измерений сопровождается записью, котора формулируется сле- дующим образом;

«Измеренное значение величины равно ***Y = y±U(Y)***, где число, стоящее по- сле знака ± расширенная неопределенность *U(y)* = *ku(y*), полученная для сум- марной стандартной неопределённости *u*(*y*) =… и коэффициента охвата *k* = …., соответствующего уровню доверия …. % для распределения».

## Задание 2. Многократное измерение

* + - * 1. **Условие задания**

При многократном измерении одной и той же физической величины полу- чена серия из 24 результатов измерений *Qi; i * [1...24]. Эти результаты после внесения поправок представлены в таблице 8. Определить результат измерения, считая, что влиянием систематических погрешностей, и других входных вели- чин (влияющих факторов), за исключением погрешности в результате дискрет- ности отсчета, можно пренебречь.

Таблица 8 – Исходные данные

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Предпо- следняя цифра шифра | Последняя цифра шифра | | | | | | | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 |  | |
| 1 | 482 | 483 | 483 | 484 | 483 | 483 | 484 | 484 | 484 | 481 | 482 | 495 |
| 2 | 483 | 485 | 482 | 484 | 483 | 485 | 482 | 482 | 481 | 482 | 492 | 484 |
| 3 | 483 | 482 | 482 | 486 | 483 | 484 | 484 | 481 | 480 | 481 | 483 | 494 |
| 4 | 482 | 485 | 486 | 486 | 483 | 483 | 483 | 483 | 481 | 480 | 492 | 486 |
| 5 | 483 | 484 | 485 | 482 | 484 | 483 | 485 | 485 | 484 | 483 | 481 | 494 |
| 6 | 486 | 486 | 485 | 483 | 484 | 485 | 486 | 480 | 485 | 485 | 495 | 484 |
| 7 | 485 | 484 | 486 | 482 | 483 | 484 | 484 | 481 | 485 | 485 | 485 | 492 |
| 8 | 484 | 485 | 487 | 483 | 482 | 484 | 482 | 483 | 484 | 484 | 492 | 483 |
| 9 | 484 | 486 | 484 | 484 | 481 | 485 | 484 | 482 | 483 | 485 | 482 | 493 |
| 0 | 483 | 480 | 487 | 482 | 481 | 483 | 486 | 483 | 483 | 484 | 493 | 480 |
|  | 484 | 492 | 487 | 492 | 483 | 493 | 487 | 493 | 485 | 492 |  | |
| 493 | 484 | 495 | 484 | 495 | 484 | 495 | 484 | 492 | 484 |

## Указания по выполнению

1. Серию экспериментальных данных студент выбирает из таблицы 8 по предпоследней и последней цифрам шифра. Например, шифру 96836 соответст- вует серия, включающая все результаты измерений, которые приведены в стро- ке 3 и столбце 6.
2. Результат измерения следует получить с вероятностью охвата 0,95.

## Порядок расчета

Обработка экспериментальных данных проводится по следующему алго- ритму:

* составление модельного уравнения;
* оценивание входных величин и стандартных неопределенностей входных величин;
* оценка числового значения измеряемой величины (условного значения);
* вычисление коэффициентов чувствительности и вкладов неопределенно- сти входных величин в неопределенность измеряемой величины;
* вычисление суммарной стандартной неопределенности;
* составление бюджет неопределенности;
* определение эффективного числа степеней свободы и расширенной не- определенности;
* запись результата измерения с учетом неопределенности

## Составление модельного уравнения

Модельное уравнение – это математическая связь между всеми величина- ми, о которых известно, что они причастны к измерению. С учётом исходных данных задачи и примечания к условию модельное уравнение может быть пред- ставлено в следующем виде:

Y = Q + Δд, (2)

где Y – значение измеряемой величины; Q – показание прибора;

Δд –погрешность от дискретности отсчёта (определяется по цене деления шкалы прибора.

## Оценка значений входных величин и их стандартных неопреде- ленностей

### Оценка значения входной величины Q и ее стандартной неопре- деленности

Измеряемая величина определяется путем многократных измерений, по- этому значение величины определяется как среднее арифметическое результа- тов измерений, а стандартное отклонение определяется по типу А как среднее квадратическое отклонение среднего арифметического. Алгоритм следующий.

1. Определить точечные оценки результата измерения: среднего арифмети- ческого *Q* и среднего квадратического отклонения *SQ* результата измерения.
2. Обнаружить и исключить ошибки. Для этого необходимо:

* вычислить наибольшее по абсолютному значению нормированное отклонение

**  ;

max *Qi*  *Q*

*S*

*Q*

* задаться доверительной вероятностью *Р* и из соответствующих таблиц (например, таблица В.1) с учетом *q* = 1 – *Р* найти соответствующее ей теорети- ческое (табличное) значение *νq;*
* сравнить *ν* с *νq.*

Если *ν* > *νq,* то данный результат измерения *Qi* является ошибочным, он должен быть отброшен. После этого необходимо повторить вычисления по пунктам 1 и 2 для сокращенной серии результатов измерений. Вычисления про- водятся до тех пор, пока не будет выполняться условие *ν* < *νq*.

При этом значение *q* величиы *Q* будет равняться среднему арифметическо- му значению результатов измерений после исключения ошибочных результа- тов: *q* = *Q* .

1. Определить стандартную неопределенность входной величины *Q* как среднее квадратическое отклонение среднего арифметического из выражения:

*u*(*Q*)  *SQ* ,

*n*

где

*SQ* - среднее квадратическое отклонение результатов измерений,

полученное после исключения ошибочных результатов;

*n* – оставшееся после исключения ошибочных результатов число измерений;

1. Проверить гипотезу о нормальности распределения оставшихся результа- тов измерений.

Проверка выполняется по составному критерию. Применив критерий 1, следует:

* вычислить отношение

*n*

 *Qi*  *Q*

*d*  1

*n (Q*  *Q)*



*n*

2

*i*

1

;

* задаться доверительной вероятностью *P1* (рекомендуется принять *P1* = 0,98) и для уровня значимости *q1 = 1 – Р1* по соответствующим таблицам (на- пример, таблица Г.1) определить квантили распределения *d1-0,5ql* и *d0,5q1*;
* сравнить *d с d1-0,5ql* и *d0,5q1.*

Если выполняется неравенство *d1-0,5q1 < d < d0,5q1*, то гипотеза о нормальном законе распределения вероятности результата измерения согласуется с экспери- ментальными данными.

Применив критерий 2, следует:

* задаться доверительной вероятностью *Р2* (рекомендуется принять *Р2* = 0,98) и для уровня значимости *q2* = 1 – *Р2* с учетом *n* определить по соответст- вующим таблицам (например, таблица Г.2) значения *m* и *Р\*;*
* для вероятности *Р\** из таблиц для интегральной функции нормированного нормального распределения *Ф(t)* (например, таблица Б.1) определить значение *t* и рассчитать *Е = t∙SQ*.

Если не более *m* разностей | *Q* i - *Q* | превосходит *Е*, то гипотеза о нормаль- ном законе распределения вероятности результата измерения согласуется с экс- периментальными данными, закон можно признать нормальным с вероятностью

*Р0*  (*Р1 + Р2* – 1).

Если хотя бы один из критериев не соблюдается, то гипотезу о нормально- сти распределения отвергают.

## Оценка значения входной величины Δд и ее стандартной неопределенности

Значение величины Δд определяется, как середина интервала погрешно- сти от дискретности отсчёта. Данная погрешность определяется как ± половина цены деления. Из анализа исходных данных видно, что цена деления прибора: с

= 1, следовательно, погрешность от дискретности отсчета: ±0,5 с = ±0,5·1 = ±0,5. Поэтому значение Δд равн середине диапазона ее возможного изменения, т.е. 0.

Стандартная неопределенность Δд оценивается как неопределенность по типу В. Поскольку нет информации о возможном законе распределения этой ве- личины, принимаем закон равномерным, тогда

*u*(Δд) = Δд / .

3

## Оценка значения выходной величины

Значение (опорное) выходной величины (результата измерения) определя- ется путем подстановки найденных значений входных величин в выражение (2).

## Вычисление коэффициентов чувствительности и вкладов неоп- ределенностей входных величин в неопределенность измеряемой величины

Значения коэффициентов чувствительности определяются в общем слу- чае, как:

Сi = *дY/дXi* ,

где *Xi* –входная величина уравнения измерения (2).

Поскольку уравнение (2) аддитивно, значение всех коэффициентов чув- ствительности раны: СQ = Сд = 1.

Следовательно вклады неопределенностей входных величин в неопреде- ленность измеряемой величины равны значениям неопределенностей входных величин.

## Вычисление суммарной стандартной неопределенности результа- та измерения

Принимая входные величины уравнения измерения в качестве независи- мых величин, суммарную стандартную неопределенность результата измерения определяем из уравнения:

*u*(*Y* )  ,



*u*(*Q*)  *C*   

2

*Q*

*u*( )  *С*

*Д Д*

2

## 2.2.9. Составление бюджета неопределенности

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Входная | Оценка | Стандарт- | Вид неопре- | Число | Коэффици- | Вклад в |
| величина | входной | ная неоп- | деленности, | степеней | ент чувст- | суммар- |
|  | величи- | ределен- | распределе- | свободы | вительно- | ную стан- |
|  | ны | ность | ние |  | сти | дартную |
|  |  |  |  |  |  | неопреде- |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  | ленность |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| Q |  |  |  |  |  |  |
| Δд |  |  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Выходная Величина – результат измерения,  **Y** | Оценка выход- ной ве- личины,  ***y*** | Стандарт- ная сум- марная не- определен- ность,  ***u(Y)*** | Эффектив- ное число степеней свободы, | Уровень доверия, ***P*** | Коэффици- ент охвата, ***k*** | Расши- ренная неопреде- ленность,  ***U*(Y)** |
|  |  |  |  |  |  |  |

* + 1. **Вычисление расширенной неопределённости**

Согласно заданию значение вероятности охвата *P* = 0,95, которое соответ- ствует «результатам измерения общего назначения».

Анализируя входные величины, отмечаем, что имеют место две состав- ляющие суммарной неопределенности, одна из которых определена по тира А и имеет нормальный закон распределения, а другая – по типу В и имеет равно- мерный закон распределения.

В этом случае коэффициент охвата *k* рекомендуется принимать равным квантилю распределения Стьюдента (например, таблица 5) при вероятности ох- вата *Р* = 0,95 и эффективном числе степеней свободы ***νeff*,** определяемом по формуле:





При этом расширенную неопределённость определяем по формуле:

*U*(*Y*) = *ku*(*Y*).

Округляем данное значение по правилам округления результатов измере- ний (до 1 значащей цифры, если первая значащая цифра больше 3, и до 2 зна- чащих цифр, если первая цифра меньше или равна 3).

* + 1. **Запись результата измерения с учётом неопределённости**. Результат измерений сопровождается записью, котора формулируется сле-

дующим образом;

«Измеренное значение величины равно ***Y = y±U(Y)***, где число, стоящее по- сле знака ± расширенная неопределенность *U(Y)* = *ku(Y*), полученная для сум- марной стандартной неопределённости *u*(*Y*) =… и коэффициента охвата *k* = …., соответствующего уровню доверия …. % для ……….распределения при эффек- тивном числе степеней свободы *νeff* = …»

## Задание 3. Обработка результатов серий измерений

* + - * 1. **Условие задания**

При многократных измерениях одной и той же величины получены две се- рии по 12 (*nj*) результатов измерений в каждой. Эти результаты после внесения поправок представлены в таблице 8. Вычислить результат многократных изме- рений, принимая, что влиянием систематических погрешностей, и других вход- ных величин (влияющих факторов), включая погрешности в результате дис- кретности отсчета, можно пренебречь.

## Указания по выполнению

1. Серии в таблице 8 студент выбирает по предпоследней и последней циф- рам шифра: например, шифру 96836 соответствуют все результаты измерений, которые приведены в строке 3 (серия 1) и столбце 6 (серия 2).
2. Результат измерения следует получить с достоверностью 0,95.
3. Приния во нимание условие, согласно которому можно пренебречь всеми влияющими факторами, уравнение измерения включает только одну входную величину – результат измерения *Q* и может быть представлно в виде:

Y = Q.

В этом лучае суммарная стандартная нелпределенность результата измере- ния равняется стандартной неопределенностии отсчетов при многократном из- мерении: *u*(*Y*) = *u*(*Q*).

## Порядок расчета

Обработку результатов двух серий измерений целесообразно осуществлять по алгоритмам с учетом 10...15 < *n* < 40...50.

1. Обработать экспериментальные данные в каждой *j*-й серии отдельно по алгоритму, изложенному в задании 2 (алгоритм обработки многократных изме- рений), при этом:

* определить оценки результата измерения *Qj* и среднего квадратического отклонения *SQJ*;
* обнаружить и исключить ошибки;
* проверить гипотезу о нормальности распределения оставшихся ре- зультатов измерений.

1. Проверить значимость различия средних арифметических серий по сле- дующему алгоритму:

* вычислить моменты закона распределения разности:

*G* = *Q* 1 - *Q* 2,

*SG*  ;

*SQ*12  *SQ*12

*n*1

*n*2

* задавшись доверительной вероятностью *Р*, определить из соответс- твующих таблиц интегральной функции нормированного нормального распре- деления *Ф(t)* (например, таблица Б.1) значение *t;*
* сравнить *|G| с t  SG.*

Если |*G|*  *t ∙ SG,* то различие между средними арифметическими в сериях с доверительной вероятностью *Р* можно признать незначимым.

1. Проверить равнорассеянность результатов измерений в сериях по сле- дующему алгоритму:

 *S*

*S*

 *1*

* определить значение **

шее);

*2 2*

*Q1 Q 2*

(делить большее значение на мень-

* задавшись доверительной вероятностью *Р*, определить из соответ- ствующих таблиц (например, таблица Е.1) значение аргумента интегральной функции распределения вероятности Фишера *0;*
* сравнить ** с *0*.

Если ** < *0*, то серии с доверительной вероятностью *Р* считают рассеянны-

ми.

1. Обработать совместно результаты измерения обеих серий с учетом того,

однородны серии или нет.

Если серии однородны (равнорассеянны с незначимым различием средних арифметических), то все результаты измерения следует объединить в единый массив и выполнить обработку по следующему алгоритму:

* определить оценку результата измерения *Q* и стандартную неопределен- ность *u*(*Y*):

*Q*  *n*1*Q*1  *n*2*Q*2  *n*1  *n*2 ;

*u*(*Y* ) 

1

 

*n*

 1*S* 2

* *n*

 1*S* 2

* *n* *Q*

 *Q* 2  *n* *Q*

 *Q* 2 ;

*n*1  *n*2

*n*1  *n*2  1

*Q*1 2

*Q* 2 1 1 2 2

– задавшись вероятностью охвата *Р*, определить из таблиц распределения Стьюдента (например, таблица Д.1) значение коэффициента охвата *k* = *t* для

1

2

числа степеней свободы **

*eff*

 22

*n*1

 11  *n*

 11 ;

* определить расширенную неопределенность: *U*(*Y*)*= ku(Y).*

Если серии не равнорассеянны с незначимым различием средних арифме- тических, то совместную обработку результатов измерений следует выполнять с учетом весовых коэффициентов по следующему алгоритму:

* определить оценки результата измерения *Q* и стандартной неопределен-

ности u(Y):

*u*(*Y* )  1 



2



1 *S* 

2

*j*

1

*SQ*1  *SQ* 2

;

*n*  *S* 2  *n*  *S* 2

1 *Q* 2 2 *Q*1

*2 S 2*



*2 S 2*  *n*

*Q*   *S 2* *Q*

*j*

 *j Q ;*

*S 2 j*

*1 j 1 Qj*

* аналогично предыдущему случаю, задавшись вероятностью охвата *Р*, оп- ределить коэффициент охвата *k* = *t* и расширенную неопределенность *U*(*Y*).

Если различие средних арифметических в сериях признано значимым, то результаты измерений в каждой серии следует обработать раздельно по алго- ритму многократных измерений.

## Задание 4. Функциональные преобразования результатов измерений (косвенные измерения)

* + - * 1. **Условие задания**

При многократных измерениях независимых величин *X* и *Y* получено по 12

1. результатов измерений. Эти результаты после внесения поправок представ- лены в таблице 8. Определить результат вычисления *Z = f (X, Y),* (вид функции *Z* и характер величин *X, Y, Z* представлены в таблице 9). Влиянием систематиче- ских погрешностей, и других входных величин (влияющих факторов), включая погрешности в результате дискретности отсчета, можно пренебречь

Таблица 9 – Исходные данные

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Последняя цифра  шифра | Z=f (X,Y) | Характер и единицы величин | | |
| X | Y | Z |
| 1 | Z=X/Y | напряжение, мВ | сила тока, мкА | сопротивление |
| 2 | Z=X2Y | сила тока, мкА | сопротивление, Ом | мощность |
| 3 | Z=2X/Y2 | перемещение, м | время, мс | ускорение |
| 4 | *Z*  2* XY* | индуктивность, мкГн | емкость, мкФ | период колебаний |
| 5 | Z=3X/4∙Y3 | масса, мкг | радиус сферы, мкм | плотность  материала |
| 6 | Z=X∙Y2/2 | индуктивность,  мкГн | сила тока, мА | энергия маг-  нитного поля |
| 7 | Z=0,5X2/Y | заряд, пКл | емкость, пФ | энергия  конденсатора |
| 8 | Z=X∙Y/  (X+Y) | сопротивление,  Ом | сопротивление, Ом | сопротивление |
| 9 | Z=X/(Y+10) | ЭДС, мВ | сопротивление, Ом | сила тока |
| 0 | *Z*  2* X Y* | масса, г | жесткость, Н/м | период колебаний |

## Указания по выполнению

1. Значения *X* и *Y* студент выбирает соответственно по предпоследней и по- следней цифрам шифра: например, шифру 96836 соответствуют значения *X,* представленные в строке 3, и значения *Y,* представленные в столбце 6 таблицы 8.
2. Вид уравнения измерения (функции *Z*) студент выбирает по последней цифре шифра, например, шифру 96836 соответствует функция *Z*, представлен- ная в строке 6 таблицы 9.
3. При определении *Z* следует предварительно выразить значения величин *X*

и *Y* в единицах системы СИ.

## Порядок расчетa

Обработку экспериментальных данных при функциональном преоб- разовании результатов измерений целесообразно осуществлять по следующему алгоритму, принимая во внимание, что *n* = 12, следовательно, порядок расчетов и их содержание определяются условием 10...15 < *n* < 40...50:

* + составление модельного уравнения;
  + оценивание входных величин и стандартных неопределенностей входных величин;
  + оценка числового значения измеряемой величины (условного значения);
  + вычисление коэффициентов чувствительности и вкладов неопределенно- сти входных величин в неопределенность измеряемой величины;
  + вычисление суммарной стандартной неопределенности;
  + составление бюджет неопределенности;
  + определение эффективного числа степеней свободы и расширенной не- определенности;
  + запись результата измерения с учетом неопределенности

.

## Составление модельного уравнения

Записать уравнение измерения в виде функции, представленной в таблице

9:

Z = *f*(X, Y) (3)

## Оценивание входных величин и стандартных неопределенностей входных величин

Обработать результаты измерений величин *X* и *Y* отдельно по алгоритму обработки результатов многократных измерений, изложенному во втором зада- нииих при этом:

* + определить средние арифметические значения входных веричин *X, У* и

значения стандартных отклонений (средних квадратическ отклонений) *Sx, Sy*;

* + обнаружить и исключить ошибки;
  + проверить гипотезу о нормальности распределения оставшихся ре- зультатов измерений;
  + принять за значения входных величин их средние арифметические значе- ния, а за стандартную неопределенность (по типу А) – средние квадратические отклонения средних арифметических:

x = *X* ; y = *Y* ; *u*(*X*) = *Sx / nX* ; *u*(*Y*) = *Sy*/ *nY* ,

где *nx, ny* – числа оставшихся результатов измерений соответственно *X* и *Y*

после исключения ошибок

## 2.4.6. Оценка числового значения измеряемой величины (условного значения)

Определить значение *z* выходной величины *Z*, подставив в выражение (3) значения входных величин:

*z*  *f* *x,y* 

*f* *X,Y* .

## Определение поправки

 2 *f* 2 2 *f* 2 

*θ*  0*,*5*X* 2  *SX*  *Y* 2  *SY*  .





## Вычисление коэффициентов чувствительности и суммарной стан- дартной неопределенности результата измерений

*u*(*Z* )  ,

 *f*

*X*  *u*( *X* )  *Y*  *u*(*Y* )

 2

 *f*

 2

## Составление бюджет неопределенности

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Входная величина | Оценка входной величи- ны | Стандарт- ная неоп- ределен- ность | Вид неопре- деленности, закон рас- пределения | Число степеней свободы  *n*-1 | Коэффици- ент чувст- вительно- сти | Вклад в суммар- ную стан- дартную  неопреде- ленность |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| X |  |  |  |  |  |  |
| Y |  |  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Выходная вели- чина – результат измерения,  **Z** | Оценка выход- ной ве- личины,  ***z*** | Стандарт- ная сум- марная не- определен- ность,  ***u(Z)*** | Эффектив- ное число степеней свободы, | Уровень доверия, ***P*** | Коэффици- ент охвата, ***k*** | Расши- ренная неопреде- ленность,  ***U*(Z)** |
|  |  |  |  |  |  |  |

* + 1. **Определение эффективного числа степеней свободы**

Если законы распределения вероятности результатов измерения *X* и *Y* при- знаны нормальными, то коэффициент охвата *k* можно определить для принятой вероятности охвата *Р* из таблиц для распределения Стьюдента (например, таб- лица Д.1). При этом число степеней свободы *νeff* определяется из выражения

 *f*

2  *f*

2  2  1

 *f*

4 1

 *f*

4 

* eff*

  *X*  *u*( *X* ) 

  *Y*  *u*(*Y* ) 

 *:* *n*

1   *X*

 *u*( *X* ) 

 *n*  1   *Y*  *u*(*Y* )   .



   

 *x* 

 *y* 

 

Если гипотеза о нормальности распределения результатов измерения *X* или (и) *Y* отвергается, то *k* целесообразно определить из неравенства Чебышева:

*P*  1  1

*k* 2 .

## Определение расширенной неопределенности

Значение расширенной неопределенности результата измерений определя- ется из выражения

*U*(*Z*) *= ku*(*Z*).

## Запись результат измерений.

Результат измерений сопровождается записью, котора формулируется сле- дующим образом;

«Измеренное значение величины равно *Z =* z*+θ ±U(Z)*, где число, стоящее после знака ± расширенная неопределенность *U(Z)* = *ku(Z*), полученная для суммарной стандартной неопределённости *u*(*Z*) =… и коэффициента охвата *k* =

…., соответствующего уровню доверия …. % для … распределения при эффек- тивном числе степеней свободы *νeff* = …»

## Задание 5. Обработка экспериментальных данных при изучении зависимостей

### Условие задания

При многократных совместных измерениях величин *X* и *Y* получено по 20

*(n)* пар результатов измерений. Эти результаты после внесения поправок пред- ставлены в таблице 4. Определить уравнение регрессии *Y* по *X: Y = f (X).*

### Указания по выполнению

1. Серии экспериментальных данных студент выбирает из таблицы 10 по пред- последней и последней цифрам шифра. Например, шифру 96836 соответствуют серии, включающие все результаты измерений *X* (числитель) и *Y* (знаменатель), которые представлены в строке 3 и столбце 6.
2. Считать, что результаты измерений не содержат ошибок.

Таблица 10 – Исходные данные

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Предпоследняя  цифра шифра | Последняя цифра шифра | | | | | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 10 | 21 | 32 | 42 | 49 | 58 | 69 | 77 | 87 | 96 |
| 2 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 110 | 120 | 131 | 143 | 149 | 158 | 170 | 180 | 188 | 195 |
| 3 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 205 | 215 | 226 | 237 | 245 | 258 | 265 | 275 | 286 | 293 |
| 4 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 312 | 321 | 330 | 342 | 355 | 364 | 372 | 379 | 386 | 395 |
| 5 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 405 | 418 | 431 | 442 | 449 | 456 | 468 | 475 | 485 | 492 |
| 6 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 505 | 518 | 525 | 530 | 541 | 550 | 561 | 569 | 575 | 583 |
| 7 | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| 602 | 613 | 620 | 631 | 639 | 648 | 656 | 662 | 667 | 682 |
| 8 | 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 696 | 710 | 715 | 722 | 732 | 742 | 752 | 762 | 770 | 779 |
| 9 | 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 795 | 802 | 812 | 822 | 832 | 840 | 850 | 858 | 868 | 870 |
| 0 | 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |
| 880 | 891 | 901 | 912 | 922 | 935 | 943 | 957 | 966 | 975 |

### Порядок расчета

Обработку экспериментальных данных при изучении зависимостей целесо- образно осуществлять по следующему алгоритму.

1. В осях координат *X* и *Y* построить *n* экспериментальных точек с коорди- натами *Xi ,Yi, i * (1…20) и по характеру расположения точек принять гипотезу о виде уравнения регрессии *Y* на *X.*

В качестве уравнения регрессии целесообразно использовать полином сте- пени *m:*

*Y = А + В∙Х + С∙Х2 + ... + К∙Хm.*

В первом приближении для решения данной задачи рекомендуется принять

*m* = 1, т.е.

*Y = А + В∙Х.*

1. Определить параметры уравнения регрессии по методу наименьших квадратов. Для этого необходимо:

– составить систему уравнений по числу рассчитываемых параметров:

  0 ;

*A*

  0 ;

*B*

  0 ; … ;

*C*

  0 ,

*K*

где

   *Y*

1

*n*

*i*

 *A*  *B*  *X*  *C*  *X* 2  ...  *K*  *X m* 2 .

Например, для линейного уравнения регрессии система уравнений имеет

вид:

*n n n*

*B* *X* 2  *A* *X*   *X Y*

*i i i i*

1 1 1

*n n*

*B* *Xi*  *nA*  *Yi*

1 1

– решить систему уравнений и определить неизвестные параметры. Напри- мер, для линейного уравнения регрессии решение имеет вид:

*n* *X Y*

  *X* *Y*  *X* 2 *Y*

*  *X*

 *X Y*

*B*  *i i*

*i i* ; *A*  *i i*

*i i i* .

*n* *X* 2   *X* 2

*i*

*i*

*i*

*i*

*n* *X* 2  

*X* 2

1. Проверить правильность выбора вида уравнения регрессии. Для этого следует применить непараметрические критерии серий и инверсий:



* рассчитать отклонения экспериментальных значений *Yi* от соответс- твующих значений *Ypi*, рассчитанных для того же аргумента *Xi* по полученному уравнению регрессии:

*Yi = Yi – Ypi;*

* построить в осях координат *X, Y* полученные значения *Yi* для со- ответствующих *Xi*;
* записать последовательность значений *Yj* по мере возрастания *Xj, Xj  [l,n];*
* рассчитать число серий *N* в полученной последовательности *Yj* (под се- рией в данном случае понимают последовательность отклонений одного знака, перед и после которой следуют отклонения противоположного знака или нет вообще никаких отклонений);
* задавшись доверительной вероятностью *Р* (уровень значимости ** = 1 – Р) для *n* = 20 определить по соответствующей таблице (например, таблица Ж.1) допустимые границы *N1-0,5* и *N0,5;*
* рассчитать число инверсий *А* в полученной последовательности *Yj* (под инверсией понимается событие, заключающееся в том, что *Yj > Yjk* при *k > j):*

*n*1



*A*  *Aj* ,

1

где *AJ* – это число инверсий *j*-гo члена последовательности, т.е. число чле- нов последовательности, которые, будучи расположенными в последовательно- сти после *j*-го члена, имеют значение меньшее, чем *Yj;*

* задавшись доверительной вероятностью *Р* (уровень значимости ** = 1 – *Р*) для *n* = 20 определить по соответствующей таблице (например, таблица И.1) до- пустимые границы *A1-0,5* и *A0,5;*
* сравнить *А* с *A1-0,5* и *A0,5.*

Если выполняются неравенства

*N1-0,5 < N  N0,5; A1-0,5 < A  A0,5,*

то с выбранной доверительной вероятностью *Р* можно считать, что отклонения экспериментальных значений *Yi,* от соответствующих значений *Yрi* найденного уравнения регрессии являются случайными, не содержат аддитивного, мульти- пликативного или колебательного трендов, т.е. рассчитанное уравнение регрес- сии достоверно описывает экспериментально исследуемую зависимость между величинами *X* и *Y.*

Если хотя бы одно из указанных выше неравенств не выполняется, то сле- дует пересмотреть выбор вида уравнения регрессии. В частности, можно увели-

чить степень полинома *m* на единицу и повторить вычисления по описанному выше алгоритму. Например, для полинома второй степени:

*Y = А + В∙Х + С∙Х2.*

С целью определения параметров уравнения регрессии в данном случае не- обходимо решить систему уравнений:

*n*

*C*  *X 4*

*i*

*1*

*n*

* *B* *X 3 1*

*n*

*n*

*i*

*i*

* *A* *X 2 1*

*n*

*n*

*i*

*i*

*i*

*n*

  *X*

*1*

*n*

*2Y ;*

*C* *X 3*

*i*

*1*

*n*

* *B* *X 2 1*

*n*

* *A* *X i 1*

  *X*

*1*

*n*

*i Yi ;*

*C* *X 2*

*i*

*1*

* *B* *X i 1*
* *nA*  *Yi*

*1*

## ЛИТЕРАТУРА

* 1. ГОСТ 34100.1-2017/Руководство ИСО/МЭК 98-1:2009 Неопределен- ность измерения. Часть 1. Введение в руководства по неопределенности изме- рения
  2. ГОСТ 34100.3-2017/Руководство ИСО/МЭК 98-3:2008 Неопределен- ность измерения. Часть 3. Руководство по выражению неопределенности изме- рений
  3. Введение к «Руководству по выражению неопределенности измерения» и сопутствующим документам. Оценивание данных измерений / Пер. с анг. под науч. ред. д.т.н., проф. В.А. Слаева, д.т.н. А.Г. Чуновкиной. — СПб.: «Профес- сионал», 2011. — 58 с.: ил.
  4. Шишкин И.Ф. Метрология, стандартизация и управление качеством. - М.: Изд-во стандартов, 1990.
  5. Бронштейн И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. - М.: Наука, 1986.- 544 с.
  6. Атамалян Э.Г. Приборы и методы измерения электрических величин.- М.: Высшая школа, 1989.- 384 с.
  7. Бендат Дж. Прикладной анализ случайных данных / Дж. Бендат, А. Пирсол. - М.: Мир, 1989. - 540

## ПРИЛОЖЕНИЕ В

(справочное)

## Интегральная функция нормированного нормального распределения *Ф(t)*

*2 t*  *t 2*

Таблица Б.1 – Распределение

*2Ô( t )*   *e 2 dt*

*2 0*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***2Ф(t)*** | ***t*** | ***2Ф(t)*** | ***t*** | ***2Ф(t)*** | ***t*** | ***2Ф(t)*** | ***t*** | ***2Ф(t)*** | ***t*** |
| 0,6827 | 1 | 0,7699 | 1,2 | 0,8385 | 1,4 | 0,8904 | 1,6 | 0,9281 | 1,8 |
| 0,6875 | 1,01 | 0,7737 | 1,21 | 0,8415 | 1,41 | 0,8926 | 1,61 | 0,9297 | 1,81 |
| 0,6923 | 1,02 | 0,7775 | 1,22 | 0,8444 | 1,42 | 0,8948 | 1,62 | 0,9312 | 1,82 |
| 0,697 | 1,03 | 0,7813 | 1,23 | 0,8473 | 1,43 | 0,8969 | 1,63 | 0,9328 | 1,83 |
| 0,7017 | 1,04 | 0,785 | 1,24 | 0,8501 | 1,44 | 0,899 | 1,64 | 0,9342 | 1,84 |
| 0,7063 | 1,05 | 0,7887 | 1,25 | 0,8529 | 1,45 | 0,9011 | 1,65 | 0,9357 | 1,85 |
| 0,7109 | 1,06 | 0,7923 | 1,26 | 0,8557 | 1,46 | 0,9031 | 1,66 | 0,9371 | 1,86 |
| 0,7154 | 1,07 | 0,7959 | 1,27 | 0,8584 | 1,47 | 0,9051 | 1,67 | 0,9385 | 1,87 |
| 0,7199 | 1,08 | 0,7995 | 1,28 | 0,8611 | 1,48 | 0,907 | 1,68 | 0,9399 | 1,88 |
| 0,7243 | 1,09 | 0,8029 | 1,29 | 0,8638 | 1,49 | 0,909 | 1,69 | 0,9412 | 1,89 |
| 0,7287 | 1,1 | 0,8064 | 1,3 | 0,8664 | 1,5 | 0,9109 | 1,7 | 0,9426 | 1,9 |
| 0,733 | 1,11 | 0,8098 | 1,31 | 0,869 | 1,51 | 0,9127 | 1,71 | 0,9439 | 1,91 |
| 0,7373 | 1,12 | 0,8132 | 1,32 | 0,8715 | 1,52 | 0,9146 | 1,72 | 0,9451 | 1,92 |
| 0,7415 | 1,13 | 0,8165 | 1,33 | 0,874 | 1,53 | 0,9164 | 1,73 | 0,9464 | 1,93 |
| 0,7457 | 1,14 | 0,8198 | 1,34 | 0,8764 | 1,54 | 0,9181 | 1,74 | 0,9476 | 1,94 |
| 0,7499 | 1,15 | 0,823 | 1,35 | 0,8789 | 1,55 | 0,9199 | 1,75 | 0,9488 | 1,95 |
| 0,754 | 1,16 | 0,8262 | 1,36 | 0,8812 | 1,56 | 0,9216 | 1,76 | 0,95 | 1,96 |
| 0,758 | 1,17 | 0,8293 | 1,37 | 0,8836 | 1,57 | 0,9233 | 1,77 | 0,9512 | 1,97 |
| 0,762 | 1,18 | 0,8324 | 1,38 | 0,8859 | 1,58 | 0,9249 | 1,78 | 0,9523 | 1,98 |
| 0,766 | 1,19 | 0,8355 | 1,39 | 0,8882 | 1,59 | 0,9265 | 1,79 | 0,9534 | 1,99 |
| ***2Ф(t)*** | ***t*** | ***2Ф(t)*** | ***t*** | ***2Ф(t)*** | ***t*** | ***2Ф(t)*** | ***t*** | ***2Ф(t)*** | ***t*** |
| 0,9545 | 2 | 0,9722 | 2,2 | 0,9836 | 2,4 | 0,9907 | 2,6 | 0,9949 | 2,8 |
| 0,9556 | 2,01 | 0,9729 | 2,21 | 0,984 | 2,41 | 0,9909 | 2,61 | 0,995 | 2,81 |
| 0,9566 | 2,02 | 0,9736 | 2,22 | 0,9845 | 2,42 | 0,9912 | 2,62 | 0,9952 | 2,82 |
| 0,9576 | 2,03 | 0,9743 | 2,23 | 0,9849 | 2,43 | 0,9915 | 2,63 | 0,9953 | 2,83 |
| 0,9586 | 2,04 | 0,9749 | 2,24 | 0,9853 | 2,44 | 0,9917 | 2,64 | 0,9955 | 2,84 |
| 0,9596 | 2,05 | 0,9756 | 2,25 | 0,9857 | 2,45 | 0,992 | 2,65 | 0,9956 | 2,85 |
| 0,9606 | 2,06 | 0,9762 | 2,26 | 0,9861 | 2,46 | 0,9922 | 2,66 | 0,9958 | 2,86 |
| 0,9615 | 2,07 | 0,9768 | 2,27 | 0,9865 | 2,47 | 0,9924 | 2,67 | 0,9959 | 2,87 |
| 0,9625 | 2,08 | 0,9774 | 2,28 | 0,9869 | 2,48 | 0,9926 | 2,68 | 0,996 | 2,88 |
| 0,9634 | 2,09 | 0,978 | 2,29 | 0,9872 | 2,49 | 0,9929 | 2,69 | 0,9961 | 2,89 |
| 0,9643 | 2,1 | 0,9786 | 2,3 | 0,9876 | 2,5 | 0,9931 | 2,7 | 0,9963 | 2,9 |
| 0,9651 | 2,11 | 0,9791 | 2,31 | 0,9879 | 2,51 | 0,9933 | 2,71 | 0,9964 | 2,91 |
| 0,966 | 2,12 | 0,9797 | 2,32 | 0,9883 | 2,52 | 0,9935 | 2,72 | 0,9965 | 2,92 |
| 0,9668 | 2,13 | 0,9802 | 2,33 | 0,9886 | 2,53 | 0,9937 | 2,73 | 0,9966 | 2,93 |

Продолжение таблицы Б.1

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 0,9676 | 2,14 | 0,9807 | 2,34 | 0,9889 | 2,54 | 0,9939 | 2,74 | 0,9967 | 2,94 |
| 0,9684 | 2,15 | 0,9812 | 2,35 | 0,9892 | 2,55 | 0,994 | 2,75 | 0,9968 | 2,95 |
| 0,9692 | 2,16 | 0,9817 | 2,36 | 0,9895 | 2,56 | 0,9942 | 2,76 | 0,9969 | 2,96 |
| 0,97 | 2,17 | 0,9822 | 2,37 | 0,9898 | 2,57 | 0,9944 | 2,77 | 0,997 | 2,97 |
| 0,9707 | 2,18 | 0,9827 | 2,38 | 0,9901 | 2,58 | 0,9946 | 2,78 | 0,9971 | 2,98 |
| 0,9715 | 2,19 | 0,9832 | 2,39 | 0,9904 | 2,59 | 0,9947 | 2,79 | 0,9972 | 2,99 |

## ПРИЛОЖЕНИЕ Г

(справочное)

## ν-критерий

Таблица В.1 – Значения *νq* при различных *n, q*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *n* | *q* | | *n* | *q* | |
| 0,10 | 0,05 | 0,10 | 0,05 |
| 3 | 1,406 | 1,412 | 15 | 2,326 | 2,493 |
| 4 | 1,645 | 1,689 | 16 | 2,354 | 2,523 |
| 5 | 1,731 | 1,869 | 17 | 2,380 | 2,551 |
| 6 | 1,894 | 1,996 | 18 | 2,404 | 2,557 |
| 7 | 1,974 | 2,093 | 19 | 2,426 | 2,600 |
| 8 | 2,041 | 2,172 | 20 | 2,447 | 2,623 |
| 9 | 2,097 | 2,237 | 21 | 2,467 | 2,644 |
| 10 | 2,146 | 2,294 | 22 | 2,486 | 2,664 |
| 11 | 2,190 | 2,383 | 23 | 2,564 | 2,688 |
| 12 | 2,229 | 2,387 | 24 | 2,520 | 2,701 |
| 13 | 2,264 | 2,426 | 25 | 2,537 | 2,717 |
| 14 | 2,297 | 2,461 |  |  |  |

## ПРИЛОЖЕНИЕ Д

(справочное)

## Составной критерий

Таблица Г.1 – Статистика *d*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *n* | *d0,5q1* | | *d1-0,5ql* | |
| 0,01 | 0,05 | 0,05 | 0,01 |
| 11 | 0,9359 | 0,9073 | 0,7153 | 0,6675 |
| 16 | 0,9137 | 0,8884 | 0,7236 | 0,6829 |
| 21 | 0,9001 | 0,8768 | 0,7304 | 0,6950 |
| 26 | 0,8961 | 0,8686 | 0,7360 | 0,7040 |
| 31 | 0,8826 | 0,8625 | 0,7404 | 0,7110 |
| 36 | 0,8769 | 0,8578 | 0,7440 | 0,7167 |
| 41 | 0,8722 | 0,8540 | 0,7470 | 0,7216 |
| 46 | 0,8682 | 0,8508 | 0,7496 | 0,7256 |
| 51 | 0,8648 | 0,8481 | 0,7518 | 0,7291 |

Таблица Г.2 – Значения *m* и *P\**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *n* | *m* | *P\** | | |
| 0,01 | 0,02 | 0,05 |
| 10 | 1 | 0,98 | 0,98 | 0,99 |
| 11-14 | 1 | 0,99 | 0,98 | 0,97 |
| 15-20 | 1 | 0,99 | 0,99 | 0,98 |
| 21-22 | 2 | 0,98 | 0,97 | 0,96 |
| 23 | 2 | 0,98 | 0,98 | 0,96 |
| 24-27 | 2 | 0,98 | 0,98 | 0,97 |
| 28-32 | 2 | 0,99 | 0,98 | 0,97 |
| 33-35 | 2 | 0,99 | 0,98 | 0,98 |
| 36-49 | 2 | 0,99 | 0,99 | 0,98 |

## ПРИЛОЖЕНИЕ Е

(справочное)

## Распределение Стьюдента

Таблица Д.1 – Коэффициент Стьюдента

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *n-*1 | *P*=0,95 | *P*=0,99 | *n*-1 | *P*=0,95 | *P*=0,99 |
| 3 | 3,182 | 5,841 | 16 | 2,120 | 2,921 |
| 4 | 2,776 | 4,604 | 18 | 2,101 | 2,878 |
| 5 | 2,571 | 4,032 | 20 | 2,086 | 2,845 |
| 6 | 2,447 | 3,707 | 22 | 2,074 | 2,819 |
| 7 | 2,365 | 3,499 | 24 | 2,064 | 2,797 |
| 8 | 2,306 | 3,355 | 26 | 2,056 | 2,779 |
| 10 | 2,228 | 3,169 | 28 | 2,048 | 2,763 |
| 12 | 2,179 | 3,055 | 30 | 2,043 | 2,750 |
| 14 | 2,145 | 2,977 | ∞ | 1,960 | 2,576 |

## ПРИЛОЖЕНИЕ Ж

(справочное)

## Распределение Фишера

Таблица Е.1 – Значения *0* для различных значений *n1, n2*

и доверительной вероятности *P*

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *n2* | *P* | *n1* | | | | |
| 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 8 | 0,75 | 1,64 | 1,64 | 1,63 | 1,63 | 1,62 |
|  | 0,90 | 2,59 | 2,56 | 2,54 | 2,52 | 2,50 |
|  | 0,95 | 3,44 | 3,39 | 3,35 | 3,31 | 3,28 |
|  | 0,99 | 6,03 | 5,91 | 5,81 | 5,73 | 5,67 |
| 9 | 0,75 | 1,60 | 1,59 | 1,59 | 1,58 | 1,58 |
|  | 0,90 | 2,47 | 2,44 | 2,42 | 2,40 | 2,38 |
|  | 0,95 | 3,23 | 3,18 | 3,14 | 3,10 | 3,07 |
|  | 0,99 | 5,47 | 5,35 | 5,26 | 5,18 | 5,11 |
| 10 | 0,75 | 1,56 | 1,56 | 1,55 | 1,55 | 1,54 |
|  | 0,90 | 2,38 | 2,35 | 2,32 | 2,30 | 2,28 |
|  | 0,95 | 3,07 | 3,02 | 2,98 | 2,94 | 2,91 |
|  | 0,99 | 5,06 | 4,94 | 4,85 | 4,77 | 4,71 |
| 11 | 0,75 | 1,53 | 1,53 | 1,52 | 1,52 | 1,51 |
|  | 0,90 | 2,30 | 2,27 | 2,25 | 2,23 | 2,21 |
|  | 0,95 | 2,95 | 2,90 | 2,85 | 2,82 | 2,79 |
|  | 0,99 | 4,74 | 4,63 | 4,54 | 4,46 | 4,40 |
| 12 | 0,75 | 1,51 | 1,51 | 1,50 | 1,50 | 1,49 |
|  | 0,90 | 2,24 | 2,21 | 2,19 | 2,17 | 2,15 |
|  | 0,95 | 2,85 | 2,80 | 2,75 | 2,72 | 2,69 |
|  | 0,99 | 4,50 | 4,39 | 4,30 | 4,22 | 4,16 |

## ПРИЛОЖЕНИЕ З

(справочное)

## Критерий серий

Таблица Ж.1 – Процентные точки распределения серий (вероятность *P[rn>rn;α]=α, n=N1=N2=N*)

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *n=N/2* | *α* | | | | | |
| 0,99 | 0,975 | 0,95 | 0,05 | 0,025 | 0,01 |
| 5 | 2 | 2 | 3 | 8 | 9 | 9 |
| 6 | 2 | 3 | 3 | 10 | 10 | 11 |
| 7 | 3 | 3 | 4 | 11 | 12 | 12 |
| 8 | 4 | 4 | 5 | 12 | 13 | 13 |
| 9 | 4 | 5 | 6 | 13 | 14 | 15 |
| 10 | 5 | 6 | 6 | 15 | 15 | 16 |
| 11 | 6 | 7 | 7 | 16 | 16 | 17 |
| 12 | 7 | 7 | 8 | 17 | 18 | 18 |
| 13 | 7 | 8 | 9 | 18 | 19 | 20 |
| 14 | 8 | 9 | 10 | 19 | 20 | 21 |
| 15 | 9 | 10 | 11 | 20 | 21 | 22 |
| 16 | 10 | 11 | 11 | 22 | 22 | 23 |
| 18 | 11 | 12 | 13 | 24 | 25 | 26 |
| 20 | 13 | 14 | 15 | 26 | 27 | 28 |
| 25 | 17 | 18 | 19 | 32 | 33 | 34 |
| 30 | 21 | 22 | 24 | 37 | 39 | 40 |
| 35 | 25 | 27 | 28 | 43 | 44 | 46 |
| 40 | 30 | 31 | 33 | 48 | 50 | 51 |
| 45 | 34 | 36 | 37 | 54 | 55 | 57 |
| 50 | 38 | 40 | 42 | 59 | 61 | 63 |
| 55 | 43 | 45 | 46 | 65 | 66 | 68 |
| 60 | 47 | 49 | 51 | 70 | 72 | 74 |
| 65 | 52 | 54 | 56 | 75 | 77 | 79 |
| 70 | 56 | 58 | 60 | 81 | 83 | 85 |
| 75 | 61 | 63 | 65 | 86 | 88 | 90 |
| 80 | 65 | 68 | 70 | 91 | 93 | 96 |
| 85 | 70 | 72 | 74 | 97 | 99 | 101 |
| 90 | 74 | 77 | 79 | 102 | 104 | 107 |
| 95 | 79 | 82 | 84 | 107 | 109 | 112 |
| 100 | 84 | 86 | 88 | 113 | 115 | 117 |

## ПРИЛОЖЕНИЕ К

(справочное)

## Критерий инверсий

Таблица И.1 – Процентные точки распределения числа инверсий (вероятность *P[АN>АN;α]=α,* где *N* – общее число значений)

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *N* | *α* | | | | | |
| 0,99 | 0,975 | 0,95 | 0,05 | 0,025 | 0,01 |
| 10 | 9 | 11 | 13 | 31 | 33 | 35 |
| 12 | 16 | 18 | 21 | 44 | 47 | 49 |
| 14 | 24 | 27 | 30 | 60 | 63 | 66 |
| 16 | 34 | 38 | 41 | 78 | 81 | 85 |
| 18 | 45 | 50 | 54 | 98 | 102 | 107 |
| 20 | 59 | 64 | 69 | 120 | 125 | 130 |
| 30 | 152 | 162 | 171 | 263 | 272 | 282 |
| 40 | 290 | 305 | 319 | 460 | 474 | 489 |
| 50 | 473 | 495 | 514 | 710 | 729 | 751 |
| 60 | 702 | 731 | 756 | 1013 | 1038 | 1067 |
| 70 | 977 | 1014 | 1045 | 1369 | 1400 | 1437 |
| 80 | 1299 | 1344 | 1382 | 1777 | 1815 | 1860 |
| 90 | 1668 | 1721 | 1766 | 2238 | 2283 | 2336 |
| 100 | 2083 | 2145 | 2198 | 2751 | 2804 | 2866 |