**Пример 6. Исследование функции**

**Задание:**

Исследовать функцию и построить график

$$y=\frac{x^{2}+x}{x+2}$$

**Решение:** представим функцию в виде

$$\begin{matrix}x^{2}+x&\left|\overline{x+2}\right.\\\overline{x^{2}+2x}&x-1\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}-x\\\overline{-x-2}\\ 2\end{matrix}$$

$$y=\frac{x^{2}+x}{x+2}=x-1+\frac{2}{x+2}$$

Будем исследовать функцию по следующему плану:

1. Общее исследование поведения функции
	1. Область определения функции

$$D\left(y\right)=\left(-\infty ;-2\right)∪\left(-2;+\infty \right)$$

* 1. Четность/нечетность, периодичность

$$y\left(-x\right)=\frac{x^{2}-x}{-x+2}\ne y\left(x\right)\ne -y\left(x\right)$$

Т.е. *y* – функция общего вида

1.3. Пересечение с осями координат и промежутки знакопостоянства

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | $$\left(-\infty ;-2\right)$$ | *-2* | $$\left(-2;-1\right)$$ | *-1* | $$\left(-1;0\right)$$ | *0* | $$\left(0;+\infty \right)$$ |
| *y* | $$-$$ | *Не сущ* | $$+$$ | *0* | $$-$$ | *0* | $$+$$ |

С осью *0y:* в точке (0,0)

1.4. Асимптоты

$x=-2$ – вертикальная асимптота

Найдем односторонние пределы в данной точке:

$$\lim\_{x\to -2-0}\frac{x^{2}+x}{x+2}=\left(\frac{6}{-0}\right)=-\infty $$

$$\lim\_{x\to -2+0}\frac{x^{2}+x}{x+2}=\left(\frac{6}{+0}\right)=+\infty $$

Наклонная асимптота для данной функции может быть найдена следующим образом:

$$\lim\_{x\to \pm \infty }\left(x-1+\frac{2}{x+2}\right)=\lim\_{x\to \pm \infty }\left(x-1\right)$$

График данной функции имеет асимптоту $y=x-1$, расположен выше неё при $x\rightarrow +\infty $ и ниже её при $x\rightarrow -\infty $.

1. Исследование функции по первой производной

$$y^{'}=\left(x-1+\frac{2}{x+2}\right)^{'}=1-\frac{2}{\left(x+2\right)^{2}}=\frac{x^{2}+4x+2}{\left(x+2\right)^{2}}$$

Найдем точки локального экстремума и промежутки возрастания и убывания:

$$x^{2}+4x+2=0$$

$$D=16-8=8, x\_{1,2}=\frac{-4\pm 2\sqrt{2}}{2}=-2\pm \sqrt{2}$$

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | $$\left(-\infty ;-2-\sqrt{2}\right)$$ | $$-2-\sqrt{2}$$ | $$\left(-2-\sqrt{2};-2\right)$$ | *-2* | $$\left(-2;-2+\sqrt{2}\right)$$ | $$-2+\sqrt{2}$$ | $$\left(-2+\sqrt{2};+\infty \right)$$ |
| *y'* | $$+$$ | *0* | $$-$$ | *Не сущ* | $$-$$ | *0* | $$+$$ |
| *y* | *возрастает* | *max* | *убывает* | *Не сущ* | *убывает* | *min* | *возрастает* |

В точке $-2-\sqrt{2}$ функция имеет локальный максимум $y\left(-2-\sqrt{2}\right)≈-5.828$

В точке $-2+\sqrt{2}$ функция имеет локальный минимум $y\left(-2+\sqrt{2}\right)≈-0.172$

1. Исследование функции по второй производной

$$y^{''}=\left(1-\frac{2}{\left(x+2\right)^{2}}\right)^{'}=\frac{4}{\left(x+2\right)^{3}}$$

Найдем точки перегиба графика функции и промежутки выпуклости/вогнутости:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *x* | $$\left(-\infty ;-2\right)$$ | $$-2$$ | $$\left(-2;+\infty \right)$$ |
| *y'’* | $$-$$ | *Не сущ* | $$+$$ |
| *y* | *выпуклая* | *Не сущ* | *вогнутая* |

