*Задание 1*

Исходные данные:

Запас груза в i-м пункте отправления ai: a1=50, a2=100, a3=50.

Потребность j-го пункта назначения в грузе bj: b1=50, b2=70, b3=40, b4=40.

Матрица тарифов (транспортных расходов) Ci,j:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| (Ci,j)m×n= | Завод/Обьект | **1** | **2** | **3** | **4** |
| **1** | 2 | 6 | 2 | 3 |
| **2** | 5 | 2 | 1 | 7 |
| **3** | 4 | 5 | 7 | 8 |

Составим математическую модель задачи транспортного типа. Общие суммарные затраты, связанные с реализацией плана перевозок, можно представить целевой функцией



Переменные Xk должны удовлетворять ограничениям по запасам (1), по потребностям (2), и условиям неотрицательности. В математической записи это можно представить так:



Целевая функция:

Z=2X1+6X2+2X3+3X4+5X5+2X6+1X7+7X8+4X9+5X10+7X11+8X12→min

Условия:

1X1+1X2+1X3+1X4+0X5+0X6+0X7+0X8+0X9+0X10+0X11+0X12=50
0X1+0X2+0X3+0X4+1X5+1X6+1X7+1X8+0X9+0X10+0X11+0X12=100
0X1+0X2+0X3+0X4+0X5+0X6+0X7+0X8+1X9+1X10+1X11+1X12=50
1X1+0X2+0X3+0X4+1X5+0X6+0X7+0X8+1X9+0X10+0X11+0X12=50
0X1+1X2+0X3+0X4+0X5+1X6+0X7+0X8+0X9+1X10+0X11+0X12=70
0X1+0X2+1X3+0X4+0X5+0X6+1X7+0X8+0X9+0X10+1X11+0X12=40
0X1+0X2+0X3+1X4+0X5+0X6+0X7+1X8+0X9+0X10+0X11+1X12=40

Транспортная задача разрешима только в случае, если соблюдается условие баланса Σai=Σbi. В нашем случае оно выполняется, так как:

Σai=50+100+50=200
Σbi=50+70+40+40=200
Следовательно задача является закрытой (сбалансированой).

Приведем систему ограничений к каноническому виду, для этого введем в каждое условие искусственную переменную R. Тогда система запишется в виде:
1X1+1X2+1X3+1X4+0X5+0X6+0X7+0X8+0X9+0X10+0X11+0X12+R1=50
0X1+0X2+0X3+0X4+1X5+1X6+1X7+1X8+0X9+0X10+0X11+0X12+R2=100
0X1+0X2+0X3+0X4+0X5+0X6+0X7+0X8+1X9+1X10+1X11+1X12+R3=50
1X1+0X2+0X3+0X4+1X5+0X6+0X7+0X8+1X9+0X10+0X11+0X12+R4=50
0X1+1X2+0X3+0X4+0X5+1X6+0X7+0X8+0X9+1X10+0X11+0X12+R5=70
0X1+0X2+1X3+0X4+0X5+0X6+1X7+0X8+0X9+0X10+1X11+0X12+R6=40
0X1+0X2+0X3+1X4+0X5+0X6+0X7+1X8+0X9+0X10+0X11+1X12+R7=40

Переходим к формированию исходной симплекс таблицы. В строку F таблицы заносятся коэффициенты целевой функции.

Так как среди исходного набора условий были равенства, мы ввели искуственные переменные R. Это значит, что в симплекс таблицу нам необходимо добавить дополнительную строку M, элементы которой расчитываются как сумма соответствующих элементов условий-равенств (тех которые после приведения к каноническому виду содержат искусственные переменные R) взятая с противоположным знаком.

Из данных задачи составляем исходную симплекс таблицу.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **X1** | **X2** | **X3** | **X4** | **X5** | **X6** | **X7** | **X8** | **X9** | **X10** | **X11** | **X12** | **Своб член** |
| **F** | 2 | 6 | 2 | 3 | 5 | 2 | 1 | 7 | 4 | 5 | 7 | 8 | 0 |
| **R1** | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 50 |
| **R2** | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100 |
| **R3** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 50 |
| **R4** | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 50 |
| **R5** | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 70 |
| **R6** | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 40 |
| **R7** | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 40 |
| **M** | -2 | -2 | -2 | -2 | -2 | -2 | -2 | -2 | -2 | -2 | -2 | -2 | -400 |

Так как в столбце свободных членов нет отрицательных элементов, то найдено допустимое решение. В строке M имеются отрицательные элементы, это означает что полученое решение не оптимально. Определим ведущий столбец. Для этого найдем в строке M максимальный по модулю отрицательный элемент - это -2 (столбец X1). Ведущей строкой будет та для которой положительное отношение свободного члена к соответствующему элементу ведущего столбца минимально. Ведущей строкой является R1, а ведущий элемент: 1.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **X2** | **X3** | **X4** | **X5** | **X6** | **X7** | **X8** | **X9** | **X10** | **X11** | **X12** | **Своб член** |
| **F** | 4 | 0 | 1 | 5 | 2 | 1 | 7 | 4 | 5 | 7 | 8 | -100 |
| **X1** | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 50 |
| **R2** | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100 |
| **R3** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 50 |
| **R4** | -1 | -1 | -1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **R5** | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 70 |
| **R6** | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 40 |
| **R7** | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 40 |
| **M** | 0 | 0 | 0 | -2 | -2 | -2 | -2 | -2 | -2 | -2 | -2 | -300 |

В строке M имеются отрицательные элементы, это означает что полученое решение не оптимально. Определим ведущий столбец. Для этого найдем в строке M максимальный по модулю отрицательный элемент - это -2 (столбец X5). Ведущей строкой будет та для которой положительное отношение свободного члена к соответствующему элементу ведущего столбца минимально. Ведущей строкой является R2, а ведущий элемент: 1.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **X2** | **X3** | **X4** | **X6** | **X7** | **X8** | **X9** | **X10** | **X11** | **X12** | **Своб член** |
| **F** | 4 | 0 | 1 | -3 | -4 | 2 | 4 | 5 | 7 | 8 | -600 |
| **X1** | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 50 |
| **X5** | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100 |
| **R3** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 50 |
| **R4** | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 0 | 0 | 0 | -100 |
| **R5** | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 70 |
| **R6** | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 40 |
| **R7** | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 40 |
| **M** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -2 | -2 | -2 | -2 | -100 |

В составленой нами таблице имеются отрицательные элементы в столбце свободных членов, находим среди них максимальный по модулю - это элемент: -100, он задает ведущую строку - R4. В этой строке так же находим максимальный по модулю отрицательный элемент: -1 он находится в столбце X2 который будет ведущим столбцом. Переменная в ведущей строке исключается из базиса, а переменная соответсвующая ведущему столцу включается в базис. Пересчитаем симплекс-таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **X3** | **X4** | **X6** | **X7** | **X8** | **X9** | **X10** | **X11** | **X12** | **Своб член** |
| **F** | -4 | -3 | -7 | -8 | -2 | 8 | 5 | 7 | 8 | -1000 |
| **X1** | 0 | 0 | -1 | -1 | -1 | 1 | 0 | 0 | 0 | -50 |
| **X5** | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100 |
| **R3** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 50 |
| **X2** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 100 |
| **R5** | -1 | -1 | 0 | -1 | -1 | 1 | 1 | 0 | 0 | -30 |
| **R6** | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 40 |
| **R7** | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 40 |
| **M** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -2 | -2 | -2 | -2 | -100 |

В составленой нами таблице имеются отрицательные элементы в столбце свободных членов, находим среди них максимальный по модулю - это элемент: -50, он задает ведущую строку - X1. В этой строке так же находим максимальный по модулю отрицательный элемент: -1 он находится в столбце X6 который будет ведущим столбцом. Переменная в ведущей строке исключается из базиса, а переменная соответсвующая ведущему столцу включается в базис. Пересчитаем симплекс-таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **X3** | **X4** | **X1** | **X7** | **X8** | **X9** | **X10** | **X11** | **X12** | **Своб член** |
| **F** | -4 | -3 | -7 | -1 | 5 | 1 | 5 | 7 | 8 | -650 |
| **X6** | -0 | -0 | -1 | 1 | 1 | -1 | -0 | -0 | -0 | 50 |
| **X5** | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 50 |
| **R3** | 0 | 0 | -0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 50 |
| **X2** | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 50 |
| **R5** | -1 | -1 | -0 | -1 | -1 | 1 | 1 | 0 | 0 | -30 |
| **R6** | 1 | 0 | -0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 40 |
| **R7** | 0 | 1 | -0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 40 |
| **M** | 0 | 0 | -0 | 0 | 0 | -2 | -2 | -2 | -2 | -100 |

В составленой нами таблице имеются отрицательные элементы в столбце свободных членов, находим среди них максимальный по модулю - это элемент: -30, он задает ведущую строку - R5. В этой строке так же находим максимальный по модулю отрицательный элемент: -1 он находится в столбце X3 который будет ведущим столбцом. Переменная в ведущей строке исключается из базиса, а переменная соответсвующая ведущему столцу включается в базис. Пересчитаем симплекс-таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **X4** | **X1** | **X7** | **X8** | **X9** | **X10** | **X11** | **X12** | **Своб член** |
| **F** | 1 | -7 | 3 | 9 | -3 | 1 | 7 | 8 | -530 |
| **X6** | 0 | -1 | 1 | 1 | -1 | -0 | -0 | -0 | 50 |
| **X5** | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 50 |
| **R3** | 0 | -0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 50 |
| **X2** | 0 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 20 |
| **X3** | 1 | 0 | 1 | 1 | -1 | -1 | -0 | -0 | 30 |
| **R6** | -1 | -0 | 0 | -1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 10 |
| **R7** | 1 | -0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 40 |
| **M** | 0 | -0 | 0 | 0 | -2 | -2 | -2 | -2 | -100 |

В строке M имеются отрицательные элементы, это означает что полученое решение не оптимально. Определим ведущий столбец. Для этого найдем в строке M максимальный по модулю отрицательный элемент - это -2 (столбец X9). Ведущей строкой будет та для которой положительное отношение свободного члена к соответствующему элементу ведущего столбца минимально. Ведущей строкой является R6, а ведущий элемент: 1.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **X4** | **X1** | **X7** | **X8** | **X10** | **X11** | **X12** | **Своб член** |
| **F** | -2 | -7 | 3 | 6 | 4 | 10 | 8 | -500 |
| **X6** | -1 | -1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 60 |
| **X5** | 1 | 1 | 0 | 1 | -1 | -1 | 0 | 40 |
| **R3** | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 40 |
| **X2** | 1 | 1 | -1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 10 |
| **X3** | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 40 |
| **X9** | -1 | -0 | 0 | -1 | 1 | 1 | 0 | 10 |
| **R7** | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 40 |
| **M** | -2 | -0 | 0 | -2 | 0 | 0 | -2 | -80 |

В строке M имеются отрицательные элементы, это означает что полученое решение не оптимально. Определим ведущий столбец. Для этого найдем в строке M максимальный по модулю отрицательный элемент - это -2 (столбец X4). Ведущей строкой будет та для которой положительное отношение свободного члена к соответствующему элементу ведущего столбца минимально. Ведущей строкой является X2, а ведущий элемент: 1.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **X2** | **X1** | **X7** | **X8** | **X10** | **X11** | **X12** | **Своб член** |
| **F** | 2 | -5 | 1 | 6 | 4 | 8 | 8 | -480 |
| **X6** | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 70 |
| **X5** | -1 | 0 | 1 | 1 | -1 | 0 | 0 | 30 |
| **R3** | -1 | -1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 30 |
| **X4** | 1 | 1 | -1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 10 |
| **X3** | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 40 |
| **X9** | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 0 | 0 | 20 |
| **R7** | -1 | -1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 30 |
| **M** | 2 | 2 | -2 | -2 | 0 | -2 | -2 | -60 |

В строке M имеются отрицательные элементы, это означает что полученое решение не оптимально. Определим ведущий столбец. Для этого найдем в строке M максимальный по модулю отрицательный элемент - это -2 (столбец X7). Ведущей строкой будет та для которой положительное отношение свободного члена к соответствующему элементу ведущего столбца минимально. Ведущей строкой является X5, а ведущий элемент: 1.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **X2** | **X1** | **X5** | **X8** | **X10** | **X11** | **X12** | **Своб член** |
| **F** | 3 | -5 | -1 | 5 | 5 | 8 | 8 | -510 |
| **X6** | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 70 |
| **X7** | -1 | 0 | 1 | 1 | -1 | 0 | 0 | 30 |
| **R3** | 0 | -1 | -1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| **X4** | 0 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 0 | 40 |
| **X3** | 1 | 0 | -1 | -1 | 1 | 1 | 0 | 10 |
| **X9** | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 50 |
| **R7** | 0 | -1 | -1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| **M** | 0 | 2 | 2 | 0 | -2 | -2 | -2 | 0 |

В строке M имеются отрицательные элементы, это означает что полученое решение не оптимально. Определим ведущий столбец. Для этого найдем в строке M максимальный по модулю отрицательный элемент - это -2 (столбец X10). Ведущей строкой будет та для которой положительное отношение свободного члена к соответствующему элементу ведущего столбца минимально. Ведущей строкой является X3, а ведущий элемент: 1.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **X2** | **X1** | **X5** | **X8** | **X3** | **X11** | **X12** | **Своб член** |
| **F** | -2 | -5 | 4 | 10 | -5 | 3 | 8 | -560 |
| **X6** | 0 | 0 | 1 | 1 | -1 | -1 | 0 | 60 |
| **X7** | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 40 |
| **R3** | -1 | -1 | 0 | 1 | -1 | 0 | 1 | -10 |
| **X4** | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 50 |
| **X10** | 1 | 0 | -1 | -1 | 1 | 1 | 0 | 10 |
| **X9** | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 50 |
| **R7** | -1 | -1 | 0 | 1 | -1 | 0 | 1 | -10 |
| **M** | 2 | 2 | 0 | -2 | 2 | 0 | -2 | 20 |

В составленой нами таблице имеются отрицательные элементы в столбце свободных членов, находим среди них максимальный по модулю - это элемент: -10, он задает ведущую строку - R3. В этой строке так же находим максимальный по модулю отрицательный элемент: -1 он находится в столбце X2 который будет ведущим столбцом. Переменная в ведущей строке исключается из базиса, а переменная соответсвующая ведущему столцу включается в базис. Пересчитаем симплекс-таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **X1** | **X5** | **X8** | **X3** | **X11** | **X12** | **Своб член** |
| **F** | -3 | 4 | 8 | -3 | 3 | 6 | -540 |
| **X6** | 0 | 1 | 1 | -1 | -1 | 0 | 60 |
| **X7** | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 40 |
| **X2** | 1 | -0 | -1 | 1 | -0 | -1 | 10 |
| **X4** | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 40 |
| **X10** | -1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| **X9** | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 50 |
| **R7** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **M** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

В строке F имеются отрицательные элементы, это означает что полученое решение не оптимально. Определим ведущий столбец. Для этого найдем в строке F максимальный по модулю отрицательный элемент - это -3 Ведущей строкой будет та для которой положительное отношение свободного члена к соответствующему элементу ведущего столбца минимально. Ведущей строкой является X2, а ведущий элемент: 1.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **X2** | **X5** | **X8** | **X3** | **X11** | **X12** | **Своб член** |
| **F** | 3 | 4 | 5 | 0 | 3 | 3 | -510 |
| **X6** | 0 | 1 | 1 | -1 | -1 | 0 | 60 |
| **X7** | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 40 |
| **X1** | 1 | -0 | -1 | 1 | -0 | -1 | 10 |
| **X4** | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 40 |
| **X10** | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 0 | 10 |
| **X9** | -1 | 1 | 1 | -1 | 0 | 1 | 40 |
| **R7** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **M** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Так как исходной задачей был поиск минимума, оптимальное решение есть свободный член строки F, взятый с противоположным знаком.

Найдено оптимальное решение (минимальные транспортные расходы) F=510 при значениях переменных равных:

X6=60 (количество кирпича, доставленое от завода №2 к обьекту №2),
X7=40 (количество кирпича, доставленое от завода №2 к обьекту №3),
X1=10 (количество кирпича, доставленое от завода №1 к обьекту №1),
X4=40 (количество кирпича, доставленое от завода №1 к обьекту №4),
X10=10 (количество кирпича, доставленое от завода №3 к обьекту №2),
X9=40 (количество кирпича, доставленое от завода №3 к обьекту №1).