Контрольная работа "Кратные интегралы"

Задание 1. Изменить порядок интегрирования, сделать чертеж области.

1. $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{2+y}}^{0} f dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{-y}}^{0} f dx.$

2. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{-y}}^{0} f dx.$

3. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{y} f dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2-y^2}} f dx.$

4. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{y}} f dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2-y}} f dx.$

5. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{0} f dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{x}^{0} f dy.$

6. $\int\limits_{0}^{1/\sqrt{2}} dy \int\limits_{0}^{\arcsin y} f dx + \int\limits_{1/\sqrt{2}}^{1} dy \int\limits_{0}^{\arccos y} f dx.$

7. $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2+y}} f dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{-y}} f dx.$

8. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f dx + \int\limits_{1}^{e} dy \int\limits_{-1}^{-\ln y} f dx.$

9. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{x^2} f dy.$

10. $\int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f dy + \int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int\limits_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f dy.$

11. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{1-x^2}^{1} f dy + \int\limits_{1}^{e} dx \int\limits_{\ln x}^{1} f dy.$

12. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt[3]{y}} f dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{2-y} f dx.$

13. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{x} f dy + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f dy.$

14. $\int\limits_{-2}^{-1} dx \int\limits_{-(2+x)}^{0} f dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{\sqrt[3]{x}}^{0} f dy.$

15. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{y}} f dx + \int\limits_{1}^{e} dy \int\limits_{\ln y}^{1} f dx.$

16. $\int\limits_{0}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y}}^{0} f dx.$

17. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-y}^{0} f dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f dx.$

18. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{y^2} f dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{2-y} f dx.$

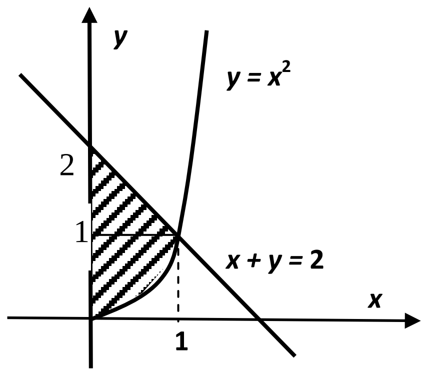
19. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} dx \int\limits_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f dy + \int\limits_{\sqrt{3}}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f dy.$

20. $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-(2+y)}^{0} f dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{\sqrt[3]{y}}^{0} f dx.$

21. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{y} f dx + \int\limits_{1}^{e} dy \int\limits_{\ln y}^{1} f dx .$

22. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{x^2} f dy + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f dy.$

Пример. Представить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ в виде повторных интегралов, если область D ограничена линиями $y=x^2$, $x+y=2$, $x\geq 0$.



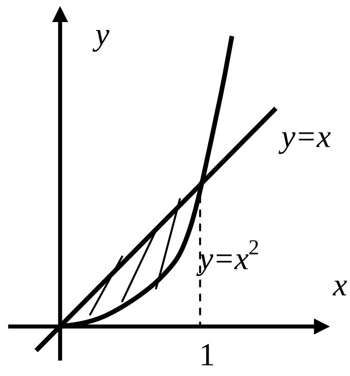
Решение. Сделаем чертеж области. Тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{2-x} f(x,y)dx=\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx+\int\limits_1^2 dy\int\limits_0^{2-y} f(x,y)dx.$$

Задание 2. Представить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ в виде повторных интегралов, если область D ограничена указанными линиями.

1. $D: y=\sqrt{4-x^2},\ y=\sqrt{3x},\ x\geq 0$.
2. $D: x^2=2y,\ 5x-2y-6=0$.
3. $D: x=\sqrt{8-y^2},\ y=x,\ y\geq 0$.
4. $D: x\geq 0,\ y\geq 0,\ y\leq 1,\ y=\ln x$.
5. $D: x^2=2-y,\ x+y=0$.
6. $D: y=\sqrt{2-x^2},\ y=x^2$.
7. $D: y=x^2-2,\ y=x$.
8. $D: x\geq 0,\ y\geq 1,\ y\leq 3,\ y=x$.
9. $D: y^2=2x,\ x^2=2y,\ x\leq 1$.
10. $D: x\geq 0,\ y\geq x,\ y=\sqrt{9-x^2}$.
11. $D: y^2=2-x,\ y=x$.
12. $D: x=\sqrt{2-y^2},\ x=y^2,\ y\geq 0$.
13. $D: y\geq 0,\ x+2y-12=0,\ y=\lg x$.
14. $D: x\leq 0,\ y\geq 1,\ y\leq 3,\ y=-x$.
15. $D: y=0,\ y\geq x,\ y=-\sqrt{2-x^2}$.
16. $D: y^2=x+3,\ y=-x$.
17. $D: y=\sqrt{4-x^2},\ x\geq 0,\ x=1, y=0$.
18. $D: =-10,\ x=-2,\ y\geq 0,\ y=x^2$.
19. $D: x=\sqrt{1-y^2},\ y=-x^2,\ y\leq 0$.
20. $D: x\leq 0,\ y=1,\ y=4,\ y=-x$.
21. $D: y=3-x^2,\ y=-x$.
22. $D: y=x^2+4,\ y\geq 0,\ x=-2,\ x=0$.

Пример. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D (x+y)dxdy$ по области D, ограниченной линиями $y=x$ и $y=x^2$, сделать чертеж области.



Решение. Область интегрирования D изображена на рисунке. Возьмем внешний интеграл по переменной x, а внутренний - по y. Получим:

$$\iint_D (4x^3y+y)dxdy = \int_0^1 dx\int_{x^2}^{x}(4x^3y+y)dy =$$

$$=\int_0^1\left(4x^3\frac{y^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=x^2}^{y=x}dx =$$

$$=\int_0^1\left(2x^3\cdot x+\frac{x^2}{2}-2x^3\cdot x^2-\frac{x^4}{2}\right)dx = \int_0^1\left(2x^4+\frac{x^2}{2}-2x^5-\frac{x^4}{2}\right)dx =$$

$$=\int_0^1\left(\frac{3}{2}x^4+\frac{x^2}{2}-2x^5\right)dx = \left(\frac{3}{2}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}-2\cdot\frac{x^6}{6}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{10.}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=\frac{3}{10}.$$

Задание 3. Вычислить двойной интеграл, сделать чертеж области.

1. $\iint_D \left(12x^2y^2+16x^3y^3\right)dxdy;\quad D: x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}$.

2. $\iint_D \left(9x^2y^2+48x^3y^3\right)dxdy;\quad D: x=1,\ y=-x^2,\ y=\sqrt{x}$.

3. $\iint_D \left(36x^2y^2-96x^3y^3\right)dxdy;\quad D: x=1,\ y=-x^3,\ y=\sqrt[3]{x}$.

4. $\iint_D \left(18x^2y^2+32x^3y^3\right)dxdy;\quad D: x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x}$.

5. $\iint_D \left(27x^2y^2+48x^3y^3\right)dxdy;\quad D: x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt[3]{x}$.

6. $\iint_D \left(18x^2y^2+32x^3y^3\right)dxdy;\quad D: x=1,\ y=-x^2,\ y=\sqrt[3]{x}$.

7. $\iint_D \left(18x^2y^2+32x^3y^3\right)dxdy;\quad D: x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt{x}$.

8. $\iint_D \left(27x^2y^2+48x^3y^3\right)dxdy;\quad D: x=1,\ y=-x^3,\ y=\sqrt{x}$.

9. $\iint_D \left(4xy+3x^2y^2\right)dxdy;\quad D: x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}$.

10. $\iint_D \left(12xy+9x^2y^2\right)dxdy;\quad D: x=1,\ y=-x^2,\ y=\sqrt{x}$.

11. $\iint_D \left(8xy+9x^2y^2\right)dxdy;\quad D: x=1,\ y=-x^3,\ y=\sqrt[3]{x}$.

12. $\iint\limits_D \left(24xy+18x^2y^2\right)dxdy;\quad D: x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x}$.

13. $\iint\limits_D \left(\frac{4}{5}xy+\frac{9}{11}x^2y^2\right)dxdy;\quad D: x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt{x}$.

14. $\iint\limits_D \left(8xy+18x^2y^2\right)dxdy;\quad D: x=1,\ y=-x^2,\ y=\sqrt[3]{x}$.

15. $\iint\limits_D \left(\frac{4}{5}xy+9x^2y^2\right)dxdy;\quad D: x=1,\ y=-x^3,\ y=\sqrt{x}$.

16. $\iint\limits_D \left(9x^2y^2+25x^4y^4\right)dxdy;\quad D: x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x}$.

17. $\iint\limits_D \left(24xy-48x^3y^3\right)dxdy;\quad D: x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}$.

18. $\iint\limits_D \left(6xy+24x^3y^3\right)dxdy;\quad D: x=1,\ y=-x^2,\ y=\sqrt{x}$.

19. $\iint\limits_D \left(4xy+16x^3y^3\right)dxdy;\quad D: x=1,\ y=-x^3,\ y=\sqrt[3]{x}$.

20. $\iint\limits_D \left(4xy+16x^3y^3\right)dxdy;\quad D: x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x}$.

21. $\iint\limits_D \left(44xy+16x^3y^3\right)dxdy;\quad D: x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt[3]{x}$.

22. $\iint\limits_D \left(4xy+176x^3y^3\right)dxdy;\quad D: x=1,\ y=-x^3,\ y=\sqrt[3]{x}$.

Задание 4. Вычислить двойной интеграл, сделать чертеж области.

1. $\iint\limits_D ye^{xy/2}dxdy;\quad D: x=4,\ x=2,\ y=\ln 2,\ y=\ln 3$.

2. $\iint\limits_D y^2\sin\frac{xy}{2}dxdy;\quad D: x=0,\ y=\sqrt{\pi},\ y=\frac{x}{2}$.

3. $\iint\limits_D y^2e^{-xy/4}dxdy;\quad D: x=0,\ x=y,\ y=2$.

4. $\iint\limits_D y\cos xy\,dxdy;\quad D: x=1,\ x=2,\ y=\pi,\ y=\frac{\pi}{2}$.

5. $\iint\limits_D y^2\cos\frac{xy}{2}dxdy;\quad D: x=4,\ x=0,\ y=\sqrt{\frac{\pi}{2}},\ y=x$.

6. $\iint\limits_D y\sin xy\,dxdy;\quad D: x=1,\ x=2,\ y=\pi,\ y=\dfrac{\pi}{2}.$

7. $\iint\limits_D 4ye^{2xy}dxdy;\quad D: x=1,\ x=0{,}5,\ y=\ln 4,\ y=\ln 3.$

8. $\iint\limits_D 4y^2\sin xy\,dxdy;\quad D: x=0,\ y=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}},\ y=x.$

9. $\iint\limits_D y^2e^{-\frac{xy}{8}}dxdy;\quad D: x=0,\ y=2,\ y=\dfrac{x}{2}.$

10. $\iint\limits_D y\cos 2xy\,dxdy;\quad D: x=1,\ x=\dfrac{1}{2},\ y=\pi,\ y=\dfrac{\pi}{2}.$

11. $\iint\limits_D 12y\sin 2xy\,dxdy;\quad D: x=3,\ x=2,\ y=\dfrac{\pi}{2},\ y=\dfrac{\pi}{4}.$

12. $\iint\limits_D y^2\cos xy\,dxdy;\quad D: x=0,\ y=\sqrt{\pi},\ y=x.$

13. $\iint\limits_D y^2e^{-\frac{xy}{8}}dxdy;\quad D: x=0,\ \ y=4,\ y=2x.$

14. $\iint\limits_D y^2\sin 2xy\,dxdy;\quad D: x=0,\ y=\sqrt{2\pi},\ y=2x.$

15. $\iint\limits_D y^2e^{-xy/2}dxdy;\quad D: x=0,\ x=y,\ y=\sqrt{2}.$

16. $\iint\limits_D 2y\cos 2xy\,dxdy;\quad D: x=1,\ x=2,\ y=\dfrac{\pi}{2},\ y=\dfrac{\pi}{4}.$

17. $\iint\limits_D y\sin xy\,dxdy;\quad D: x=\dfrac{1}{2},\ x=1,\ y=\pi,\ y=2\pi.$

18. $\iint\limits_D y^2\cos 2xy\,dxdy;\quad D: x=0,\ y=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}},\ y=\dfrac{x}{2}.$

19. $\iint\limits_D 8ye^{4xy}dxdy;\quad D: x=\dfrac{1}{4},\ x=\dfrac{1}{2},\ y=\ln 4,\ y=\ln 3.$

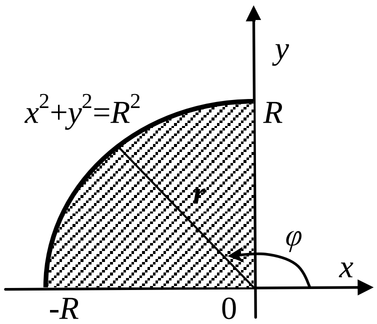
20. $\iint\limits_D y\cos xy\,dxdy;\quad D: x=1,\ x=\dfrac{1}{2},\ y=\pi,\ y=3\pi.$

21. $\iint\limits_D y\sin 2xy\,dxdy;\quad D: x=\dfrac{1}{2},\ x=\dfrac{1}{4},\ y=\dfrac{\pi}{2},\ y=\dfrac{3\pi}{2}.$

22. $\iint\limits_D y^2\cos xy\,dx\,dy,\quad D: x=0,\ y=\sqrt{\pi},\ y=2x.$

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_{-R}^{0}dx\int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}\,ctg\sqrt{x^2+y^2}}$, используя полярные координаты.

Решение. Область интегрирования задается неравенствами $-R\le x\le 0$,



$0\le y\le\sqrt{R^2-x^2}$. Это четверть круга, расположенная во втором квадранте. Перейдем к полярным координатам $x=r\cdot\cos\varphi$, $y=r\cdot\sin\varphi$.

Тогда $\sqrt{x^2+y^2}=r$, $0\le r\le R$, $\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\pi$, и

$$\int\limits_{-R}^{0}dx\int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}\,ctg\sqrt{x^2+y^2}}=\int\limits_{\pi/2}^{\pi}d\varphi\int\limits_{0}^{R}\frac{rdr}{r\cdot ctgr}=$$

$$=\int\limits_{\pi/2}^{\pi}d\varphi\int\limits_{0}^{R}\frac{rdr}{r\cdot ctgr}=\int\limits_{\pi/2}^{\pi}d\varphi\int\limits_{0}^{R}\frac{dr}{ctgr}=\int\limits_{\pi/2}^{\pi}d\varphi\int\limits_{0}^{R}\frac{\sin r dr}{\cos r}=\int\limits_{\pi/2}^{\pi}d\varphi\int\limits_{0}^{R}\frac{-d(\cos r)}{\cos r}=$$

$$=-\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\ln(\cos r)\Big|_0^R d\varphi=--\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\ln(\cos R)d\varphi=-\ln(\cos R)\varphi\Big|_{\varphi=\pi/2}^{\varphi=\pi}=-\frac{\pi\ln(\cos R)}{2}.$$

Задание 5. Вычислить интеграл, используя полярные координаты.

1. $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{0}dx\int\limits_{0}^{\sqrt{3-x^2}}\frac{dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$

2. $\int\limits_{0}^{R}dx\int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{tg\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dy.$

3. $\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\ln\left(1+x^2+y^2\right)dy.$

4. $\int\limits_{-2}^{2}dy\int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\sqrt{1-x^2-y^2}\,dx.$

5. $\int\limits_{-R}^{0}dx\int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}}\cos\sqrt{x^2+y^2}\,dy.$

6. $\int\limits_{-R}^{R}dx\int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}}tg\left(x^2+y^2\right)dy.$

7. $\int\limits_{0}^{R}dx\int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\cos\left(x^2+y^2\right)dy.$

8. $\int\limits_{-R}^{R}dx\int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\sin\sqrt{x^2+y^2}\,dy.$

9. $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{3-x^2}} \sqrt{1+x^2+y^2}\,dy.$ 10. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} \left(1+x^2+y^2\right)dy.$

11. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dy.$ 12. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\,dy.$

13. $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{0} \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy.$ 14. $\int\limits_{0}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}\cos^2\sqrt{x^2+y^2}}.$

15. $\int\limits_{-R}^{0} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{0} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}\sin^2\sqrt{x^2+y^2}}.$ 16. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy.$

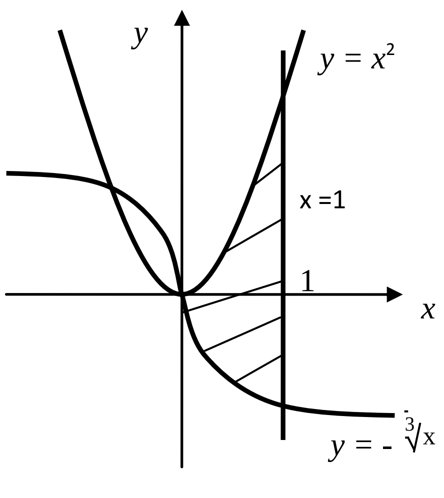
17. $\int\limits_{-3}^{3} dx \int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{0} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy.$ 18. $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1+x^2+y^2}\,dy.$

19. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dy.$ 20. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{0} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy.$

21. $\int\limits_{-R}^{0} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy.$ 22. $\int\limits_{0}^{R} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy.$

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$, $y=-\sqrt[3]{x},\ x=1$.

Решение. Фигура ограничена сверху графиком функции $y=x^2$, снизу графиком функции $y=-\sqrt[3]{x}$. Следовательно,



$$S=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{-\sqrt[3]{x}}^{x^2} dy=\int\limits_0^1 y\Big|_{y=-\sqrt[3]{x}}^{y=x^2}dx=$$

$$=\int\limits_0^1\left(x^2-\left(-\sqrt[3]{x}\right)\right)dx=\int\limits_0^1\left(x^2+\sqrt[3]{x}\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^{4/3}}{4/3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}+\frac{3}{4}=\frac{13}{12}.$$

Задание 6. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

1. $y=6x^2,\ x+y=2,\ x\ge 0.$

2. $x=8-y^2,\quad x=-2y$

3. $y^2=4x,\ x+y=3,\ y\ge 0.$

4. $y=\dfrac{\sqrt{x}}{2},\quad y=\dfrac{1}{2x},\quad x=16.$

5. $x=-2y^2,\ x=1-3y^2,\ x\le 0,\ y\ge 0.$

6. $x=5-y^2,\quad x=-4y.$

7. $y=\cos x,\quad y\le x+1,\quad y\ge 0.$

8. $y=\dfrac{3}{x},\ y=8e^x,\ y=3,\ y=8.$

9. $y=\sin x,\ y=\cos x,\ x=0,\ x\ge 0.$

10. $y=\dfrac{3}{2}\sqrt{x},\quad y=\dfrac{3}{2x},\quad x=9.$

11. $y=32-x^2,\quad y=-4x.$

12. $y=\sin x,\ y=\cos x,\ x=0,\ x\le 0.$

13. $y=2^x,\ y=2x-x^2,\ x=2,\ x=0.$

14. $y=3\sqrt{x},\quad y=\dfrac{3}{x},\quad x=4.$

15. $y=\dfrac{2}{x},\ y=5e^x,\ y=2,\ y=5.$

16. $y=\dfrac{25}{4}-x^2,\quad y=x-\dfrac{5}{2}.$

17. $xy=1,\ y=x^2,\ y=2,\ x=0.$

18. $y=\sqrt{x},\quad y=\dfrac{1}{x},\quad x=16.$

19. $y=\dfrac{2}{x},\ y=7e^x,\ y=2,\ y=7.$

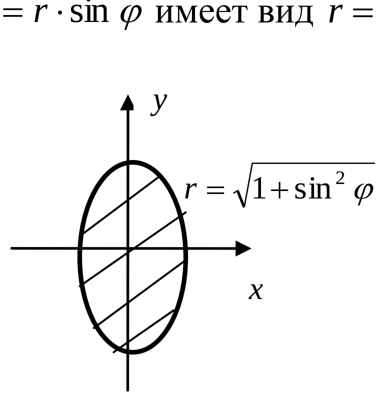
20. $x=27-y^2,\quad x=-6y.$

21. $xy=1,\ x=y^2,\ 2=2,\ y=0.$

22. $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x,\ y=-x^2,\ x=-2,\ x=0.$

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $(x^2+y^2)^2=\left(x^2+2y^2\right).$

Решение. Уравнение линии в полярных координатах $x=r\cdot\cos\varphi$, $y=r\cdot\sin\varphi$ имеет вид $r=\sqrt{\cos^2\varphi+2\sin^2\varphi}$ или $r=\sqrt{1+\sin^2\varphi}$. Область,



ограниченная этой линией, изображена на рисунке. Тогда

$$S=\iint_D r\,dr\,d\varphi=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{1+\sin^2\varphi}}r\,dr=\int_0^{2\pi}\frac{r^2}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{1+\sin^2\varphi}}d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(1+\sin^2\varphi\right)d\varphi=\frac{1}{2}\varphi\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}d\varphi=\pi+\frac{1}{4}\left(\varphi-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi}=$$

$$=\pi+\frac{1}{2}\pi=\frac{3}{2}\pi.$$

Задание 7. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

1. $\left(x^2+y^2\right)^2=2ax^3.$
2. $(x^2+y^2)^2=4a^2(x^2-y^2).$
3. $(x^2+y^2)^2=8a^2xy.$
4. $(x^2+y^2)^2=a^2\left(2x^2+3y^2\right).$
5. $(x^2+y^2)^2=a^2\left(5x^2+3y^2\right).$
6. $(x^2+y^2)^2=2a^2xy.$
7. $(x^2+y^2)^3=4x^2y^2.$
8. $(x^2+y^2)^3=a^2x^2y^2.$
9. $\rho=\sqrt{\cos 2\varphi}.$
10. $\rho=\sqrt{\sin 3\varphi}.$
11. $y^2+x^2=2x.$
12. $y^2+x^2=2y.$
13. $y^2-2y+x^2=0,\ y^2-4y+x^2=0,\ y=\frac{x}{\sqrt{3}},\ y=\sqrt{3}x.$
14. $x^2-2x+y^2=0,\quad x^2-10x+y^2=0,\quad y=\sqrt{3}x,\quad y=0.$
15. $x^2-4x+y^2=0,\quad x^2-8x+y^2=0,\quad y=\frac{x}{\sqrt{3}},\quad y=0.$
16. $x^2-2x+y^2=0,\quad x^2-4x+y^2=0,\quad y=x,\quad y=0.$
17. $y^2-2y+x^2=0,\quad y^2-4y+x^2=0,\quad y=\sqrt{3}x,\quad x=0.$
18. $x^2-4x+y^2=0,\quad x^2-8x+y^2=0,\quad y=x,\quad y=0.$
19. $y^2-4y+x^2=0,\quad y^2-6y+x^2=0,\quad y=x,\quad y=0.$
20. $x^2-2x+y^2=0,\quad x^2-10x+y^2=0,\quad y=\sqrt{3}x,\quad y=0.$
21. $x^2-4x+y^2=0,\quad x^2-6x+y^2=0,\quad y=\frac{x}{\sqrt{3}},\quad y=\sqrt{3}x.$
22. $y^2-4y+x^2=0,\quad y^2-10y+x^2=0,\quad y=\frac{x}{\sqrt{3}},\quad y=\sqrt{3}x.$

Пример. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=4$, $z=y,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0.$

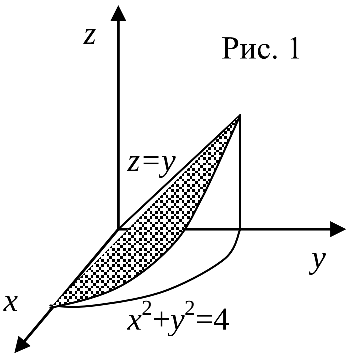


Рис. 1

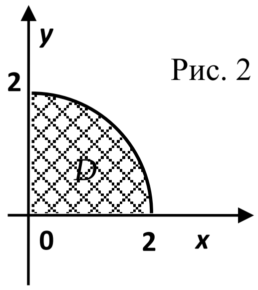


Рис. 2

Решение. Тело, объем которого требуется найти, изображено на рис. 1. Сверху тело ограничено плоскостью $z = y$, снизу областью D (см. рис.2). Тогда $V = \iint\limits_D y\,dx\,dy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} y\,dy =$

$$= \int\limits_0^2 \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^{\sqrt{4-x^2}} dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 \left(4 - x^2\right)dx = \frac{1}{2}\left.\left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\right|_0^2 = \frac{1}{2}\cdot\left(8 - \frac{8}{3}\right) = \frac{8}{3}.$$

Задание 8. Найти объем тела, ограниченного заданными поверхностями.

1. $y = 16\sqrt{2x},\ \ y = 2\sqrt{2x},\ \ z = 0,\ \ z + x = 2.$
2. $x^2 + y^2 = 2,\ \ y = \sqrt{x},\ \ y = 0,\ \ z = 0,\ \ z = 15x.$
3. $x + y = 2,\ \ y = \sqrt{x},\ \ z = 0,\ \ z = 12y.$
4. $x^2 + y^2 = 2,\ \ x = \sqrt{y},\ \ x = 0,\ \ z = 0,\ \ z = 30y.$
5. $x + y = 2,\ \ x = \sqrt{y},\ \ z = \frac{12x}{5},\ \ z = 0.$
6. $x = 17\sqrt{2y},\ \ x = 2\sqrt{2y},\ \ z = 0,\ \ z + y = \frac{1}{2}.$
7. $y = 5\sqrt{x},\ \ y = \frac{5x}{3},\ \ z = 0,\ \ z = 5 + \frac{5\sqrt{x}}{3}.$
8. $y = 17\sqrt{2x},\ \ y = 2\sqrt{2x},\ \ z = 0,\ \ x + z = \frac{1}{2}.$
9. $x^2 + y^2 = 8,\ \ y = \sqrt{2x},\ \ y = 0,\ \ z = 0,\ \ z = \frac{15x}{11}.$
10. $x + y = 4,\ \ x = \sqrt{2y},\ \ z = 0,\ \ z = \frac{3x}{5}.$
11. $z = x^2 + y^2,\ \ x + y = 1,\ \ x \ge 0,\ \ y \ge 0,\ \ z \ge 0.$
12. $z = 2 - (x^2 + y^2),\ \ x + 2y \le 1,\ \ x \ge 0,\ \ y \ge 0,\ \ z \ge 0.$

13. $z=x^2, \quad x-2y+2=0, \quad x+y-7=0, \quad z\geq 0.$

14. $y=\sqrt{x}, \ z=0, \ z=1, \ x+y=6, x=0.$

15. $2x+3y-12=0, \quad 2z=y^2, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$

16. $x^2+4y^2=4, \quad z=12-3x-4y, \quad z=1.$

17. $z=4-y^2, \quad 2y=x^2, \quad z=0.$

18. $z=x^2-y^2, \quad z=0, \quad x=0, \ x=1.$

19. $z=xy, \quad y=\sqrt{x}, \quad x+y=2, \quad y=0, \quad z=0.$

20. $z=x^2+y^2, \quad y=x^2, \quad z=1.$

21. $x^2+y^2=4, \quad z=y^3, \quad z=0 \ (x\geq 0, y\geq 0).$

22. $z=4-(x^2+y^2), \quad x+y\leq 1, \quad x\geq 0, \quad y\geq 0, \quad z\geq 0.$

Задание 9. Найти объем тела, ограниченного заданными поверхностями.

1. $x^2+y^2+2x=0, \quad z=\frac{25}{4}-y^2, \quad z=0.$

2. $x^2+y^2=y, \quad x^2+y^2=4y, \quad z=\sqrt{x^2+y^2}, \quad z=0.$

3. $x^2+y^2=8\sqrt{2}x, \quad z=x^2+y^2-64, \quad z=0, \quad z\geq 0.$

4. $x^2+y^2+4x=0, \quad z=8-y^2, \quad z=0.$

5. $x^2+y^2=6x, \quad x^2+y^2=9x, \quad z=\sqrt{x^2+y^2}, \quad z=0, \quad y=0, \quad y\leq 0.$

6. $x^2+y^2=6\sqrt{2}y, \quad z=x^2+y^2-36, \quad z=0, \quad z\geq 0.$

7. $x^2+y^2=2y, \quad z=\frac{9}{4}-x^2, \quad z=0.$

8. $x^2+y^2=2y, \quad x^2+y^2=5y, \quad z=\sqrt{x^2+y^2}, \quad z=0.$

9. $x^2+y^2+2\sqrt{2}y=0, \quad z=x^2+y^2-4, \quad z=0, \quad z\geq 0.$

10 $x^2+y^2=4x, \quad z=10-y^2, \quad z=0.$

11. $x^2+y^2=7x, \quad x^2+y^2=9x, \quad z=\sqrt{x^2+y^2}, \quad z=0, \quad y=0, \quad y\leq 0.$

12. $x^2+y^2=8\sqrt{2}y, \quad z=x^2+y^2-64, \quad z=0, \quad z\geq 0.$

13. $x^2+y^2=2\sqrt{2}x,\quad z=x^2+y^2-4,\quad z=0,\quad z\ge 0$.

14. $x^2+y^2=3y,\quad x^2+y^2=6y,\quad z=\sqrt{x^2+y^2},\quad z=0$.

15. $x^2+y^2=6\sqrt{2}x,\quad z=x^2+y^2-36,\quad z=0,\quad z\ge 0$.

16. $x^2+y^2=2\sqrt{2}y,\quad z=x^2+y^2-4,\quad z=0,\quad z\ge 0$.

17. $x^2+y^2=4x,\quad z=12-y^2,\quad z=0$.

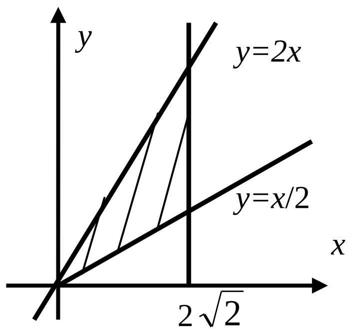
18. $x^2+y^2=8x,\quad x^2+y^2=11x,\quad z=\sqrt{x^2+y^2},\quad z=0,\quad y=0,\quad y\le 0$.

19. $x^2+y^2=4\sqrt{2}x,\quad z=x^2+y^2-16,\quad z=0,\quad z\ge 0$.

20. $x^2+y^2=4y,\quad z=4-x^2,\quad z=0$.

21. $x^2+y^2=4y,\quad x^2+y^2=7y,\quad z=\sqrt{x^2+y^2},\quad z=0$.

22. $x^2+y^2=4\sqrt{2}y,\quad z=x^2+y^2-16,\quad z=0,\quad z\ge 0$.



Пример. Вычислить площадь поверхности цилиндра $x^2=2z$, отсеченной плоскостями $x-2y=0,\ y=2x,\ x=2\sqrt{2}$.

Решение. Прежде всего, сделаем чертеж области D, над которой расположена поверхность $z=x^2/2$. Тогда

$\frac{\partial z}{\partial x}=x, \frac{\partial z}{\partial y}=0;\ \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+x^2}$. Следовательно,

$$S=\int_0^{2\sqrt{2}}dx\int_{x/2}^{2x}\sqrt{1+x^2}\,dy=\int_0^{2\sqrt{2}}\sqrt{1+x^2}\,y\Big|_{y=x/2}^{y=2x}dx=\int_0^{2\sqrt{2}}\sqrt{1+x^2}\left(2x-\frac{x}{2}\right)dx=\frac{3}{2}\int_0^{2\sqrt{2}}x\sqrt{1+x^2}\,dx=$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^{2\sqrt{2}}x\sqrt{1+x^2}\,\frac{d\left(1+x^2\right)}{2x}=\frac{3}{4}\int_0^{2\sqrt{2}}\sqrt{1+x^2}\,d\left(1+x^2\right)=\frac{3}{4}\cdot\frac{\left(1+x^2\right)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^{2\sqrt{2}}=13.$$

Задание 10.

1. Найти площадь той части плоскости $6x+3y+2z=12$, которая заключена в первом октанте.

2. Найти площадь той части поверхности $z^2 = 2xy$, которая находится над прямоугольником, лежащим в плоскости $z = 0$ и ограниченным прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x = 3$, $y = 6$.

3.Найти площадь части конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 2x$.

4. Найти площадь части поверхности параболоида $y = x^2 + z^2$, вырезанной цилиндром $x^2 + z^2 = 1$ и расположенной в I октанте.

5. Найти площадь части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, вырезанной цилиндром $x^2/4 + y^2 = 1$.

6. Найти площадь той части плоскости $z = x$, которая заключена внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 4$ выше плоскости $z = 0$.

7. Найти площадь части поверхности цилиндра $z = x^2$, вырезанной плоскостями $x + y = \sqrt{2}, x = 0, y = 0$.

8. Найти площадь поверхности конуса $x^2 - y^2 - z^2 = 0$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 1$.

9. Найти площадь части поверхности цилиндра $x^2 + z^2 = 4$, расположенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 4$.

10. Найти площадь части поверхности цилиндра $z^2 = 2xy$, вырезанной плоскостями $x = 1, y = 0, z = 0$.

11. Найти площадь части поверхности параболоида $x = 1 - y^2 - z^2$, вырезанной цилиндром $y^2 + z^2 = 1$.

12. Найти площадь части поверхности параболоида $2z = x^2 + y^2$, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = 1$.

Задание 11. Пластинка D задана ограничивающими ее кривыми, μ – поверхностная плотность. Найти массу пластинки.

1. $D: y=x,\ y=-x,\ y=1,\ \mu=\sqrt{1-y}.$

2. $D: x=0,\ y=2x,\ x+y=2,\ \mu=2-x-y.$

3. $D: y=x^2,\ \ x=y^2,\ \ \mu=3x+2y+6.$

4. $D: x=1,\ y=0,\ y^2=4x\ (y\geq 0),\ \mu=7x^2+y.$

5. $D: x^2+y^2=4, x^2+y^2=25, x=0, y=0(x\geq 0, y\geq 0), \mu=(2x-3y)/(x^2+y^2).$

6. $D: x=1,\ y=0,\ y^2=4x\ (y\geq 0),\ \mu=\dfrac{7x^2}{2}+5y.$

7. $D: x^2+y^2=9,\ x^2+y^2=16,\ x=0, y=0\ (x\geq 0, y\geq 0), \mu=(2x+5y)/(x^2+y^2).$

8. $D: x=2,\ y=0,\ y^2=2x\ (y\geq 0),\ \mu=\dfrac{7x^2}{8}+2y.$

9. $D: x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=16,\ x=0, y=0\ (x\geq 0, y\geq 0), \mu=(x+y)/(x^2+y^2).$

10. $D: x=2,\ y=0,\ y^2=\dfrac{x}{2}\ (y\geq 0),\ \mu=\dfrac{7x^2}{2}+6y.$

11. $D: x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=4,\ x=0,\ y=0\ (x\geq 0,\ y\geq 0),\ \mu=(x+y)/(x^2+y^2).$

12. $D: x=2,\ y=0,\ y^2=4x\ (y\geq 0),\ \mu=x+3y^2.$

13. $D: x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=9,\ x=0, y=0\ (x\geq 0, y\geq 0), \mu=(x-y)/(x^2+y^2).$

Задание 12. Вычислить тройной интеграл по области *T*, ограниченной заданными поверхностями.

1. $\iiint\limits_T (3x^2+y^2)dxdydz;\ T: z=10y,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

2. $\iiint\limits_V \dfrac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3};\ T: x+y+z=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

3. $\iiint\limits_V y^2\cos\left(\dfrac{\pi xy}{4}\right)dxdydz;\ T: x=0,\ y=-1,\ y=\dfrac{x}{2}, z=0,\ z=-\pi^2.$

4. $\iiint\limits_T (3x+4y)dxdydz;\ T: x=y,\ \ x=1,\ y=0,\ z=0,\ z=x^2+y^2.$

5. $\iiint\limits_T xyzdxdydz;\ T: x^2+y^2+z^2=1,\ \ x=0,\ y=0,\ z=0.$

6. $\iiint\limits_T x^2 z dxdydz; T: y = 3x,\ \ x = 2,\ y = 0,\ z = 0,\ z = xy.$

7. $\iiint\limits_T \left(1 + 2x^3\right) dxdydz; T: y = 9x,\ \ x = 1,\ y = 0,\ z = 0,\ z = \sqrt{xy}.$

8. $\iiint\limits_T 8y^2 z e^{-xyz} dxdydz; T: x = 0,\ \ x = 2,\ y = 0,\ y = -1,\ z = 0,\ z = 2.$

9. $\iiint\limits_T (x + 2z) dxdydz; T: z = x^2 + 3y^2,\ y = x,\ \ x = 1,\ y = 0,\ z = 0.$

10. $\iiint\limits_V x^2 \sin x(4\pi xy) dxdydz; T: y = \frac{x}{2},\ y = 0,\ x = 1,\ z = 0,\ z = 8\pi.$