Введение

В соответствии с действующими учебным планом студенты-заочники изучают курс высшей математики в течении двух лет и выполняют на каждом курсе по две контрольные работы.

Контрольные работы №1 и №2 выполняются студентами на первом курсе.

Контрольные работы №3 и №4 выполняются на втором курсе.

При выполнении контрольных работ студент должен руководствоваться следующими указаниями:

1. Каждая работа должна выполняться в отдельной тетради (в клетку), на внешней обложке которой должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, полный шифр, номер контрольной работы.
2. Контрольные задачи следует располагать в порядке номеров, указанных в заданиях. Перед решением каждой задачи надо полностью переписать ее условие.
3. Решение задач следует излагать подробно, делая соответствующие ссылки на вопросы теории с указанием необходимых формул, теорем.
4. Решение задач геометрического содержания должно сопровождаться чертежами, выполненными аккуратно, с указанием осей координат и единицей измерения. Объяснения к задачам должны соответствовать обозначениям, приведенных на чертежах.
5. На каждой странице тетради необходимо оставлять поля шириной 3-4 см для замечаний преподавателя.
6. Контрольные работы должны выполняться самостоятельно. Несамостоятельно выполненная работа лишает студента возможности проверить степень своей подготовленности по теме.

   Если преподаватель установит несамостоятельное выполнение работы, то она не будет зачтена
7. Получив из вуза прорецензированную работу (как зачтенную, так и незачтенную), студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочеты. В случае незачета по работе студент обязан в кратчайший срок выполнить все требования рецензента и представить работу на повторное рецензирование, приложив при этом первоначально выполненную работу.
8. В межсессионный период или во время лабораторно-экзаменационной сессии студент должен пройти на кафедре высшей математики собеседование по зачтенной контрольной работе.
9. Студент выполняет тот вариант контрольной работы, который совпадает с последней цифрой его учебного шифра. При этом, если предпоследняя цифра учебного шифра есть число нечетное (1, 3, 5, 7, 9), то номера задач для соответствующего варианта даны в таблице 1. если

предпоследняя цифра учебного шифра есть число четное или ноль (2, 4, 6, 8, 0), то номера задач даны в таблице 2.

Таблица 1

Номер варианта	Номера задач для контрольных работ											
	Работа №1						**Работа №2**					
1	1	21	31	41	51	61	81	101	121	131	141	161
2	2	22	32	42	52	62	82	102	122	132	142	162
3	3	23	33	43	53	63	83	103	123	133	143	163
4	4	24	34	44	54	64	84	104	124	134	144	164
5	5	25	35	45	55	65	85	105	125	135	145	165
6	6	26	36	46	56	66	86	106	126	136	146	166
7	7	27	37	47	57	67	87	107	127	137	147	167
8	8	28	38	48	58	68	88	108	128	138	148	168
9	9	29	39	49	59	69	89	109	129	139	149	169
0	10	30	40	50	60	70	90	110	130	140	150	170
	Работа №3						**Работа №4**					
1	181	191	201	211	231		251	271	281	291	301	311
2	182	192	202	212	232		252	272	282	292	302	312
3	183	193	203	213	233		253	273	283	293	303	313
4	184	194	204	214	234		254	274	284	294	304	314
5	185	195	205	215	235		255	275	285	295	305	315
6	186	196	206	216	236		256	276	286	296	306	316
7	187	197	207	217	237		257	277	287	297	307	317
8	188	198	208	218	238		258	278	288	298	308	318
9	189	199	209	219	239		259	279	289	299	309	319
0	190	200	210	220	240		260	280	290	300	310	320

Таблица 2

Номер варианта	Номера задач для контрольных работ											
	Работа №1						**Работа №2**					
1	11	22	33	44	55	76	91	111	122	133	151	171
2	12	23	34	45	56	77	92	112	123	134	152	172
3	13	24	35	46	57	78	93	113	124	135	153	173
4	14	25	36	47	58	79	94	114	125	136	154	174
5	15	26	37	48	59	80	95	115	126	137	155	175
6	16	27	38	49	60	71	96	116	127	138	156	176
7	17	28	39	50	51	72	97	117	128	139	157	177
8	18	29	40	41	52	73	98	118	129	140	158	178
9	19	30	31	42	53	74	99	119	130	131	159	179
0	20	21	32	43	54	75	100	120	121	132	160	180

	Работа №3					**Работа №4**					
1	182	193	204	221	241	261	272	283	294	305	316
2	183	194	205	222	242	262	273	284	295	306	317
3	184	195	206	223	243	263	274	285	296	307	318
4	185	196	207	224	244	264	275	286	297	308	319
5	186	197	208	225	245	265	276	287	298	309	320
6	187	198	209	226	246	266	277	288	299	310	311
7	188	199	210	227	247	267	278	289	300	301	312
8	189	200	201	228	248	268	279	290	291	302	313
9	190	191	202	229	249	269	280	281	292	303	314
0	181	192	203	230	250	270	271	282	293	304	315

УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 1

Тема 1. **Аналитическая геометрия на плоскости**

[1] гл. I, II; [3] № 4, 10, 23, 28;

[1] гл. III § 11, 12, гл. IV [3] №59, 67, 71, 82 (2), 87, 103;

[1] гл. V § 24-26, 30-36; [3] № 140, 155, 166, 169, 190, 211, 224.

Разберите решения задач 1, 2, 3 из данных методических указаний.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Даны вершины треугольника ABC: A $(-4; 8)$, $B(5; -4)$, $C(10; 6)$. Найти: 1) длину стороны AB; 2) уравнения сторон AB и AC и их угловые коэффициенты; 3) внутренний угол *A* радианах с точностью до 0,01; 4) уравнение высоты *CD* и ее длину; 5) уравнения окружности, для которой высота *CD* есть диаметр; 6) систему линейных неравенств, определяющих треугольник *ABC*.

Решение:1. Расстояние d между точками M_1 (x_1; y_1) и M_2 (x_2; y_2) определяется по формуле:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (1)$$

Подставив в эту формулу координаты точек А и *B*, имеем:

$$AB = \sqrt{[\ 5-(-4)\ ]^2 + (-4-8)^2} = \sqrt{81+144} = 15$$

2. Уравнение прямой, проходящей через точки M_1 (x_1; y_1) и M_2 (x_2; y_2), имеет вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \qquad (2)$$

Подставив в (2) координаты точек *A* и *B*, получим уравнение прямой *AB*:

$$\frac{x-(-4)}{5-(-4)} = \frac{y-8}{-4-8}, \quad \frac{x+4}{9} = \frac{y-8}{-12}, \quad \frac{x+4}{3} = \frac{y-8}{-4},$$

$$3y - 24 = -4x - 16,\ 4x + 3y - 8 = 0 \quad (AB).$$

Для нахождения углового коэффициента k_{AB} прямой *AB* разрешим полученное уравнение относительно *y:* $y = -\frac{4}{3}x + \frac{8}{3}$. Отсюда $k_{AB} = -\frac{4}{3}$. Подставив в формулу (2) координаты точек *A* и *C*, найдем уравнение прямой *AC*.

$$\frac{x-(-4)}{10-(-4)} = \frac{y-8}{6-8}. \quad \frac{x+4}{14} = \frac{y-8}{-2}, \quad \frac{x+4}{7} = \frac{y-8}{-1},$$

$$x+7y-52=0\ (AC).$$

Отсюда $k_{AC} = -\frac{1}{7}$.

3. Угол α между двумя прямыми, угловые коэффициенты которых равны k_1 и k_2, определяется по формуле:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{1 + \kappa_1\kappa_2}. \qquad (3)$$

Угол *A*, образованный прямыми *AB* и *AC*, найдем по формуле (3), подставив в нее $k_1 = k_{AB} = -\frac{4}{3}$, $k_2 = k_{AC} = -\frac{1}{7}$.

$$\operatorname{tg} A = \frac{-\frac{1}{7} - \left(-\frac{4}{3}\right)}{1 + \left(-\frac{1}{7}\right)\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)} = \frac{\frac{4}{3} - \frac{1}{7}}{1 + \frac{4}{21}} = \frac{\frac{25}{21}}{\frac{25}{21}} = 1,$$

$$\angle A = \text{arctg } 1 = 45° \approx 0{,}79 \text{ рад.}$$

4. Так как высота *CD* перпендикулярна стороне *AB*, то угловые коэффициенты этих прямых обратны по величине и противоположны по знаку, т.е.

$$k_{CD} = -\frac{1}{\kappa_{AB}} = -\frac{1}{-\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}.$$

Уравнение прямой, проходящей через данную точку M_1 (x_1; y_1) в заданном угловым коэффициентом k направлении, имеет вид:

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Подставив в (4) координаты точки *C* и $k_{CD} = \frac{3}{4}$, получим уравнение высоты *CD*:

$$y - 6 = \frac{3}{4}(x - 10),\ \ 4y - 24 = 3x - 30,\ \ 3x - 4y - 6 = 0\ (CD) \qquad (5)$$

Для нахождения длины *CD* определим координаты точки *D*, решив систему уравнений *(AB)* и *(CD)*:

$$\begin{cases} 4x + 3y - 8 = 0, \\ 3x - 4y - 6 = 0, \end{cases}$$ откуда x = 2, y = 0, то есть *D* (2;0).

Подставив в формулу (1) координаты точек *C* и *D*, находим:

$$CD = \sqrt{(10-2)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{64+36} = 10.$$

5. Уравнение окружности радиуса R с центром в точке E(*a*; b) имеет вид:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \qquad (6)$$

Так как *CD* является диаметром искомой окружности, то ее центр *E* есть середина отрезка *CD*. Воспользовавшись формулами деления отрезка пополам, получим:

$$x_E = \frac{x_C + x_Д}{2} = \frac{10+2}{2} = 6,\ \ y_E = \frac{y_C + y_Д}{2} = \frac{6+0}{2} = 3.$$

Следовательно, *E* (6; 3) и $R = \frac{СД}{2} = 5$. Используя формулу (6), получаем уравнение искомой окружности:

$$(x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 25.$$

6. Множество точек треугольника *ABC* есть пересечение трех полуплоскостей, первая из которых ограничена прямой *AB* и содержит точку *C*, вторая ограничена прямой *BC* и содержит точку *A*,а третья ограничена прямой *AC* и содержит точку *B*.

Для получения неравенства, определяющего полуплоскость, ограниченную прямой, *AB* и содержащую точку *C*, подставим в уравнение прямой *AB* координаты точки *C*:

$$4 \cdot 10 + 3 \cdot 6 - 8 = 50 > 0.$$

Поэтому искомое неравенство имеет вид: $4x + 3y - 8 \geq 0$.

Для составления неравенства, определяющего полуплоскость, ограниченную прямой ВС и содержащую точку А, найдем уравнение прямой ВС, подставив в формулу (2) координаты точек В и С:

$$\frac{x-5}{10-5}=\frac{y-(-4)}{6-(-4)},\ \frac{x-5}{5}=\frac{y+4}{10},\ \frac{x-5}{1}=\frac{y+4}{2},$$

$$2x - y - 14 = 0\ (BC).$$

Подставив в последнее уравнение координаты точки А, имеем: 2·(−4)–8–14=−30<0. Искомое неравенство, определяющее полуплоскость, ограниченную прямой Ас и содержащую точку В: 5+7·(−4)–52=−75<0. Третье искомое неравенство $x+7y-52\le 0$. Итак, множество точек треугольника АВС определяется системой неравенств

$$\begin{cases} 4x+3y-8\ge 0, \\ 2x-y-14\le 0, \\ x+7y-52\le 0. \end{cases}$$

На рис. 1 в декартовой прямоугольной системе координат *xOy* изображен треугольник *ABC*, высота *CD*, окружность с центром в точке Е.

Задача 2. Составить уравнение линии, для каждой точки которой отношение расстояний до точки *A* (3; 0) и до прямой x=12 равно числу ε =0,5. Полученное уравнение привести к простейшему виду и построить кривую.

Решение. Пусть *M (x; y)* – текущая (произвольная) точка искомого геометрического множества точек. Опустим перпендикуляр *MB* на прямую *x*=12 (рис. 2). Тогда *B (12; y)*. По условию задачи $\frac{MA}{MB}=\frac{1}{2}$.

$$MA=\sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2},\ MB=\sqrt{(x-12)^2+(y-y)^2},$$

Тогда

$$\frac{\sqrt{(x-3)^2+y^2}}{\sqrt{(x-12)^2}}=\frac{1}{2},\quad \frac{x^2-6x+9+y^2}{x^2-24x+144}=\frac{1}{4},$$

$$4x^2 - 24x + 36 + 4y^2 = x^2 - 24x + 144,\ 3x^2 + 4y^2 = 108,$$

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1.$$

Полученное уравнение представляет собой эллипс вида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$ где a=6, b=$3\sqrt{3}$.

Определим фокусы эллипса F_1 (−*c*; 0) и F_2(*c*; 0). Для эллипса справедливо равенство $b^2=a^2-b^2=9$ и *c*=3.

То есть, F_1 (−3; 0) и F_2 (3; 0) – фокусы эллипса (точки F_2 и *A* совпадают).

Эксцентриситет эллипса $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$

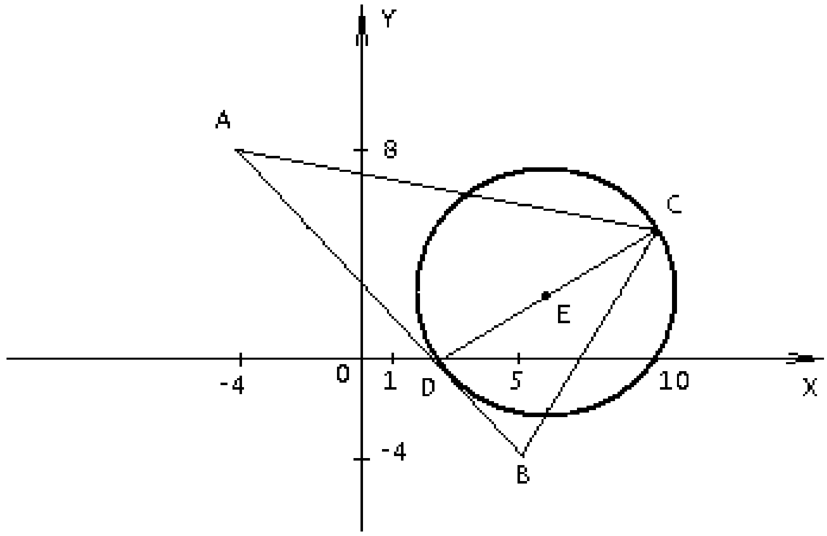

Рис. 1

Задача 3. Составить уравнения линии, для каждой точки которой ее расстояние до точки *A* (3; −4) равно расстоянию до прямой y=2. Полученное уравнение привести к простейшему виду и построить кривую.

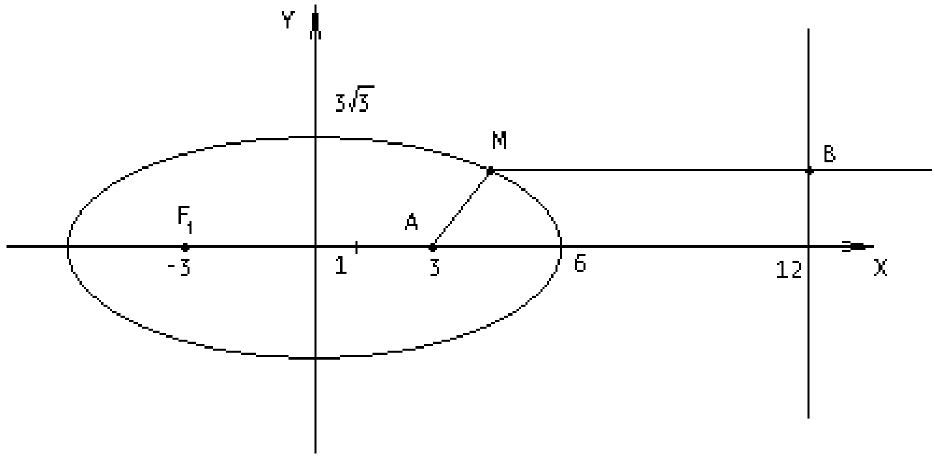

Рис. 2

Решение. M (x; y) – текущая точка искомой кривой. Опустим из точки *M* перпендикуляр *MB* на прямую *y=2* (рис. 3). Тогда *B* (x; 2). Так как *MA* =*MB*,

то $\sqrt{(x-3)^2+(y+4)^2} = \sqrt{(x-x)^2+(y-2)^2}$ или

$$(x-3)^2 + y^2 + 8y + 16 = y^2 - 4y + 4,$$

$$-12y - 12 = (x-3)^2,$$

$$y + 1 = -\frac{1}{12}(x-3)^2.$$

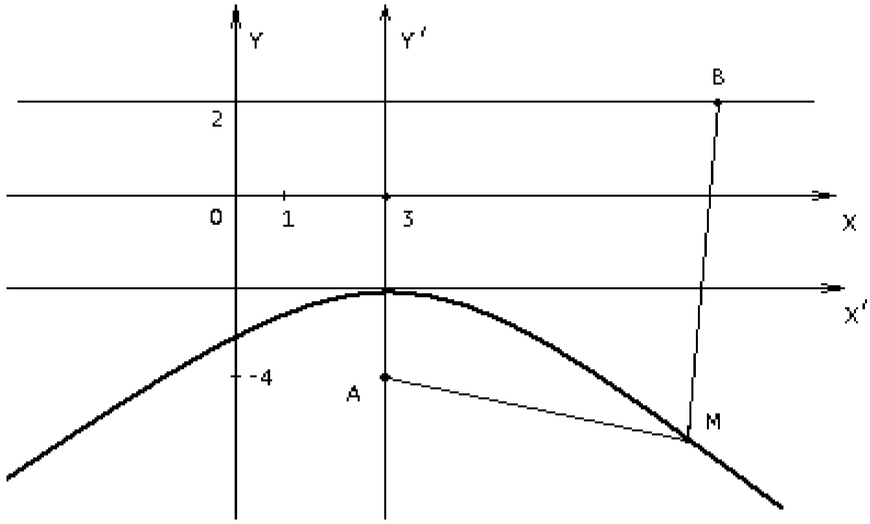

Рис. 3

Полученное уравнение определяет параболу с вершиной в точке O' (3; −1). Для приведения уравнения параболы к простейшему (каноническому) виду положим $x - 3 = X'$, $y + 1 = У'$. Тогда в системе координат $X'O'У'$ уравнение параболы принимает следующий вид: $У' = -\frac{1}{12}(X')^2$. в системе координат $X'O'У'$ строим параболу.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение прямоугольной декартовой системы координат.
2. Напишите формулу для нахождения расстояния между двумя точками.
3. Напишите формулы для определения координат точки, делящей данный отрезок в данном отношении.
4. Напишите формулы преобразования координат: а) при параллельном переносе системы координат; б) при повороте системы координат.
5. Напишите уравнения прямой: а) с угловым коэффициентом; б) проходящей через данную точку в данном направлении; в) проходящей через две данные точки; г) в «отрезках».
6. Как найти координаты точки пересечения двух прямых?
7. Напишите формулу для определения угла между двумя прямыми.
8. Каковы условия параллельности и перпендикулярности двух прямых?
9. Сформулируйте определение окружности.
10. Напишите уравнение окружности с центром в любой точке плоскости xOy; с центром в начале координат.
11. Дайте определение эллипса. Напишите каноническое уравнение эллипса.
12. Что называется эксцентриситетом эллипса? Как изменяется форма эллипса с изменением эксцентриситета гиперболы.

13.Дайте определение гиперболы. Напишите каноническое уравнение гиперболы.

14.Напишите формулу для определения эксцентриситета гиперболы. Напишите уравнения для нахождения асимптот гиперболы.

15.Сформулируйте определение параболы. Напишите каноническое уравнение параболы, симметричной относительно оси *Oy*.

Тема 2. **Векторная алгебра и аналитическая геометрия в пространстве**

[1] гл. XVIII; [3] № 372, 382, 397, 405, 418, 421;

[1] гл. XIX § 1 – 4; [3] № 452, 455, 457, 496.

Разберите решение задачи 4 данного пособия.

Задача 4. Даны координаты трех точек: A(3; 0; −5), B (6; 2; 1), C (12; −12; 3).

Требуется: 1) записать векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ в системе орт и найти модули этих векторов; 2) найти угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$; 3) составить уравнение плоскости, проходящей через точку *C* перпендикулярно вектору $\overline{AB}$.

Решение. 1. Если даны точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ b V_2 $(x_2; y_2; z_2)$, то вектор $\overline{M_1M_2}$ через орты $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ выражается следующим образом:

$$\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\,\bar{i} + (y_2 - y_1)\,\bar{j} + (z_2 - z_1)\bar{k} = a_x\bar{i} + a_x\bar{j} + a_x\bar{k}. \qquad (1)$$

Подставляя в эту формулу координаты точек *A* и *B*, имеем:

$$\overline{AB} = (6–3)\,\bar{i} + (2–0)\,\bar{j} + (1+5)\bar{k} = 3\bar{i} + 2\bar{j} + 6\bar{k}.$$

Подобным образом $\overline{AC} = (12–3)\,\bar{i} + (-12–0)\,\bar{j} + (3+5)\,\bar{k} = 9\bar{i} - 12\bar{j} + 8\bar{k}$.

Модуль вектора $\overline{M_1M_2}$ вычисляется по формуле

$$\left|\overline{M_1M_2}\right| = \sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2} + a_z^{\,2}}. \qquad (2)$$

Подставляя в формулу (2) найденные раннее координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, находим их модули:

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2} = 7, \qquad \left|\overline{AC}\right| = \sqrt{9^2 + (-12)^2 + 8^2} = 17.$$

2. Косинус угла α, образованного векторами $\bar{a} \cdot \bar{b}$, равен их скалярному произведению, деленному на произведение их модулей

$$\cos\alpha = \frac{\bar{a}\bar{b}}{\left|\bar{a}\right| \cdot \left|\bar{b}\right|} \qquad (3)$$

Так как скалярное произведение двух векторов, заданных своими координатами, равно сумме попарных произведений одноименных координат, то $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 3 \cdot 9 + 2 \cdot (-12) + 6 \cdot 8 = 51$.

Применяя (3), имеем:

$$\cos\alpha = \cos\left(\widehat{\overline{AB};\overline{AC}}\right) = \frac{51}{7\cdot 17} \approx 0{,}4286;\ \alpha \approx 64^{\circ}37'.$$

3. Известно, что уравнение искомая плоскость проходит через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ перпендикулярно вектору $n\{A;B;C;\}$, имеет вид

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (4)$$

По условию задачи искомая плоскость проходит через точку C (12;−12;3) перпендикулярно вектору $\overline{AB}\ \{3;2;6\}$. Подставляя в (4) A=3, B=2, C=6, x_0=12, y_0=−12, z_0=3, получим:

$3(x-12)+2(y+12)+6(z-3)=0$,

$3x+2y+6z-30=0$ – искомое уравнение плоскости.

Вопросы для самопроверки

1. Какие величины называются скалярными? векторными?
2. Какие векторы называются коллинеарными?
3. Какие два вектора называются равными?
4. Как сложить два вектора? Как их вычесть?
5. Как найти координаты вектора по координатам точек его начала и конца?
6. Назовите правила сложения, вычитания векторов, заданных в координатной форме. Как умножить вектор на скаляр?
7. Дайте определение скалярного произведения двух векторов. Перечислите основные свойства скалярного произведения.
8. Как найти скалярное произведение двух векторов по их координатам?
9. Напишите формулу для определения угла между двумя векторами.
10. Напишите условия: коллинеарности двух векторов; их перпендикулярности.
11. Напишите общее уравнение плоскости.
12. Напишите уравнение плоскости проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.
13. Какой вид имеет уравнение плоскости, проходящей через три данные точки?
14. напишите формулу для определения расстояния от точки до плоскости.

Тема 3. **Элементы линейной алгебры**

[5] гл. XXI; [3] № 592, 624, 628.

Разберите решение задачи 5 данного пособия.

Задача 5. Данную систему уравнений записать в матричной форме и решить ее с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_3 - x_3 = 8, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$$

Решение. Обозначим через А–матрицу коэффициентов при неизвестных; Х–матрицу-столбец неизвестных X_1, X_2, X_3; Н – матрицу-столбец свободных членов:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}, \quad H=\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix},$$

С учетом этих обозначений данная система уравнений принимает следующую матричную форму:

$$A \cdot X = H \tag{1}$$

Если матрица A – невырожденная (ее определитель Δ отличен от нуля), то она имеет обратную матрицу A^{-1}, получим:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot H.$$

Но $A^{-1} \cdot A = E$ (Е – единичная матрица), а $EX = X$, поэтому

$$X = A^{-1} \cdot H. \tag{2}$$

Равенство (2) называется матричной записью решения системы линейных уравнений. Для нахождения решения системы уравнений необходимо вычислить обратную матрицу A^{-1}.

Пусть имеем невырожденную матрицу

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \quad \text{Тогда } A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{31}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \frac{A_{32}}{\Delta} \\ \frac{A_{13}}{\Delta} & \frac{A_{23}}{\Delta} & \frac{A_{33}}{\Delta} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} (i=1, 2, 3; j=1, 2, 3) – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} в определителе матрицы A, которое является произведением $(-1)^{i+j}$ на минор (определитель) второго порядка, полученный вычеркиванием i-й строки и j-го столбца в определителе матрицы A.

Вычислим определитель Δ и алгебраические дополнения A_{ij} элементов матрицы A.

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$ – следовательно матрицы A имеет обратную матрицу A^{-1}.

$A_{11} = (-1)^{i+1.} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5,$ $A_{12} = (-1)^{1+2.} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5,$

$A_{13} = (-1)^{1+3.} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5,$ $A_{21} = (-1)^{2+1.} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3,$

$A_{22} = (-1)^{2+2.} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1,$ $A_{23} = (-1)^{2+3.} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1,$

$A_{31} = (-1)^{3+1.} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1,$ $A_{32} = (-1)^{3+2.} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1,$

$A_{33} = (-1)^{3+3.} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7.$

Тогда

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{10} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{5}{10} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ -\frac{5}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{7}{10} \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \\ -5 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

По формуле (2) находим решение данной системы уравнений в матричной форме:

$$X = A^{-1} \cdot H = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \\ -5 & -1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 + 3 \cdot 8 + (-1) \cdot (-1) \\ -5 \cdot 1 + 1 \cdot 8 + 3 \cdot (-1) \\ -5 \cdot 1 - 1 \cdot 8 + 7 \cdot (-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда $x_1=3$, $x_2=0$, $x_3=-2$.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется определителем второго, третьего, n-го порядков?
2. Назовите основные свойства определителей.

3. Что называется минором, алгебраическим дополнением элемента определителя?

4. Напишите формулу Крамера решения системы линейных уравнений. В каких случаях их можно использовать?

5. Назовите схему решения системы линейных уравнений по методу Гаусса.

6. Что называется матрицей?

7. Как определяются основные действия над матрицами?

8. Какая матрица называется обратной по отношению к данной матрице? Как найти матрицу, обратную данной?

9. Что называется рангом матрицы? Как найти ранг матрицы?

10. Сформулируйте теорему Кронекера-Капелли.

11. Опишите матричный способ решения системы линейных уравнений.

12. Какова геометрическая интерпретация систем линейных уравнений и неравенств?