Задание: для одноопорной балки, нагруженной сосредоточенными силами, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

Найти максимальный изгибающий момент и из условия прочности подобрать поперечное сечение для балки в виде двутавра и прямоугольника с соотношением сторон $h = 2b$.

Материал сталь, допускаемое напряжение 160 МПа.

Рассчитать площади поперечных сечений и сделать вывод о целесообразности применения сечения.

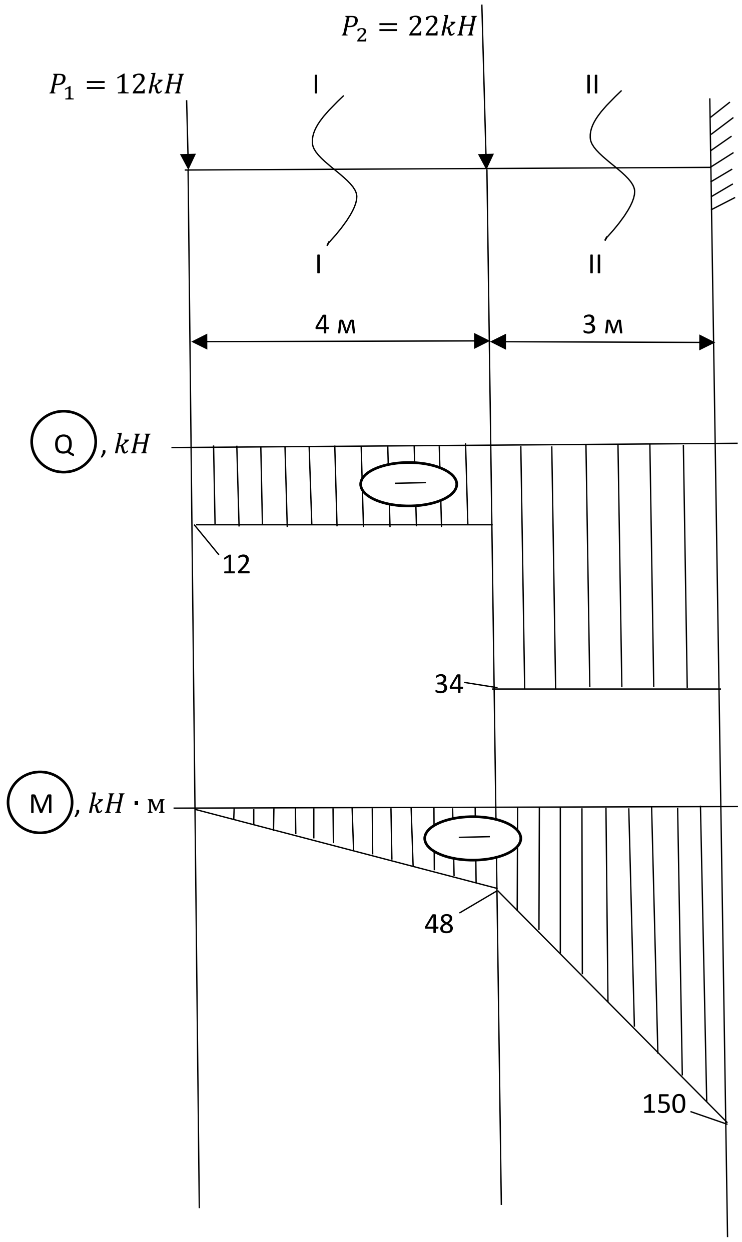
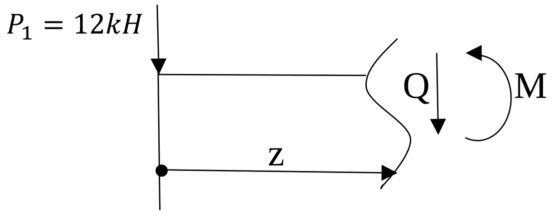


Рисунок 1 – Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

Составляем уравнения равновесия.

Участок I-I:

$0 \le z \le 4м$



$\sum Y_k = 0;\ \ Q + P_1 = 0; Q = -P_1; Q = -12kH$

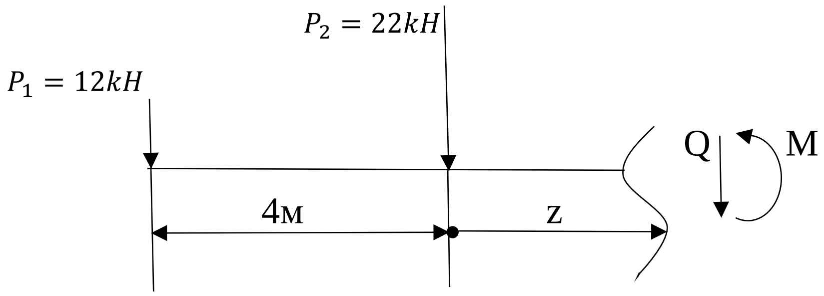
$\sum m_x(P_k) = 0; -M - P_1 \cdot z = 0; M = -P_1 \cdot z;$

При $z = 0$ $M = -12 \cdot 0 = 0$

При $z = 4м$ $M = -12 \cdot 4 = -48(kH \cdot м)$

Участок II-II:

$0 \le z \le 3м$



$\sum Y_k = 0;\ \ Q + P_1\ + P_2\ = 0; Q = -P_1 - P_2\,; Q = -12 - 22 = 34(kH)$

$\sum m_x(P_k) = 0; -M - P_1 \cdot (4 + z) - P_2 \cdot z\ = 0; M = -P_1 \cdot (4 + z)\ - P_2 \cdot z;$

При $z = 0$ $M = -12 \cdot (4 + 0) - 22 \cdot 0 = -48(kH \cdot м)$

При $z = 3м$ $M = -12 \cdot (4 + 3) - 22 \cdot 3 = -150(kH \cdot м)$

Выбираем соответствующий масштаб и строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (рис.1).

Итак, максимальный изгибающий момент $M_и = 150kH \cdot м$.

Опасным сечением является сечение, где действует максимальный изгибающий момент. Подбираем размеры балки в опасном сечении **по условию прочности**:

$$\sigma_{и}^{max} = \frac{M_{и}}{W_x} \leq [\sigma_{и}], \qquad (1)$$

где $\sigma_{и}^{max}$ – нормальное напряжение на поверхности при изгибе;

$M_{и}$ – максимальный изгибающий момент в сечении;

W_x – осевой момент сопротивления сечения;

$[\sigma_{и}]$ – допускаемое напряжение.

Для балки в виде двутавра:

$$W_x \geq \frac{M_{и}}{[\sigma_{и}]} \qquad (2)$$

$$W_x \geq \frac{150 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{160} = 937{,}5 \cdot 10^3(мм^3) = 937{,}5(см^3)$$

По таблице 3.2 (Приложение 3 ГОСТ 8239-89) выбираем двутавр № 40: момент сопротивления $W_x = 953 см^3$; площадь поперечного сечения $А_{двутавр} = 72{,}6 см^2$.

Для балки в виде прямоугольника:

$$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6}, \qquad (3)$$

где b и h – стороны прямоугольника.

По условию задачи $h = 2b$, тогда из уравнения (3) получаем:

$$W_x = \frac{b \cdot (2b)^2}{6} = \frac{4b^3}{6} = \frac{2b^3}{3}$$

Таким образом,

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{3 \cdot W_x}{2}}; \; b \geq \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 937{,}5}{2}} = 11{,}2(см)$$

$$h = 2 \cdot 11{,}2 = 22{,}4(см).$$

Площадь поперечного сечения

$$А_{прямоугольник} = b \cdot h; \; А_{прямоугольник} = 11{,}2 \cdot 22{,}4 = 250{,}88(см^2)$$

Итак,

$$\frac{A_{\text{прямоугольник}}}{A_{\text{двутавр}}} = \frac{250,88}{72,6} = 3,5$$

Вывод: балка прямоугольного сечения в 3,5 раза тяжелее, поэтому целесообразно применять сечение двутавр.

Задание 4.2: для двухопорной балки, нагруженной сосредоточенными силами и парой силой с моментом m, определить реакции в опорах, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, найти максимальный изгибающий момент.

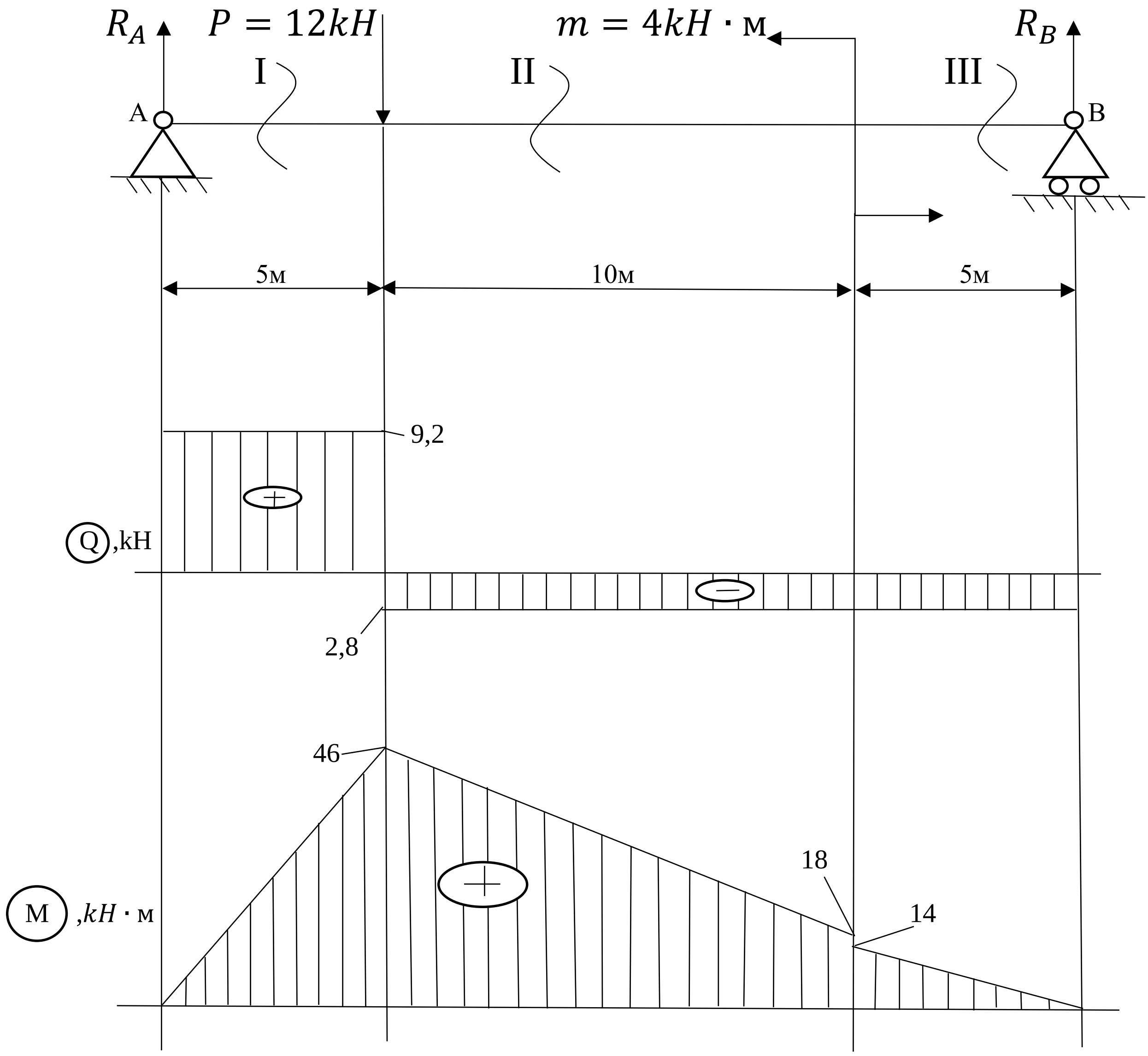


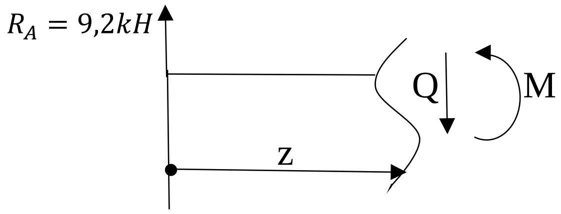
Рисунок 1 – Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (задание 4.2)

1. Определяем реакции в опорах.
   $\sum m_A(P_k) = 0;\ -P \cdot 5 + m + R_B \cdot 20 = 0$
   $R_B = \frac{P \cdot 5 - m}{20};\ R_B = \frac{12 \cdot 5 - 4}{20} = 2{,}8(kH)$
   $\sum Y_k = 0;\ R_A - P + R_B = 0$
   $R_A = P - R_B;\ R_A = 12 - 2{,}8 = 9{,}2(kH)$

2. Определяем поперечные силы и изгибающие моменты.

Участок I:

$0 \leq z \leq 5\text{м}$



$\sum Y_k = 0;\ -Q + R_A = 0; Q = R_A; Q = 9{,}2kH$

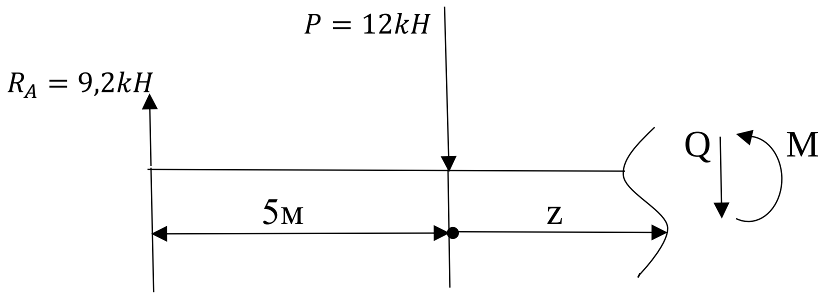
$\sum m_x(P_k) = 0; -M + R_A \cdot z = 0; M = R_A \cdot z;$

При $z = 0$ $M = 9{,}2 \cdot 0 = 0$

При $z = 5\text{м}$ $M = 9{,}2 \cdot 5 = 46(kH \cdot \text{м})$

Участок II:

$0 \leq z \leq 10\text{м}$



$\sum Y_k = 0;\ -Q - P + R_A = 0; Q = -P + R_A; Q = -12 + 9{,}2 = -2{,}8(kH)$

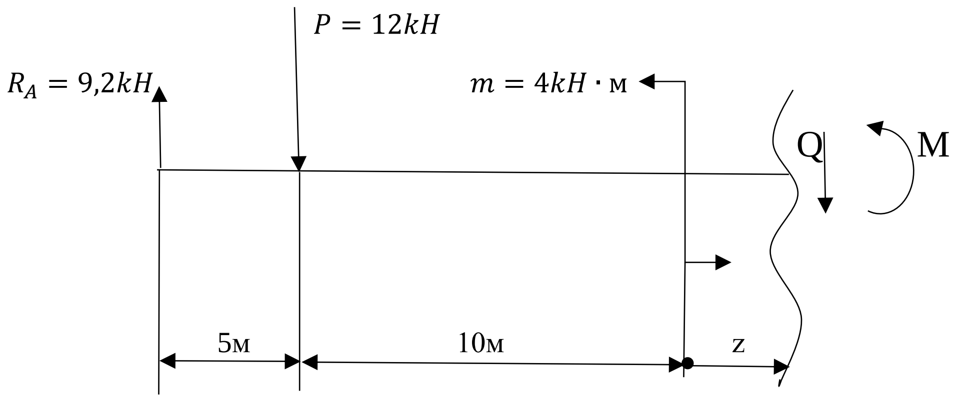
$\sum m_x(P_k) = 0; -M + R_A \cdot (5 + z) - P \cdot z = 0; M = R_A \cdot (5 + z) - P \cdot z;$

При $z = 0$ $M = 9{,}2 \cdot (5 + 0) - 12 \cdot 0 = 46(kH \cdot \text{м})$

При $z = 10\text{м}$ $M = 9{,}2 \cdot (5 + 10) - 12 \cdot 10 = 18(kH \cdot \text{м})$

Участок III:

$$0 \leq z \leq 5\text{м}$$



$\sum Y_k = 0;\ -Q - P\ + R_A\ = 0; Q = -P\ + R_A\ ; Q = -12 + 9,2 = -2,8(kH)$

$\sum m_x(P_k) = 0; -M + R_A \cdot (15 + z) - P \cdot (10 + z) - m\ = 0;$

$$M = R_A \cdot (15 + z) - P \cdot (10 + z) - m\ ;$$

При $z = 0$ $M = 9,2 \cdot (15 + 0) - 12 \cdot (10 + 0) - 4 = 14(kH \cdot \text{м})$

При $z = 5\text{м}$ $M = 9,2 \cdot (15 + 5) - 12 \cdot (10 + 5) - 4 = 0(kH \cdot \text{м})$

3. Строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (рис.1) и определяем максимальный изгибающий момент: $M_{max} = 46kH \cdot \text{м}$.

Ответ: $R_A = 9,2kH$; $R_B = 2,8kH$; $M_{max} = 46kH \cdot \text{м}$.

Задание 4.3: для изображенной балки на рисунке 2 определить реакции в опорах, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, найти максимальный изгибающий момент.

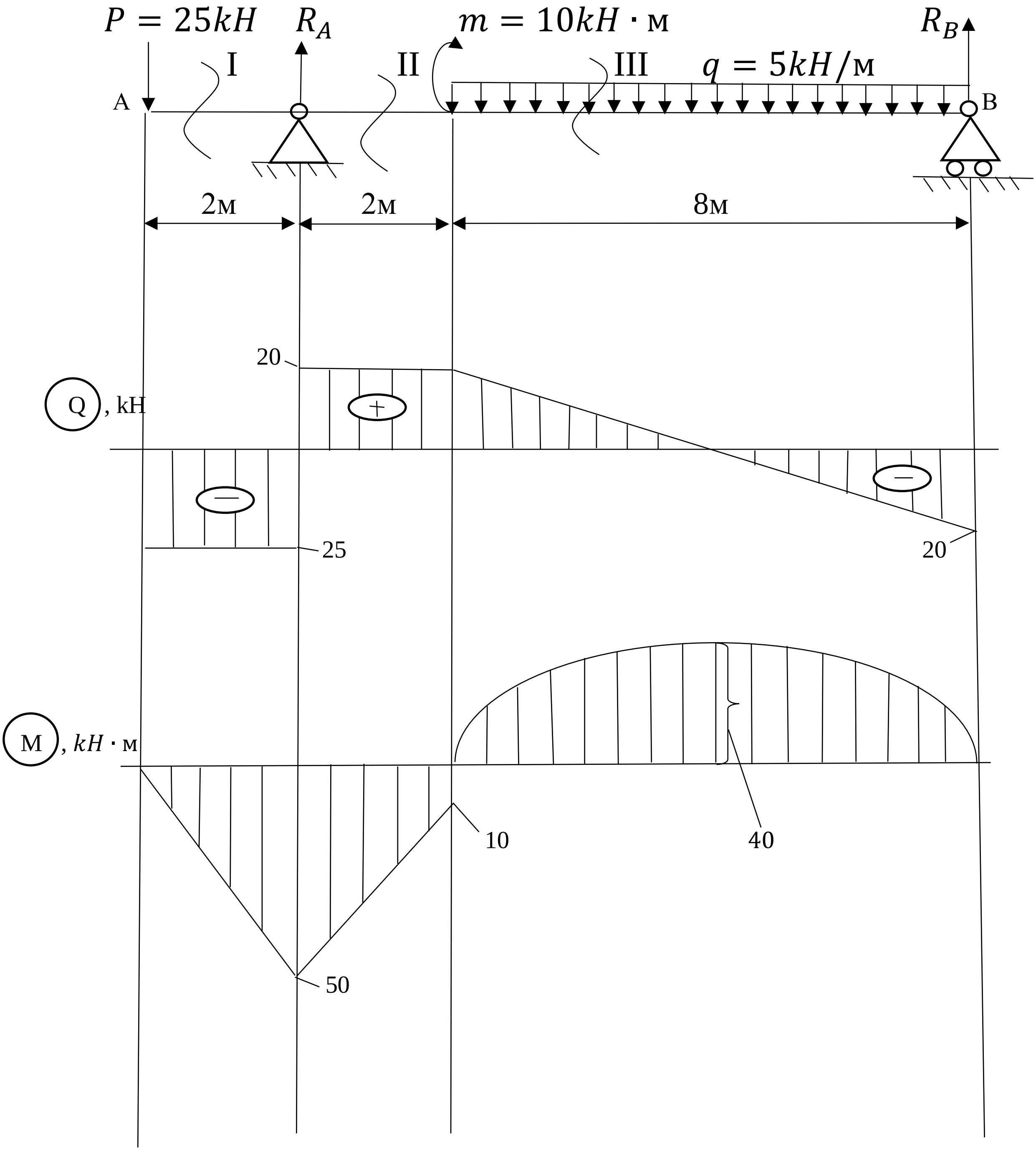


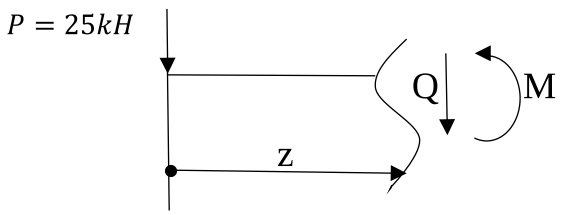
Рисунок 2 – Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (задание 4.3)

1. Определяем реакции в опорах.
   $\sum m_A(P_k) = 0;\ P \cdot 2 - m - q \cdot 8 \cdot 6 + R_B \cdot 10 = 0$
   $R_B = \frac{-P \cdot 2 + m + q \cdot 8 \cdot 6}{10}$; $R_B = \frac{-25 \cdot 2 + 10 + 5 \cdot 8 \cdot 6}{10} = 20(kH)$
   $\sum Y_k = 0;\ R_A - P - q \cdot 8 + R_B = 0$
   $R_A = P + q \cdot 8 - R_B;\ R_A = 25 + 5 \cdot 8 - 20 = 45(kH)$

2. Определяем поперечные силы и изгибающие моменты.

Участок I:

$0 \leq z \leq 2\text{м}$



$\sum Y_k = 0;\ -Q - P = 0; Q = -P; Q = -25kH$

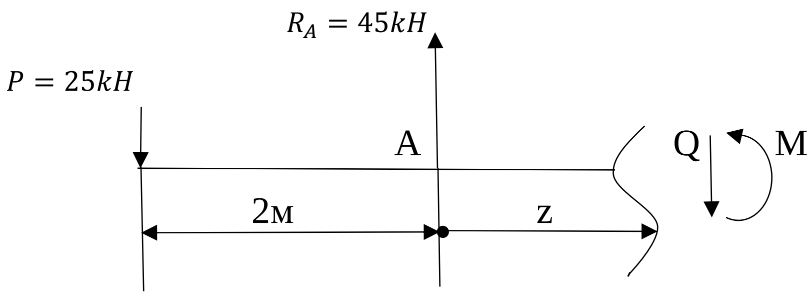
$\sum m_x(P_k) = 0; -M - P \cdot z = 0; M = -P \cdot z;$

При $z = 0$ $M = 25 \cdot 0 = 0$

При $z = 2\text{м}$ $M = -25 \cdot 2 = -50(kH \cdot \text{м})$

Участок II:

$0 \leq z \leq 2\text{м}$



$\sum Y_k = 0;\ -Q - P + R_A = 0; Q = -P + R_A; Q = -25 + 45 = 20(kH)$

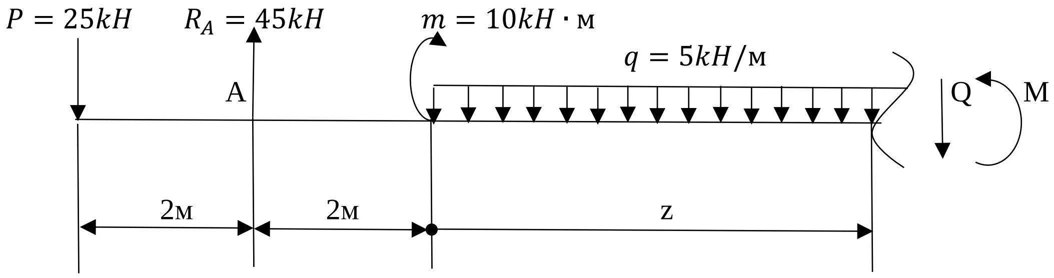
$\sum m_x(P_k) = 0; -M + R_A \cdot z - P \cdot (2+z) = 0; M = R_A \cdot z - P \cdot (2+z);$

При $z = 0$ $M = 45 \cdot 0 - 25 \cdot (2+0) = -50(kH \cdot \text{м})$

При $z = 2\text{м}$ $M = 45 \cdot 2 - 25 \cdot (2+2) = -10(kH \cdot \text{м})$

Участок III:

$$0 \le z \le 8\text{м}$$



$\sum Y_k = 0; \ -Q - P + R_A - q \cdot z = 0; Q = -P + R_A - q \cdot z;$

При $z = 0$ $Q = -25 + 45 - 5 \cdot 0 = 20(kH)$

При $z = 8\text{м}$ $Q = -25 + 45 - 5 \cdot 8 = -20(kH)$

$\sum m_x(P_k) = 0; -M + R_A \cdot (2+z) - P \cdot (4+z) + m - q \cdot z \cdot \frac{z}{2} = 0;$

$$M = R_A \cdot (2+z) - P \cdot (4+z) + m - q \cdot \frac{z^2}{2};$$

При $z = 0$ $M = 45 \cdot (2+0) - 25 \cdot (4+0) + 10 - 5 \cdot \frac{0^2}{2} = 0(kH \cdot \text{м})$

При $z = 8\text{м}$ $M = 45 \cdot (2+8) - 25 \cdot (4+8) + 10 - 5 \cdot \frac{8^2}{2} = 0(kH \cdot \text{м})$

При $z = 4\text{м}$ $M = 45 \cdot (2+4) - 25 \cdot (4+4) + 10 - 5 \cdot \frac{4^2}{2} = 40(kH \cdot \text{м})$

3. Строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (рис.2) и определяем максимальный изгибающий момент: $M_{max} = 50kH \cdot \text{м}$.

Ответ: $R_A = 45kH$; $R_B = 20kH$; $M_{max} = 50kH \cdot \text{м}$.

Дано: $N_1 = 5$кВт; $N_2 = 2{,}5$кВт; $N_3 = 7{,}5$кВт; $[\tau_к] = 30$МПа; $G = 8 \cdot 10^4$МПа; $[\varphi_0] = 0{,}02\frac{рад}{м} = 0{,}02 \cdot 10^{-3}\frac{рад}{мм}$; $\omega = 25\frac{рад}{с}$ $c = 0{,}9$

Определить: 1) значения внешних моментов;
2) уравновешенный момент;
3) построить эпюру крутящих моментов по длине вала;
4) определить диаметры вала по сечениям из расчетов на прочность и жесткость (круг, кольцо).

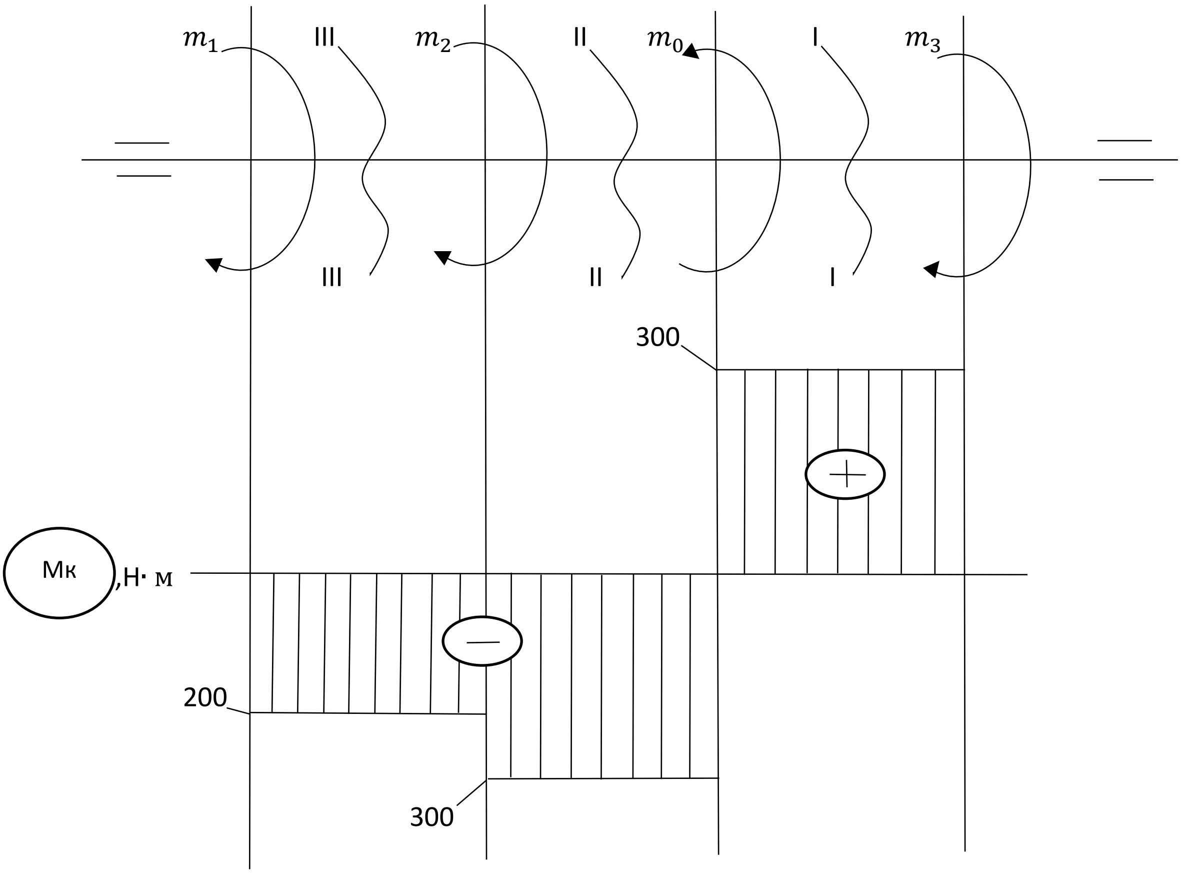


Рисунок 1 – Эпюра крутящих моментов по длине вала

1. Определяем значение внешних моментов, соответствующих предельным мощностям:

$$M = \frac{N}{\omega}, \qquad (1)$$

где M – внешний момент, Н · м;
N – предельная мощность, Вт;
ω – угловая скорость, $\frac{рад}{с}$.

$$M_1 = \frac{5 \cdot 10^3}{25} = 200(Н \cdot м);$$

$$M_2 = \frac{2{,}5 \cdot 10^3}{25} = 100(\text{Н} \cdot \text{м});$$

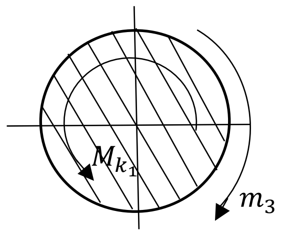
$$M_3 = \frac{7{,}5 \cdot 10^3}{25} = 300(\text{Н} \cdot \text{м}).$$

2. Определяем уравновешивающий момент M_0:

$$M_0 = M_1 + M_2 + M_3 = 200 + 100 + 300 = 600(\text{Н} \cdot \text{м}).$$

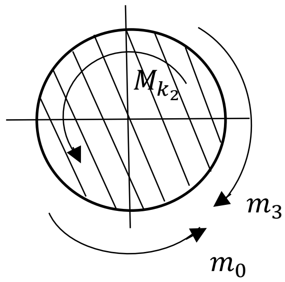
3. Определяем крутящие моменты M_k в поперечных сечениях вала с помощью метода сечений.

<u>Участок I-I:</u>



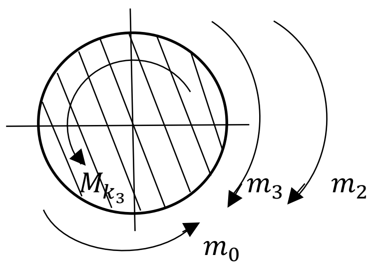
$$m_3 - M_{k_1} = 0$$
$$M_{k_1} = m_3 = 300 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

<u>Участок II-II:</u>



$$m_3 - m_0 - M_{k_2} = 0$$
$$M_{k_2} = -m_0 + m_3 = -600 + 300 = -300 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

<u>Участок III-III:</u>



$$m_2 + m_3 - m_0 - M_{k_3} = 0$$
$$M_{k_3} = -m_0 + m_2 + m_3 = -600 + 100 + 300 = -200 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

4. Строим эпюру крутящих моментов по длине вала, при этом заметим, что скачок на эпюре всегда численно равен приложенному вращающему моменту (рис.1).

Выбираем соответствующий масштаб. Откладываем значения моментов, штрихуем эпюру поперек, обводим по контуру, записываем значения моментов. Максимальный крутящий момент $M_k = 300 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

5. Определяем диаметры вала по сечениям из расчетов на прочность и жесткость.

5.1 **Сечение – круг:**

– **из условия прочности:**

$$\tau_k = \frac{M_k}{W_p} \leq [\tau_k], \tag{2}$$

где τ_k – напряжение при кручении, Н/мм^2, Н/м^2;

W_p – момент сопротивления при кручении, мм^3, м^3.

Для круга W_p определяем по формуле (3):

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0{,}2d^3 \tag{3}$$

Таким образом,

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_k}{0{,}2[\tau_k]}} \tag{4}$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{300 \cdot 10^3}{0{,}2 \cdot 30}} = 36{,}8(\text{мм})$$

– **из условия жесткости:**

$$\varphi_0 = \frac{M_k}{GI_p} \leq [\varphi_0], \tag{5}$$

где φ_0 – относительный угол закручивания, $\frac{\text{рад}}{\text{мм}}, \frac{\text{рад}}{\text{м}}$;

G – модуль упругости при сдвиге, Н/мм^2, Н/м^2;

I_p – полярный момент инерции в сечении, мм^4, м^4;

$[\varphi_0]$ – допускаемый относительный угол закручивания, $\frac{\text{рад}}{\text{мм}}, \frac{\text{рад}}{\text{м}}$.

Для круга I_p определяем по формуле (6):

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0{,}1d^4 \quad (6)$$

Таким образом,

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{M_k}{G \cdot 0{,}1[\varphi_0]}} \quad (7)$$

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{300 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}02 \cdot 10^{-3}}} = 37(\text{мм})$$

Принимаем $d = 38$ мм.

Площадь сечения – круг $S_{\text{круг}}$ определяем по формуле (8):

$$S_{\text{круг}} = \frac{\pi d^2}{4} \quad (8)$$

$$S_{\text{круг}} = \frac{3{,}14 \cdot 38^2}{4} = 1133{,}54\ (\text{мм}^2)$$

5.2 **Сечение – кольцо:**

– **из условия прочности (2),** с учетом того, для кольца W_p определяем по формуле (9):

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16}(1 - \text{c}^4) \approx 0{,}2d^3(1 - \text{c}^4), \quad (9)$$

получаем

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_k}{0{,}2(1 - \text{c}^4)[\tau_k]}} \quad (10)$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{300 \cdot 10^3}{0{,}2(1 - 0{,}9^4) \cdot 30}} = 52{,}6(\text{мм})$$

– **из условия жесткости (5),** с учетом того, что для кольца I_p определяем по формуле (11):

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32}(1 - \text{c}^4) \approx 0{,}1d^4(1 - \text{c}^4), \qquad (11)$$

получаем

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{M_k}{G \cdot 0{,}1(1 - \text{c}^4)[\varphi_0]}} \qquad (12)$$

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{300 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 0{,}1(1 - 0{,}9^4) \cdot 0{,}02 \cdot 10^{-3}}} = 48{,}3(\text{мм})$$

Принимаем $d = 54$ мм.

Площадь сечения – кольцо $S_{\text{кольцо}}$ определяем по формуле (13):

$$S_{\text{круг}} = \frac{\pi d^2}{4} - \frac{\pi d_{\text{вн}}^2}{4}, \qquad (13)$$

где $d_{\text{вн}}$ – внутренний диаметр кольца, мм

$$d_{\text{вн}} = \text{c} \cdot d \qquad (14)$$

$$d_{\text{вн}} = 0{,}9 \cdot 54 = 48{,}6(\text{мм})$$

$$S_{\text{круг}} = \frac{3{,}14 \cdot 54^2}{4} - \frac{3{,}14 \cdot 48{,}6^2}{4} = 434{,}9\ (\text{мм}^2)$$

Вывод: целесообразно использовать сечение – кольцо (экономия материала).